

Uitwerkingen Oefententamen.

1. We hebben $b^{-1} = (2 \ 5 \ 8)(4 \ 7 \ 6)$ en dus

$$\begin{aligned} c &= (b^{-1}(1) \ b^{-1}(2) \ b^{-1}(3) \ b^{-1}(4))(b^{-1}(5) \ b^{-1}(6) \ b^{-1}(7) \ b^{-1}(8)) \\ &= (1 \ 5 \ 3 \ 7)(8 \ 4 \ 6 \ 2) \end{aligned}$$

2. Uit

$$\begin{aligned} ca(1) &= c(2) = 8, & ca(2) &= c(3) = 7 \\ ca(3) &= c(4) = 6, & ca(4) &= c(1) = 5 \\ ca(5) &= c(6) = 2, & ca(6) &= c(7) = 1 \\ ca(7) &= c(8) = 4, & ca(8) &= c(5) = 3 \end{aligned}$$

volgt dat $ca = (1 \ 8 \ 3 \ 6)(2 \ 7 \ 4 \ 5)$ terwijl

$$\begin{aligned} bab^{-1} &= (b(1) \ b(2) \ b(3) \ b(4))(b(5) \ b(6) \ b(7) \ b(8)) = \\ &= (1 \ 8 \ 3 \ 6)(2 \ 7 \ 4 \ 5) \end{aligned}$$

3. Uit $bab^{-1} = c$ volgt dat $[b, a] = bab^{-1}a^{-1} = c$ zodat $c \in [G, G]$.
Omdat $[G, G]$ normaal is, is dan ook $a = bcb^{-1} \in [G, G]$.
Dus is heel $N = \langle a, c \rangle$ bevat in $[G, G]$.
Om in te zien dat omgekeerd $[G, G]$ bevat is in N volstaat het om aan te tonen dat N normaal is en dat G/N abels is.
Het eerste volgt uit $bNb^{-1} = \langle bab^{-1}, bcb^{-1} \rangle = \langle ca, a \rangle = N$.
Nu is G/N een groep die wordt voortgebracht door aN en bN , dus door bN alleen. Dus hij is cyclisch en in het bijzonder abels.
4. Een element van N is een product van machten van a en van c .
We kunnen de relatie $ac = c^3a$ gebruiken om alle a -tjes naar rechts te brengen; dus is een element van N van de vorm $c^k a^m$.
Je mag aannemen dat $k \in \{0, 1\}$ omdat $c^2 = a^2$, en je mag aannemen dat $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ omdat $a^4 = 1$.
De overblijvende acht uitdrukkingen zijn allemaal verschillend: als $c^k a^m = c^q a^r$ dan is $c^{k-q} = a^{r-m}$ maar je ziet meteen dat a orde vier heeft en dat $c \notin \{1, a, a^2, a^3\}$.
We zien dus dat N orde 8 heeft; in feite is N isomorf met de dicyclische groep Dic_2 , ook wel genoemd de quaternionengroep.
De orde van $B \cap N$ deelt zowel de orde van B als die van N , dus deelt zowel 3 als 8. Daaruit volgt dat $B \cap N = \{1\}$.
Uit opgave 3 weten we dat N normaal is en dat elk element van G/N van de vorm $b^j N$ is; maar dat betekent dat elk element van G in BN zit.

5. De equivalentie-klassen van 1-dimensionale representaties corresponderen bijectief met de homomorfismen van $G_{ab} = G/[G, G]$ naar $\mathbf{C}^*$. Uit opgave 3 weten we dat G_{ab} cyclisch is van orde 3; dus zijn er ook precies 3 dergelijke homomorfismen.
6. De waarde van χ_ρ op de conjugatieklasse van g is per definitie het spoor van $\rho(g')$ voor een willekeurige g' in de conjugatieklasse van g . We hoeven dus slechts zeven sporen te bepalen:

$$\chi_\rho(1) = \text{tr } \rho(1) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\chi_\rho(a) = \text{tr } \rho(a) = \text{tr} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$\chi_\rho(a^2) = \text{tr } \rho(a^2) = \text{tr} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\chi_\rho(b) = \text{tr } \rho(b) = -\frac{1+i}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = -\frac{1+i}{2}(1-i) = -1$$

$$\chi_\rho(ab) = \text{tr } \rho(ab) = -\frac{1+i}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1+i}{2}(i-1) = 1$$

$$\chi_\rho(b^2) = \text{tr } \rho(b^2) = \frac{i}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+i & -1+i \end{pmatrix} = \frac{i}{2}(2i) = -1$$

$$\chi_\rho(a^2b^2) = \text{tr } \rho(a^2b^2) = -\text{tr } \rho(b^2) = 1$$

Eerste methode.

Als de representatie ρ niet irreducibel was dan was er een invariante deelruimte U in $\mathbf{C}^2$ van dimensie 1, welke kan worden voortgebracht door een enkele vector u .

In het bijzonder moet dan $\rho(a)u$ een veelvoud van u zijn, wat betekent dat u een eigenvector is van $\rho(a)$, namelijk een veelvoud van een standaard basisvector. Dus U is een van twee mogelijkheden. Maar dan is U niet invariant onder $\rho(c)$ want deze verwisselt beide mogelijkheden.

Tweede methode.

Het scalair product van het karakter χ_ρ met zichzelf is

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} |\chi_\rho(g)|^2 = \frac{1}{\#G} \sum_C m_C \cdot |\chi_\rho(g_C)|^2$$

waar C de conjugatieklassen doorloopt, g_C een keuze van een element uit C is, en m_C het aantal elementen van C is.

Hier wordt dat $\frac{1}{24}(1 \cdot (2)^2 + 6 \cdot (0)^2 + 1 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (1)^2) = \frac{1}{24}(4 + 0 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) = 1$.

Een stelling zegt dat ρ dan irreducibel is.

7. We bepalen χ_σ met de formule $\chi_\sigma(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho(g^2))$.

$$\begin{aligned}\chi_\sigma(1) &= \frac{1}{2}(\chi_\rho(1)^2 + \chi_\rho(1^2)) = \frac{1}{2}(2^2 + 2) = 3 \\ \chi_\sigma(a) &= \frac{1}{2}(\chi_\rho(a)^2 + \chi_\rho(a^2)) = \frac{1}{2}(0^2 + (-2)) = -1 \\ \chi_\sigma(a^2) &= \frac{1}{2}(\chi_\rho(a^2)^2 + \chi_\rho(1)) = \frac{1}{2}((-2)^2 + 2) = 3 \\ \chi_\sigma(b) &= \frac{1}{2}(\chi_\rho(b)^2 + \chi_\rho(b^2)) = \frac{1}{2}((-1)^2 + (-1)) = 0 \\ \chi_\sigma(ab) &= \frac{1}{2}(\chi_\rho(ab)^2 + \chi_\rho(abab)) = \frac{1}{2}(1^2 + (-1)) = 0 \\ \chi_\sigma(b^2) &= \frac{1}{2}(\chi_\rho(b^2)^2 + \chi_\rho(b)) = \frac{1}{2}((-1)^2 + (-1)) = 0 \\ \chi_\sigma(a^2b^2) &= \frac{1}{2}(\chi_\rho(a^2b^2)^2 + \chi_\rho(b)) = \frac{1}{2}(1^2 + (-1)) = 0\end{aligned}$$

Hier is gebruikt dat $\chi_\rho(abab) = \frac{i}{2} \cdot 2i = -1$ omdat

$$\rho(ab) = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ en dus } \rho(abab) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -1+i & 1-i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}$$

en verder dat $(a^2b^2)^2 = b^4 = b$ omdat a^2 centraal is.

We gebruiken nu de tweede methode uit de uitwerking van opgave 6. Het scalair product van χ_σ met zichzelf is

$$\frac{1}{24}(1 \cdot (3)^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot (3)^2 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2) = 1$$

8. We weten uit de uitwerking van opgave 4 dat elke $g \in G$ uniek te schrijven is in de vorm $g = b^j c^k a^m$ met $j \in \{0, 1, 2\}$ en $k \in \{0, 1\}$ en $m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dus als ϕ bestaat dan moet het de afbeelding zijn die een g als boven overvoert in $(2 \ 3 \ 4)^j [(1 \ 2)(3 \ 4)]^k [(1 \ 3)(2 \ 4)]^m$. We moeten nog controleren dat de zo gedefinieerde afbeelding een homomorfisme is.

Bij het vereenvoudigen van het product van twee standaardvormen tot een standaardvorm hebben we alleen aan de zes relaties genoemd in opgave 2 nodig. Dus als de afbeelding ϕ die zes relaties respecteert dan is hij homomorf. Welnu:

$$\begin{aligned}(2 \ 3 \ 4)^3 &= 1 \\ [(1 \ 3)(2 \ 4)]^4 &= 1 \\ [(1 \ 2)(3 \ 4)]^2 &= 1 = [(1 \ 3)(2 \ 4)]^2 \\ [(1 \ 3)(2 \ 4)][(1 \ 2)(3 \ 4)] &= (1 \ 4)(2 \ 3) = [(1 \ 2)(3 \ 4)]^3 [(1 \ 3)(2 \ 4)] \\ (2 \ 3 \ 4)[(1 \ 2)(3 \ 4)](2 \ 3 \ 4)^{-1} &= (1 \ 3)(2 \ 4) \\ (2 \ 3 \ 4)[(1 \ 3)(2 \ 4)](2 \ 3 \ 4)^{-1} &= (1 \ 4)(3 \ 2) = [(1 \ 2)(3 \ 4)][(1 \ 3)(2 \ 4)]\end{aligned}$$

9. Zij τ de natuurlijke representatie van A_4 afkomstig van zijn werking op $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Dan is $\chi_\tau(g)$ het aantal vaste punten van g op X ,

en $\chi_{\tau\phi}(g) = \chi_{\tau}(\phi(g))$ is het aantal vaste punten van $\phi(g)$, namelijk

$$\begin{aligned}\chi_{\tau}(\phi(1)) &= \#\{x ; 1x = x\} = \#(X) = 4 \\ \chi_{\tau}(\phi(a)) &= \#\{x ; (1 \ 3)(2 \ 4)x = x\} = \#\emptyset = 0 \\ \chi_{\tau}(\phi(a^2)) &= \#\{x ; [(1 \ 3)(2 \ 4)]^2 x = x\} = \#X = 4 \\ \chi_{\tau}(\phi(b)) &= \#\{x ; (2 \ 3 \ 4)x = x\} = \#\{1\} = 1 \\ \chi_{\tau}(\phi(ab)) &= \#\{x ; (1 \ 3 \ 2)x = x\} = \#\{2\} = 1 \\ \chi_{\tau}(\phi(b^2)) &= \#\{x ; (2 \ 4 \ 3)x = x\} = \#\{1\} = 1 \\ \chi_{\tau}(\phi(a^2b^2)) &= \#\{x ; (2 \ 4 \ 3)x = x\} = \#\{1\} = 1\end{aligned}$$

Schrijf η voor de triviale representatie van G . Dan is $\chi_{\eta}(g) = 1$ voor alle g en

$$\begin{aligned}\chi_{\eta\oplus\sigma}(1) &= \chi_{\eta}(1) + \chi_{\sigma}(1) = 1 + 3 = 4, \\ \chi_{\eta\oplus\sigma}(a) &= \chi_{\eta}(a) + \chi_{\sigma}(a) = 1 + (-1) = 0, \\ \chi_{\eta\oplus\sigma}(a^2) &= \chi_{\eta}(a^2) + \chi_{\sigma}(a^2) = 1 + 3 = 4, \\ \chi_{\eta\oplus\sigma}(b) &= \chi_{\eta}(b) + \chi_{\sigma}(b) = 1 + 0 = 1, \\ \chi_{\eta\oplus\sigma}(ab) &= \chi_{\eta}(ab) + \chi_{\sigma}(ab) = 1 + 0 = 1, \\ \chi_{\eta\oplus\sigma}(b^2) &= \chi_{\eta}(b^2) + \chi_{\sigma}(b^2) = 1 + 0 = 1, \\ \chi_{\eta\oplus\sigma}(a^2b^2) &= \chi_{\eta}(a^2b^2) + \chi_{\sigma}(a^2b^2) = 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

Omdat $\tau\phi$ en $\eta \oplus \sigma$ hetzelfde karakter hebben zijn ze equivalent.

10. Zoals in de uitwerking van opgave 5 vermeld krijg je de eindimensionale representaties door homomorfismen $G_{ab} \rightarrow \mathbf{C}^*$ samen te stellen met de projectie $G \rightarrow G_{ab}$.

Maar G_{ab} is van orde 3 voortgebracht door de klasse van b , dus een dergelijk homomorfisme beeldt die klasse af op 1 of ω of ω^2 , waar $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Noteer η , α en β voor de samenstellingen. Dan is bijvoorbeeld $\alpha \otimes \rho$ irreducibel omdat hij dezelfde invariante deelruimtes heeft als ρ (geen dus). We vinden zo 7 irreducibele representaties met de volgende karakters:

	$C(1)$	$C(a)$	$C(a^2)$	$C(b)$	$C(ab)$	$C(b^2)$	$C(a^2b^2)$
η	1	1	1	1	1	1	1
α	1	1	1	ω	ω	ω^2	ω^2
β	1	1	1	ω^2	ω^2	ω	ω
ρ	2	0	-2	-1	1	-1	1
$\alpha \otimes \rho$	2	0	-2	$-\omega$	ω	$-\omega^2$	ω^2
$\beta \otimes \rho$	2	0	-2	$-\omega^2$	ω^2	$-\omega$	ω
σ	3	-1	3	0	0	0	0

Omdat de karakters allen verschillend zijn hebben we zeven inequivalente irreducibele representaties; en omdat er zeven conjugatieklassen zijn kunnen er niet meer zijn.