Oplossingen week 46

Oplossing 8.4

Op twee manieren:

1. Identificeer A_5 via voorbeeld 8.24 met de symmetriegroep van de icosaeder. Deze heeft als symmetrieen, draaingen in de ribben, draaingen in de vlakken en draaingen in de hoeken. Draaingen in de hoeken vallen dan weer uiteen in twee draaïngen. Zie ook voorbeeld 2.11. De klasse hebben groote 1, 15, 20, 12, 12.

2. Met rekenen. Representanten voor A_5 zijn bijvoorbeeld, $e, (1\,2)(3\,4), (1\,2\,3), (1\,2\,3\,4\,5), (1\,3\,4\,5\,2)$. De klassen hebben groote 1, 15, 20, 12, 12.

Oplossing 9.1

i. Dit is simpel rekenwerk.

ii. Merk op dat $jij^{-1} = -jij = kj = -i$, $kik^{-1} = -kik = -jk = -i$, $iji^{-1} = -iji = -ki = -j$, $kjk^{-1} = -j$, $iki^{-1} = -k$ en $jkj^{-1} = -k$. Dus de conjugatieklassen zijn $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$ en $\{\pm k\}$.

Oplossing AC

4. De ondergroep $\langle x, y, z, w\rangle$ bevat $G = \langle x, y, z\rangle$ dus zijn orde is een veelvoud van die van G namelijk 36.
De ondergroep $\langle x, y, z, w\rangle$ bevat w dus zijn orde is een veelvoud van die van w namelijk 5.
Tesamen genomen zegt dit dat de orde een veelvoud is van $36 \cdot 5 = 180$.

   Omdat x, y, z, w allen even permutaties zijn is $\langle x, y, z, w\rangle$ bevat in de ondergroep A_6 van even permuaties. Zijn orde is dus een deler van van de orde van A_6, die 360 bedraagt.

   UIt bovenstaande twee alineas volgt dat de orde van $\langle x, y, z, w\rangle$ hetzij 180 hetzij 360 bedraagt. Echter in het eerste geval zou die ondergroep index 2 hebben in A_6 en dus een normale ondergroep van A_6 vormen. We weten echter dat A_6 geen normale ondergroepen heeft behalve zichzelf en de triviale. We concluderen dat $\langle x, y, z, w\rangle$ orde 360 heeft en dus de hele A_6 vormt.

5. Conjugeren met z voert x over in y en voert y over in x^{-1}. Dus conjugeren met z voert een herhaald product van (machten van) x en van y over in een overeenkomstig herhaald product van y en van x^{-1}. Anders gezegd: conjugeren met z voert elementen van N over in elementen

van N.
Conjugeren met x doet helemaal niets met elementen van N aangezien x en y commuteren. Evenzo doet conjugeren met y niets met elementen van N. Conjugeren met elementen van N is herhaald conjugeren met x en met y en met z en voert dus N in zichzelf over. Dit betekent dat N normaal is in G.

De groep G/N heeft orde 4 en bevat het element $w = zN$. Het kwadraat van dat element is $w^2 = z^2N$ en dat is niet-triviaal omdat $z^2 = (2\,3)(5\,6)$ niet in N ligt. Dus w heeft orde 4 wat betekent dat G/N cyclisch is van orde 4. Hij is dus isomorf met C_4.

6. We hebben

$$zxz^{-1} = y, \quad zyz^{-1} = x^{-1}, \quad zx^{-1}z^{-1} = y^{-1}, \quad zy^{-1}z^{-1} = x$$

De verzameling $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ wordt dus door conjugatie met z in zichzelf afgebeeld. Conjugatie met x of y laat elke element van die verzameling vast. De conjugatieklasse van x is dus $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$.

7. Uit de berekening in opgave AC2

$$\begin{aligned} zxz^{-1} &= \big(z(1)\,z(2)\,z(3)\big) = (4\,5\,6) = y, \\ zyz^{-1} &= \big(z(4)\,z(5)\,z(6)\big) = (1\,3\,2) = x^{-1} \end{aligned}$$

volgt dat $[z, x] = yx^{-1}$ en $[z, y] = x^{-1}y^{-1}$.
Dus $x = [z, x][z, y]$ en $y = [z, x]^2[z, y]$ zijn elementen van $[G, G]$, en daarom is heel N bevat in $[G, G]$.

We hebben in opgave AC5 gezien dat G/N abels is, ja zelfs cyclisch. Daaruit volgt dat de commutatoronderroep $[G, G]$ bevat is in N.

Tesamen genomen zegt dit dat $[G, G]$ precies N is, en de abelianisatie $G/[G, G]$ precies G/N is, dus cyclisch van orde 4.