Opgaven Symmetrie - Week 49

Opgaven 10.1

Laat Q de quatrionengroep (zie ook week 46 en 47) met representatie

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Bewijs de irreducibiliteit van deze representatie met karaktertheorie.

Opgave AC

We beschouwen in S_6 de elementen x, y, z die in cykel-notatie gegeven worden door

$$x = (1\,2\,3), \qquad y = (4\,5\,6), \qquad z = (1\,4)(2\,5\,3\,6)$$

Zij G de ondergroep van S_6 voortgebracht door x, y, z. (zie ook week 45 en 46)

i. Laat zien dat er een 4-dimensionale representatie ρ van G is met

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}, \qquad \rho(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

waar $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

ii. Bepaal de zes conjugatie-klassen van G.

iii. Bepaal het karakter van ρ. Is de representatie ρ irreducibel? Bewijs je antwoord.