Opgaven Symmetrie - Week 47

Opgaven AJ7

Zij G de ondergroep van S_7 voortgebracht door

$$a = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7) \qquad\qquad b = (1\,2\,4)(3\,6\,5).$$

i. Laat zien dat elk element van G uniek geschreven kan worden als $a^k b^m$ met $0 \leq k \leq 6$ en $0 \leq m \leq 2$.

ii. Laat zien dat de volgende formules een irreducibele representatie ρ van G opleveren:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

waar $\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

Opgaven AF9

Zij G een groep en zij z een centraal element van G. Leg uit waarom $\rho(z)$ voor elke irreducibele representatie ρ van G een scalair is.

Extra opgaven

Opgaven 9.2

Stel $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ met

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Ga na dat de standaardrepresentatie van de quaterniongroep Q op $\mathbb{C}^2$ irreducibel is.

Opgaven 9.3

Zij $\rho : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de representatie van S_n met $\rho(\sigma)$ de permutatiematrix van σ. Ga na dat

$$U_1 = \{(x, x, ..., x) \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{C}\},$$
$$U_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n : x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$$

beide invariante deelruimten zijn. Concludeer dat $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ met ρ_j ($j = 1, 2$) de beperking van ρ tot U_j. Herken je de representatie ρ_1? De representatie ρ_2 heeft dimensie $n - 1$ en heet de *spiegelingsrepresentatie* van S_n.

Opgaven 9.4

Ga na dat voor S_2 de spiegelingsrepresentatie samenvalt met de tekenrepresentatie.