Opgaven Symmetrie - Week 48

Opgaven CV

Beschouw de elementen $a = (1\,2\,3\,4)$ en $b = (2\,4)(5\,6\,7\,8)$ van S_8.
Zij G de ondergroep van S_8 voortgebracht door a en b.

1. Laat zien dat elke element van G is te schrijven in de vorm $a^k b^m$ met $k, m \in \{0, 1, 2, 3\}$.
2. Bepaal de acht eendimensionale representaties van G.

Extra opgaven

Opgaven 9.3

Zij $\rho : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de representatie van S_n met $\rho(\sigma)$ de permutatiematrix van σ. Ga na dat

$$U_1 = \{(x, x, ..., x) \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{C}\},$$
$$U_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n : x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$$

beide invariante deelruimten zijn. Concludeer dat $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ met ρ_j $(j = 1, 2)$ de beperking van ρ tot U_j. Herken je de representatie ρ_1? De representatie ρ_2 heeft dimensie $n - 1$ en heet de *spiegelingsrepresentatie* van S_n.

Opgaven 9.5

Zij $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ en $\rho : S_4 \to \mathrm{GL}(V)$ de spiegelingsrepresentatie van S_4 op V. Stel $A = \frac{1}{2}(3, -1, -1, -1)$, $B = \frac{1}{2}(-1, 3, -1, -1)$, $C = \frac{1}{2}(-1, -1, 3, -1)$, $D = \frac{1}{2}(-1, -1, -1, 3)$.

1. Ga na dat $\{A, B, C, D\}$ de hoekpunten van een tetraëder in $V \cap \mathbb{R}^4$ zijn.
2. Ga na dat $\rho(\sigma)$ voor $\sigma \in S_4$ de verzameling $\{A, B, C, D\}$ in zichzelf overvoert.
3. Concludeer dat de spiegelingsrepresentatie van S_4 equivalent is met de standaardrepresentatie van $\mathcal{T}_d$ $(\simeq S_4)$.

Opgaven 9.6

1. Laat zien dat er een ondergroep H van $\mathcal{T}_d$ $(\simeq S_4)$ is die isomorf is met $V_4 = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.
2. Ontbind de standaard representatie van V_4 op $\mathbb{C}^3$ in irreducibele deelrepresentaties.