Oplossingen Symmetrie - Week 50

Opgaven AC10

i. x en z brengen de groep G voort en leggen zo voor element van G zijn beeld vast. Hiermee is de afbeelding ϕ uniek. Om na te gaan dat dit een homomorfisme is moet gelden dat $\phi(x^a y^b z^c) = \phi(x)^a \phi(y)^b \phi(z)^c$. Voldoende hiervoor is om na te gaan dat $\phi(xy) = \phi(yx)$, $\phi(zx) = \phi(yz)$ en $\phi(zy) = \phi(x^2 z)$. Deze voldoen allemaal, dus ϕ is een homomorfisme.

ii. Schrijf π voor de klasse-vormende afbeelding van G naar $G_{ab} = G/[G,G]$. $G_{ab} = G/[G,G]$ is cyclisch van orde 4 met als voortbrenger $\zeta = \pi(z)$. Deze cyclische groep heeft vier ééndimensionale representaties η_k, gedefinieerd door

$$\eta_k(\zeta^m) = i^{km}, \qquad \text{waar } i = \sqrt{-1}$$

Door samenstellen met π ontstaan precies de ééndimensionale irreducibele representaties $\sigma_k = \eta_k \circ \pi$ van G.
Hun karakters kun je direct opschrijven, en tesamen met het in opgave AC9 bepaalde karakter van ρ geeft dat al een stuk van de karaktertabel:

	$C(1)$	$C(x)$	C(xy)	$C(z)$	$C(z^2)$	$C(z^3)$
σ_0	1	1	1	1	1	1
σ_1	1	1	1	i	-1	$-i$
σ_2	1	1	1	-1	1	-1
σ_3	1	1	1	$-i$	-1	i
ρ	4	-2	1	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...

waar $C(g)$ steeds staat voor de conjugatieklasse van $g \in G$.

De karakters van de irreducibele representaties vormen een orthonormale basis van de vectorruimte van klassefuncties. In het bijzonder is hun aantal gelijk aan de dimensie van die ruimte, namelijk het aantal conjugatieklassen, in dit geval 6.
Er ontbreekt dus nog maar één irreducibele representatie τ. Dit is precies de (irreducibele) representatie $\rho \circ \phi$.

Opgaven CO

i. Identificeer $C_2 = \{1, -1\}$. Voor elk karakter χ van G krijg je twee nieuwe karakters op $G \times C_2$ gedefineerd door

$$\chi_+(x,1) = \chi(x), \quad \chi_+(x,-1) = \chi(x) \quad \text{en} \quad \chi_-(x,1) = \chi(x), \quad \chi_-(x,-1) = -\chi(x).$$

En meer karakters kun je ook niet meer vinden. De tabel ziet er als volgt uit.

	$C(G \times 1)$	$C(G \times -1)$
χ_+	$\mathcal{X}(G)$	$\mathcal{X}(G)$
χ_-	$\mathcal{X}(G)$	$-\mathcal{X}(G)$

ii. De groep $\mathcal{T}$ heeft 4 conjugatieklassen, die we de volgende namen geven:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$3C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$4C_3^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$4C_3^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

De eerste twee conjugatieklassen vormen samen een normale ondergroep en wel $\mathcal{D}_2$. De factorgroep $\mathcal{T}/\mathcal{D}_2$ is cyclisch van orde 3 met als voortbrenger de nevenklasse van

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

immers $4C_3^+ = g\mathcal{D}_2$ en $4C_3^- = g^2\mathcal{D}_2$.

Deze cyclische groep heeft drie 1-dimensionale irreducibele representaties A, ${}^1E$ en ${}^2E$, al naar gelang genoemde voortbrenger naar 1, ϵ of ϵ^2 wordt afgebeeld. Hier is $\epsilon = e^{2\pi i/3} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$.
Door samenstellen met de projectie $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{D}_2$ krijgen we drie irreducibele representaties van $\mathcal{T}$. Tenslotte hebben we de standaardrepresenatie van $\mathcal{T}$. Deze heet T. Door de sporen af te lezen vinden we de volgende karaktertabel:

	E	$3C_2$	$4C_3^+$	$4C_3^-$
A	1	1	1	1
${}^1E$	1	1	ϵ	ϵ^2
${}^2E$	1	1	ϵ^2	ϵ
T	3	-1	0	0

Voor $\mathcal{T}_h$ is het voldoende op te merken dat $\mathcal{T}_h \simeq \mathcal{T} \times C_2$. Pas nu opgaven CO.i toe om de karaktertabel uit te rekenen.

Opgaven 10.2

Merk op dat $A_5 \simeq \mathcal{I}$ volgens opmerking 8.24. In voorbeeld 10.19 wordt het karaktertabel van $\mathcal{I}$ bepaalt. Bestudeer nu het isomorfisme dat A_5 naar $\mathcal{I}$ overstuurt. We zien dat de conjugatieklassen als volgt corresponderen, $E = e$, $12C_5 = C((1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5))$, $12C_5' = C((1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 2))$, $20C_3 = C((1,\ 2,\ 3))$ en $15C_2 = C((1,\ 2)(3,\ 4))$.