Opgaven Symmetrie - Week 46

Opgaven 8.4

Bepaal de aantallen elementen van de conjugatieklassen van A_5.

Opgaven 9.1

Stel $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ met

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

i. Controleer de rekenregels:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = -ji &= k, \\ jk = -kj &= i, \\ ki = -ik &= j \end{aligned}$$

en concludeer dat Q een ondergroep van $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ is. Deze groep Q heet de *quaterniongroep*.

ii. Bepaal de conjugatieklassen van Q.

Deze groep kan uitgebreid worden tot het niet commutatief lichaam (de ring voldoet aan alle eisen van een lichaam, behalve dat het commutatief is)

$$\mathbb{H} = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

$\mathbb{H}$ wordt de *quaternionen* genoemd. De $\mathbb{H}$ staat voor William Rowan Hamilton (1805 - 1865), de bedenker van dit lichaam.

Opgaven AC

We beschouwen in S_6 de elementen x, y die in cykel-notatie gegeven worden door

$$x = (1\,2\,3), \qquad y = (4\,5\,6), \qquad z = (1\,4)(2\,5\,3\,6)$$

Zij N de ondergroep van S_6 voortgebracht door x en y. Zij G de ondergroep $\langle x, y, z\rangle$ van S_6 voortgebracht door x, y, z.

1. Ga na dat N een direct product is.
2. Laat zien dat elk element van G te schrijven is in de vorm $x^a y^b z^c$ met $a, b \in \{0, 1, 2\}$ en $c \in \{0, 1, 2, 3\}$. [*Aanwijzing: bepaal eerst* zxz^{-1} *en* zyz^{-1}.]

3. Bewijs dat de schrijfwijze in 2 uniek is zodat G uit precies 36 elementen bestaat.

4. Leg uit waarom voor *elke* 5-cykel w de ondergroep van S_6 voortgebracht door x, y, z, w precies A_6 is. [*Aanwijzing: Misschien heb je propositie 6.3 nodig.*]

5. Ga na dat N normaal is in G. Met welke bekende groep is G/N isomorf?

6. Bepaal de conjugatie-klasse van x in G volledig.

7. Bepaal de abelianisatie van G.