Oplossingen week 45

Oplossing 8.1

1. $(1\,2\,5\,3\,8)(4\,9)$.

2. Inverse van 1, dus $(8\,3\,5\,2\,1)(4\,9)$.

Oplossing 8.2

Merk op dat $\text{kgv}(5,3,2) = 30$. Dus we zoeken een cykel van type $(5,3,2)$. Bijvoorbeeld $(1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8)(9\,10)$. Pas stelling 8.6. toe om te laten zien dat al deze elementen in 1 conjugatieklasse zitten.

Oplossing 8.3

i. $(7*6*5)/6*(4*3)/2*(2*1)/2 = 210$.

ii. $(8*7*6)/6*(5*4)/2*(3*2)/2 = 1680$.

Oplossing AS

1. Omdat $\beta^k\alpha\beta^{-k} = \beta^m\alpha\beta^{-m}$ als $k \equiv m \mod 5$ is het voldoende $\beta^k\alpha\beta^{-k}$ uit te rekenen voor $k = 1,2,3,4,5$:

$$\begin{aligned}
\beta\alpha\beta^{-1} &= (\beta(1)\ \beta(2)\ \beta(3)) = (1\,2\,4) \\
\beta^2\alpha\beta^{-2} &= (\beta^2(1)\ \beta^2(2)\ \beta^2(3)) = (1\,2\,5) \\
\beta^3\alpha\beta^{-3} &= (\beta^3(1)\ \beta^3(2)\ \beta^3(3)) = (1\,2\,6) \\
\beta^4\alpha\beta^{-4} &= (\beta^4(1)\ \beta^4(2)\ \beta^4(3)) = (1\,2\,7) \\
\beta^5\alpha\beta^{-5} &= \alpha = (1\,2\,3)
\end{aligned}$$

2. In propositie 8.16 van het diktaat is bewezen dat een ondergroep van A_7 die de 3-cykels $(1\,2\,i)$ bevat voor $3 \le i \le 7$ gelijk is aan de hele A_7. Omdat α en β even permutaties zijn is het opspansel $\langle\alpha,\beta\rangle$ bevat in A_7 en in opgave AS1 hebben we gecontroleerd dat dat opspansel de $(1\,2\,i)$ bevat.

Oplossing AC

1. Zij $A = \langle x\rangle = \{1, x, x^2\}$ en $B = \langle y\rangle = \{1, y, y^2\}$. We laten zien dat N het direct product is van A en B door de drie eisen te controleren:

   - Bij inspectie is $A \cap B = \{1\}$.
   - Omdat x en y commuteren is elk herhaald product van elementen uit $\{x, y\}$ te vereenvoudigen tot een uitdrukking van de vorm $x^k y^m$. Anders gezegd: elk element van N zit in AB.

- Omdat x en y commuteren commuteren alle elementen van A met alle elementen van N. Daaruit volgt dat A normaal is in N. Evenzo is B normaal in N.

2. We berekenen:

$$\begin{aligned} zxz^{-1} &= \big(z(1)\, z(2)\, z(3)\big) = (4\,5\,6) = y, \\ zyz^{-1} &= \big(z(4)\, z(5)\, z(6)\big) = (1\,3\,2) = x^{-1} \end{aligned}$$

   We bewijzen met inductie naar n: een product van n factoren uit de verzameling $S = \{x, y, z, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}\}$ is van de vorm $x^p y^q z^r$ met $p, q, r \in \mathbf{Z}$.

   - Als $n = 1$ dan lukt het met één van de getallen p, q, r gelijk aan $+1$ of -1 en de andere twee nul.
   - Stel dat het waar is voor $n = k$. Een product van $k + 1$ factoren is te zien als het product van één factor uit S met een product wat bij inductiehypothese al van de vorm $x^p y^q z^r$ is. Welnu

$$\begin{aligned} &z \cdot (x^p y^q z^r) = y^p x^{-q} z^{r+1} = x^{-q} y^p z^{r+1} \\ &z^{-1} \cdot (x^p y^q z^r) = y^{-p} x^q z^{r-1} = x^q y^{-p} z^{r-1} \\ &x \cdot (x^p y^q z^r) = x^{p+1} y^q z^r \\ &x^{-1} \cdot (x^p y^q z^r) = x^{p-1} y^q z^r \\ &y \cdot (x^p y^q z^r) = x^p y^{q+1} z^r \\ &y^{-1} \cdot (x^p y^q z^r) = x^p y^{q-1} z^r \end{aligned}$$

     In alle gevallen vinden we weer iets van de gewenste vorm.

   Kies nu $a \in \{0, 1, 2\}$ en $b \in \{0, 1, 2\}$ en $c \in \{0, 1, 2, 3\}$ met

$$a \equiv p \mod 3, \qquad b \equiv q \mod 3, \qquad c \equiv r \mod 4$$

   dan is $x^p y^q z^r = x^a y^b z^c$.

3. Stel dat $x^a y^b z^c = x^p y^q z^r$ waar $a, b, p, q \in \{0, 1, 2\}$ en $c, r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dan is $(x^p y^q)^{-1} x^a y^b = z^r (z^c)^{-1}$ ofwel $x^{a-p} y^{b-q} = z^{r-c}$.
   Het linkerlid heeft een orde die een deler is van 3, en het rechterlid heeft een orde die een deler is van 4. Zowel de derde als de vierde macht van beide leden zijn dus 1; dat betekent dat beide leden 1 zijn.

   Dat $z^{r-c} = 1$ betekent dat $r - c$ een viervoud is, en omdat $r, c \in \{0, 1, 2, 3\}$ kan dat alleen als $r - c = 0$.

Dat $x^{a-p}y^{b-q} = 1$ betekent dat $x^{a-p} = y^{q-b}$. Echter het linkerlid permuteert alleen $1, 2, 3$ maar laat $4, 5, 6$ vast, terwijl het rechterlid juist $1, 2, 3$ vast laat. Dit betekent dat beide leden alle 6 getallen vast laten en dus samenvallen met de triviale permutatie.
We hebben dus $x^{a-p} = 1$ en $y^{q-b} = 1$, wat betekent dat $a - p$ en $q - b$ drievouden zijn. Omdat $a, b, p, q \in \{0, 1, 2, \}$ kan dat alleen als $a - p = 0$ en $q - b = 0$.