Oplossingen Symmetrie - Week 48

Opgaven CV

1. We berekenen

$$bab^{-1} = (b(1)\; b(2)\, b(3)\, b(4)) = (1\;4\;3\;2) = a^{-1}$$

ofwel $ba = a^{-1}b$. Daaruit blijkt dat in een lang product van factoren a^i en b^j de factoren a allemaal naar voren en de factoren b allemaal naar achteren kunnen worden gebracht zodat je een uitdrukking van de vorm $a^k b^m$ krijgt.

Dit argument is een beetje informeel. Daarom geven we ook nog even een formeler bewijs. We bewijzen met volledige inductie naar n de bewering:
Een product g van n factoren uit $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ is van de vorm $a^k b^m$ met $k, m \in \mathbf{Z}$.
Bewijs: Het is duidelijk waar voor $n = 1$. Voor de inductiestap onderscheiden we vier gevallen

   – Als $g = a^k b^m$ dan $ga = a^{k+(-1)^m} b^m$.
   – Als $g = a^k b^m$ dan $ga^{-1} = a^{k-(-1)^m} b^m$.
   – Als $g = a^k b^m$ dan $gb = a^k b^{m+1}$.
   – Als $g = a^k b^m$ dan $gb = a^k b^{m-1}$.

Een andere formele aanpak zou als volgt kunnen gaan:
De verzameling van alle $a^k b^m$ met $k, m \in \mathbf{Z}$ is een ondergroep van S_8.
Bewijs: we controleren de drie eisen:

   – Het eenheidselement is $a^0 b^0$.
   – Als $g = a^k b^m$ dan is $g^{-1} = b^{-m} a^{-k} = a^{-(-1)^m k} b^{-m}$.
   – Als $g = a^k b^m$ en $h = a^s b^t$ dan $gh = a^k b^m a^s b^t = a^{k+(-1)^m s} b^{m+t}$.

Voor dat omschrijven van $a^k b^m a^s b^t$ is eigenlijk toch weer een inductiebewijs nodig. Daarom lijkt de eerste formele aanpak het minste werk te vergen.

Door gebruik te maken van de duidelijke relaties $a^4 = 1$ en $b^4 = 1$ kunnen we vervolgens k en m in $\{0, 1, 2, 3\}$ krijgen. Desgewenst hadden we dat in de eerste formele aanpak in één moeite kunnen doen; dan waren er iets meer gevalsonderscheidingen nodig geweest.

2. Als ρ een eendimensionale representatie is van G dan zijn er $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ met $\rho(a) = (\alpha)$ en $\rho(b) = (\beta)$. Bovendien:

– Uit $bab^{-1} = a^{-1}$ volgt $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$. Dit betekent dat $\alpha^2 = 1$, dus $\alpha \in \{+1, -1\}$.
– Uit $b^4 = 1$ volgt dat $\beta^4 = 1$. Dit betekent dat $\beta \in \{+1, +i, -1, -i\}$.
– Uit $a^4 = 1$ volgt dat $\alpha^4 = 1$. Dat geeft geen nieuwe informatie.

Dit laat nog hoogstens 8 mogelijkheden voor ρ.
We geven nu twee argumenten om te zien dat ze ook allemaal optreden.
Eerste argument.
De relaties $bab^{-1} = a^{-1}$ en $a^4 = 1$ en $b^4 = 1$ voldoende om het product van twee elementen in stndaardvorm $a^k b^m$ weer in standaardvorm te brengen, dus om de groepstabel samen te stellen.
Dus als een afbeelding deze drie relaties respecteert dan respecteert hij de hele groepstabel en is een homomorfisme c.q. representatie.
Er zijn dus precies 8 mogelijkheden voor ρ.
Tweede argument.
Eendimensionale representaties van G corresponderen bijectief met eendimensionale representaties van $G/[G,G]$.
Voor een abelse groep zoals $G/[G,G]$ zijn de eendimensionale representaties precies de irreducibele representaties, en hun aantal is gelijk aan de orde van die groep.
De orde van $G/[G,G]$ is echter $16/2 = 8$ volgens opgave CV5.
Er zijn dus 8 eendimensionale representaties van G.

Opgaven 9.5

1. Een makkelijke manier is om alle inproducten van de hoeken uit te rekenen. We zien dat $A \cdot B = -1$, $A \cdot A = 3$, etc. Op deze manier is te concluderen dat de lengte tussen alle punten even lang is. Aangezien ze verschillend zijn kan dit alleen als $V \cap \mathbb{R}^4$ een tetraëder is.

2. V is volgens opgaven 9.3 een invariante deelruimte. En verder zien we met een makkelijke berekening dat $\rho(\sigma)X \in \{A, B, C, D\}$ waar $X \in \{A, B, C, D\}$.

3. De vorige opgaven geeft dus ook direct dat de spiegelrepresentatie op $\{A, B, C, D\}$ werkt als S_4. Elke mogelijke permutatie tussen A, B, C en D komt voor. Dus is equivalent met de symmetriegroep van de tetraëder.

Opgaven 9.6

1. Identificeer de hoeken van de tetraëder met de getallen 1, 2, 3 en 4. De draaiïngen over de ribben is een ondergroep H van $\mathcal{T}_d$. De identificatie van de hoeken geeft nu precies een isomorfisme tussen H en V_4.

2. Defineer $a = (1\,2)(3\,4)$, $b = (1\,3)(2\,4)$ en $c = (1\,4)(2\,3)$ in V_4. Dan geldt $V_4 = \{e, a, b, c\}$. $\rho : S_4 \to \mathcal{T}_d$ is de spiegel representatie op $\mathbb{C}^3$. Omdat V_4 abels is heeft V_4 4 1-dimensionale irreducibele representaties. Dus $\rho|V_4 \simeq \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$. Verder geldt de eis dat $a^2 = b^2 = c^2 = e$. De triviale representatie zit niet in $\rho|V_4$ dus hebben we de volgende drie representaties over:

ρ_2) $\rho_2(a) = 1$, $\rho_2(b) = -1$, $\rho_2(c) = -1$,

ρ_3) $\rho_3(a) = -1$, $\rho_3(b) = 1$, $\rho_3(c) = -1$,

ρ_4) $\rho_4(a) = -1$, $\rho_4(b) = -1$, $\rho_4(c) = 1$.