

Opglossingen Symmetrie - Week 49

Opgaven 10.1

Q heeft conjugatieklasse 1, -1 , $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$ en $\{\pm k\}$. Pas nu stelling 10.10 op deze representatie. Dan

$$(\chi_\rho | \chi_\rho) = \frac{1}{8}(4 + 4 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 1.$$

Dus de representatie is irreducibel.

Opgaven AC

- i. Stel dat gegeven is een vectorruimte V en transformaties $X, Y, Z \in \text{GL}(V)$.

In opgave AC2 hebben we nagegaan dat elk element van G uniek te schrijven is als $x^k y^\ell z^m$ met $0 \leq k, \ell \leq 2$ en $0 \leq m \leq 3$. Daaruit volgt dat we een afbeelding $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ kunnen definiëren door het voorschrift $\rho(x^k y^\ell z^m) = X^k Y^\ell Z^m$.

Stel nu dat ook gegeven is dat $X^3 = I$ en $Y^3 = I$ en $Z^m = I$.

Als nu $r, s, t \in \mathbf{Z}$ dan kunnen we k, ℓ, m als boven kiezen met $k \equiv r$ en $\ell \equiv s$ modulo 3 en $m \equiv t$ modulo 4 en dan geldt $\rho(x^r y^s z^t) = \rho(x^k y^\ell z^m) = X^k Y^\ell Z^m = X^r Y^s Z^t$.

Stel dat ook gegeven is dat $XY = YX$ en $ZXZ^{-1} = Y$ en $ZYZ^{-1} = X^{-1}$.

Dan geldt $\rho(x^k y^\ell z^m x^u y^v z^w) = \rho(x^k y^\ell z^m) \rho(x^u y^v z^w)$ voor $0 \leq m \leq 3$ immers

$$\begin{aligned} \rho(x^k y^\ell z^0 x^u y^v z^w) &= \rho(x^{k+u} y^{\ell+v} z^w) \\ &= X^{k+u} Y^{\ell+v} Z^w = X^k Y^\ell Z^0 X^u Y^v Z^w \\ &= \rho(x^k y^\ell z^0) \rho(x^u y^v z^w) \\ \rho(x^k y^\ell z x^u y^v z^w) &= \rho(x^k y^\ell y^u x^{-v} z^{1+w}) = \rho(x^{k-v} y^{\ell+u} z^{1+w}) \\ &= X^{k-v} Y^{\ell+u} Z^{1+w} = X^k Y^\ell Y^u X^{-v} Z^{1+w} = X^k Y^\ell Z X^u Y^v Z^w \\ &= \rho(x^k y^\ell z) \rho(x^u y^v z^w) \\ \rho(x^k y^\ell z^2 x^u y^v z^w) &= \rho(x^k y^\ell x^{-u} y^{-v} z^{2+w}) = \rho(x^{k-u} y^{\ell-v} z^{2+w}) \\ &= X^{k-u} Y^{\ell-v} Z^{2+w} = X^k Y^\ell X^{-u} Y^{-v} Z^{2+w} = X^k Y^\ell Z^2 X^u Y^v Z^w \\ &= \rho(x^k y^\ell z^2) \rho(x^u y^v z^w) \\ \rho(x^k y^\ell z^3 x^u y^v z^w) &= \rho(x^k y^\ell y^{-u} x^v z^{3+w}) = \rho(x^{k+v} y^{\ell-u} z^{3+w}) \\ &= X^{k+v} Y^{\ell-u} Z^{3+w} = X^k Y^\ell X^v Y^{-u} Z^{3+w} = X^k Y^\ell Z^3 X^u Y^v Z^w \\ &= \rho(x^k y^\ell z^3) \rho(x^u y^v z^w) \end{aligned}$$

Dit betekent dat ρ een homomorfisme is en dus een representatie.

Aan de genoemde voorwaarden is voldaan als $V = \mathbf{C}^4$ en

$$X = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. We hebben

$$zxz^{-1} = y, \quad zyz^{-1} = x^{-1}, \quad zx^{-1}z^{-1} = y^{-1}, \quad zy^{-1}z^{-1} = x$$

De verzameling $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ wordt dus door conjugatie met z in zichzelf afgebeeld. Conjugatie met x of y laat elke element van die verzameling vast. De conjugatieklasse van x is dus $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$.

Op dezelfde manier zien we dat $\{xy, x^2y, x^2y^2, xy^2\}$ een conjugatieklasse is.

Als twee elementen g_1 en g_2 van G geconjugueerd zijn door $g \in G$ dan zijn de elementen g_1N en g_2N van G/N geconjugueerd door $gN \in G/N$. Maar dat betekent dat g_1N en g_2N gelijk zijn aangezien G/N abels is. In het bijzonder is de conjugatieklasse van z bevat in Nz , en bestaat dus uit elementen van de vorm $x^a y^b z$.

Deze zijn ook inderdaad allemaal geconjugueerd:

$$\begin{array}{ccccc} z & \xrightarrow{x} & xy^2z & \xrightarrow{x} & x^2yz \\ \downarrow y & & \downarrow y & & \downarrow y \\ xyz & \xrightarrow{x} & x^2z & \xrightarrow{x} & y^2z \\ \downarrow y & & \downarrow y & & \downarrow y \\ x^2y^2z & \xrightarrow{x} & yz & \xrightarrow{x} & xz \end{array}$$

In dit diagram geven de pijlen conjugatie aan door de elementen die ernaast staan.

Op dezelfde manier zien we dat Nz^2 en Nz^3 conjugatieklassen zijn. Uiteraard is $\{1\}$ een conjugatieklasse. Er zijn dus zes conjugatieklassen: één van 1 element, twee van 4 elementen, en drie van 9 elementen.

iii. Door matrixvermenigvuldigen blijkt:

$$\rho(x) = X = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

$$\rho(xy) = XY = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(z) = Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(z^2) = Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(z^3) = Z^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We lezen de sporen af, en bepalen daarmee $\chi_\rho(g)$ voor een representant g van elke conjugatieklasse:

$$\chi_\rho(1) = \text{tr}(I) = 4,$$

$$\chi_\rho(x) = \text{tr } \rho(x) = 2\omega + 2\omega^2 = -2,$$

$$\chi_\rho(xy) = \text{tr } \rho(xy) = \omega + \omega^2 + 2 = 1,$$

$$\chi_\rho(z) = \text{tr } \rho(z) = 0,$$

$$\chi_\rho(z^2) = \text{tr } \rho(z^2) = 0,$$

$$\chi_\rho(z^3) = \text{tr } \rho(z^3) = 0$$

Omdat deze conjugatieklassen als cardinaliteit respectievelijk 1, 4, 4, 9, 9 en 9 hebben wordt het scalair product van dat karakter met zichzelf

$$(\chi_\rho | \chi_\rho) = (1 \cdot 4^2 + 4 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^2)/36 = 1$$

en dat betekent dat de representatie ρ irreducibel is.