Oplossingen Symmetrie - Week 47

Opgaven AJ7

i. We constateren eerst:

$$bab^{-1} = \big(b(1)\, b(2)\, b(3)\, b(4)\, b(5)\, b(6)\, b(7)\big) = (2\,4\,6\,1\,3\,5\,7) = a^2$$

ofwel $ba = a^2b$. We bewijzen nu met inductie naar n dat elk product van n factoren uit $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ te schrijven is in de vorm a^pb^q met $p, q \in \mathbf{Z}$.

Voor $n = 1$ is het duidelijk: we kunnen $p = \pm 1, q = 0$ nemen respectievelijk $p = 0, q = \pm 1$. Voor de inductiestap bekijken we het product van een factor uit S met een factor die al van de vorm a^pb^q is:

$$\begin{aligned}
&a \cdot (a^pb^q) = a^{p+1}b^q\\
&a^{-1} \cdot (a^pb^qm) = a^{p-1}b^q\\
&b \cdot (a^pb^q) = a^{2p}b^{q+1}\\
&b^{-1} \cdot (a^pb^q) = a^{4p}b^{q-1}
\end{aligned}$$

Dat voltooit de inductie. Kies nu $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ met $k \equiv p \mod 7$ en $m \in \{0, 1, 2\}$ met $m \equiv q \mod 3$. Dan is $a^pb^q = a^kb^m$.

Stel dat $a^kb^m = a^pb^q$ voor zekere $k, p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en $m, q \in \{0, 1, 2\}$. Dan is $a^{k-p} = b^{q-m}$. De orde van het linkerlid is 7 of 1, en de orde van het rechterlid is 3 of 1. Dus beide leden hebben orde 1, met ander woorden zijn gelijk aan het eenheidselement. Dus $a^{k-p} = 1$ en dan is $k-p$ een zevenvoud, wat in het aangegeven bereik alleen kan als $k - p = 0$. Evenzo is $q = m$.

ii. Stel dat gegeven is een vectorruimte V en transformaties $A, B \in \mathrm{GL}(V)$.
In opgave AJ1 hebben we nagegaan dat elk element van G uniek te schrijven is als a^kb^m met $0 \le k \le 6$ en $0 \le m \le 2$. Daaruit volgt dat we een afbeelding $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ kunnen definiëren door het voorschrift $\rho(a^kb^m) = A^kB^m$.

Stel nu dat ook gegeven is dat $A^7 = I$ en $B^3 = I$.
Als nu $s, t \in \mathbf{Z}$ dan kunnen we k, m als boven kiezen met $k \equiv s$ modulo 7 en en $m \equiv t$ modulo 3 en dan geldt $\rho(a^sb^t) = \rho(a^kb^m) = A^kB^m = A^sB^t$.

Stel tenslotte dat ook gegeven is dat $BAB^{-1} = A^2$. Dan geldt

$$\begin{aligned}\rho(a^k b^m a^u b^v) &= \rho(a^k a^{2^m u} b^m b^v) = \rho(a^{k+2^m u} b^{m+v}) \\ &= A^{k+2^m u} B^{m+v} = A^k A^{2^m u} B^m B^v = A^k B^m A^u B^v = \rho(a^k b^m)\rho(a^u b^v)\end{aligned}$$

voor $0 \leq k, u \leq 6$ en $0 \leq m, v \leq 2$.
Dit betekent dat ρ een homomorfisme is en dus een representatie.
Aan de genoemde vooreaarden is voldaan als $V = \mathbf{C}^3$ en

$$A = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veronderstel nu eens dat deze representatie ρ reducibel is. Dan is er een invariante lineaire deelruimte $U \subset \mathbf{C}^3$ van dimensie 1 of 2. Echter in het laatste geval is $U^\perp$ een invariante lineaire deelruimte van dimensie 1. Er is dus in beide gevallen een invariante lineaire deelruimte van dimensie 1, zeg het lineaire opspansel $\langle v \rangle$ van een vector $v \in \mathbf{C}^3$.

Het feit dat $\langle v \rangle$ invariant is impliceert dat $\rho(a)v$ in dat opspansel $\langle v \rangle$ zit, dus een veelvoud is van v, en dat betekent dat v een eigenvector is van $\rho(a)$.
Men ziet echter direct de enige eigenvectoren van $A = \rho(a)$ de veelvouden van de standaard basisvectoren zijn, bij eigenwaarden ω, ω^4 en ω^2.
De betreffende opspansels zijn niet invariant want ze worden door $\rho(b) = B$ echt gepermuteerd.

Een meer geavanceerde manier om te zien dat ρ irreducibel is bestaat eruit na te rekenen dat voor het kakakter χ_ρ geldt dat het scalair product $(\chi_\rho \mid \chi_\rho)$ gelijk is aan 1.

Opgaven AF9

Dat z centraal is betekent dat $zg = gz$ voor alle $g \in G$.
Als ρ een representatie van G op V is volgt daaruit dat

$$\rho(z)\rho(g) = \rho(zg) = \rho(gz) = \rho(g)\rho(z) \qquad \text{voor alle } g \in G$$

met andere woorden $\rho(z)\colon V \to V$ is een twijnafbeelding van ρ naar ρ.
Als ρ bovendien irreducibel is dan is zo'n twijnafbeelding van de vorm λI voor zekere $\lambda \in \mathbf{C}$, volgens het Lemma van Schur (Stelling 9.29).

Opgaven 9.2

Stel dat de standaardrepresentatie ρ niet irreducibel is. Dat bestaat er een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^2$ voortgebracht door $v \in \mathbb{C}^2$ zodat $U =< v >$ die bovendien invariant is onder de representatie ρ. Maar dan geldt dat v een eigenvector moet zijn van $\rho(1)$ en $\rho(j)$. Dus $v = \lambda(e_1 + ie_2)$. Maar $\rho(j)$ voert v dan over naar $\lambda(e_1 - ie_2)$. Omdat U invariant is moeten beide vectoren tot U behoren. Maar dan is $U = \mathbb{C}^2$. De conclusie is dus dat ρ invariant is.

Opgaven 9.3

Het is duidelijk dat U_1 invariant is onder de representatie ρ. Omdat U_2 het orhoplement van U_1 is geldt dan dat U_2 ook invariant is volgens propositie 9.15. De representatie ρ_1 komt nu overeen met de triviale representatie.

Opgaven 9.4

De standaardrepresentatie van S_2 valt volgens 9.3 uiteen in twee 1-dimensionale representaties ρ_1 en ρ_2. ρ_1 is de triviale representatie. Dus er is nog maar 1 mogelijkheid voor de spiegelingsrepresentatie (ρ_2) over. Namelijk de teken-representatie.