Is wiskunde een spel?

Kirti Singh

27 juli 2023

Inhoudsopgave

Inleiding

> Het is niet aan de filosofie een tegenstrijdigheid door een wiskundige of een logisch-wiskundige ontdekking weg te nemen; haar taak is het ons in staat te stellen de toestand van de wiskunde waarover we ons ongerust maken, de toestand *voordat* de tegenstrijdigheid is weggenomen, te overzien. (En daarmee gaat men nog geen moeilijkheid uit de weg.)
> Het feit waar het hier om draait is dit: wij leggen regels, een techniek, voor een spel vast, en als we dan de regels volgen gaat het niet zo als we hadden aangenomen. We raken dus als het ware verstrikt in onze eigen regels.
> Dit verstrikt-raken-in-onze-regels is wat wij willen begrijpen, dat wil zeggen overzien.
>
> Ludwig Wittgenstein in *De Filosofische Onderzoekingen*

Het formalisme, een prominente school in de filosofie van de wiskunde, wordt gezien als de groep aanhangers van de slogan 'wiskunde is een spel'. Mede door deze stellingname worden formalisten onderworpen aan kritiek vanuit wiskundige en filosofische hoek. Het formalisme is volgens deze critici niet in staat de wiskundige praktijk naar behoeven te verklaren. Wiskundigen spelen immers geen spel, maar ze zijn inhoudelijk bezig met het onderzoeken van structuren. Hieronder schuilt de aanname dat er een verschil is tussen inhoud en een spel. Spellen, zoals bijvoorbeeld het schaakspel, worden gespeeld door middel van betekenisloze objecten; in het geval van het schaakspel zijn dat de schaakstukken. Wiskundige objecten, zoals getallen, vergelijkingen en de integraal, zijn daarentegen inhoudelijk en betekenisvol. (Avigad en Heck 2001, 3)

De historische oorsprong van het hedendaagse formalisme ligt aan het einde van de negentiende eeuw. In het wiskundige collectieve bewustzijn wordt deze periode gekenmerkt door een *grondslagenstrijd*. (Zach 2021) Uit de logica en verzamelingenleer, maar ook uit andere vakgebieden die verbonden zijn aan de grondslagen van de wiskunde, verschenen er een aantal paradoxen die de zekerheid van de fundamenten van de wiskunde deden wankelen. Om deze reden besloten verscheidene wiskundigen zich te organiseren in *grondslagenscholen*, die ieder een nieuwe grondslag voor de wiskunde voorzagen. Een van deze scholen was het formalisme, waar David Hilbert het gezicht van was. Een belangrijke opmerking is dat voordat Hilbert zijn formalisme uitdiepte er al summiere pogingen waren gedaan tot het formuleren van een formalistische filosofie door Johannes Thomae en Eduard Heine.

In het zojuist genoemde wiskundige collectieve bewustzijn eindigt het verhaal van het formalisme bij Kurt Gödel. Zijn *Onvolledigheidsstellingen* zijn volgens veel wiskundigen de doodsteek geweest voor Hilberts formalisme. De formalisten hadden zich als doel gesteld alle wiskundige systemen te axiomatiseren om vervolgens de *consistentie* - de eis dat er geen tegenspraak kan worden afgeleid - van deze systemen na te gaan. Het uiteindelijk doel was om een consistentiebewijs te formuleren *in* het axiomatische systeem. Gödel toonde aan dat dit niet mogelijk is. Daarnaast toonde hij aan dat ieder consistent systeem uitspraken bevat die niet *beslisbaar* zijn. Dat wil zeggen dat we noch de uitspraak noch haar tegendeel kunnen bewijzen. (Avidgan en Heck 2021, 3)

De lacunes die Gödels Onvolledigheidsstellingen blootlegden, kenmerkten voor veel filosofen en wiskundigen een afrekening met het formalisme. Het formalisme was hieruit bezien *at worst, naive, and, at best, simply a failure*. (Avidgan en Heck 2001, 3) Gödel zelf trok deze conclusies echter niet. Volgens hem was zijn werk geen doodsteek, het wees slechts op een kink in de kabel. Het consistentie-ideal was inderdaad aangetast, maar grote delen van de formalistische filosofie bleven ongedeerd. Daarnaast ontwikkelden logici de notie van *relatieve consistentie* waarbij je de consistentie van een systeem niet in het systeem zelf bewijst, maar vanuit een ander consistent systeem. Een voorbeeld is Gerhard Gentzens consistentiebewijs van PA in ZFC.

Het onvermogen van het formalisme om de wiskundige praktijk afdoende te verklaren gecombineerd met Gödels Onvolledigheidsstellingen leidden tot een definitieve afrekening met het formalisme. Maar is het formalisme wel zo onredelijk? Zit er echt niets achter de filosofie die predikt dat de wiskunde 'een spel' is? Deze vragen, en de antwoorden daarop, vormen het hoofdbestanddeel van deze scriptie. Belangrijk om op te merken is dat we ons niet richten op de technische kant van het formalisme, die ernstig is aangetast door Gödel, maar op de filosofische fundering achter de formalistische slogan 'wiskunde is een spel'.

De hoofdvraag is daarmee: *is wiskunde een spel?* Hier volgen meteen twee deelvragen uit: *wat is wiskunde?* en *wat is een spel?* Deze zullen wij gaandeweg beantwoorden. De eerste twee hoofdstukken vormen een overzicht van de vroege ontwikkelingen van het formalisme. In het eerste hoofdstuk komen de standpunten van de eerste formalisten, Johannes Thomae en Eduard Heine, aan bod. Hun filosofie is vrij snel bekritiseerd door Frege, wiens standpunten een canonieke status hebben gekregen in het tegenkamp van de formalisten. Deze presenteren wij daarom in het eerste hoofdstuk en zij zullen een leidraad voor de hele scriptie.

Het eerste hoofdstuk vormt daarmee een deel van het antwoord op de vraag *wat is wiskunde?* Het vervolg van het antwoord komt aan bod in het tweede hoofdstuk, waarin we Hilberts formalistische standpunten zullen presenteren. Zijn theorie is een soort volwassenwording van Thomae en Heine's formalistische gedachtekronkels, die een betere kandidaat is om Frege's kritiek tegen te werpen. Hier zullen het einde van het tweede hoofdstuk aan besteden. In het derde hoofdstuk bekijken we het formalisme vanuit de lens van het computerbewijs van de *Vierkleurenstelling*.

Dit bewijs heeft een aantal verschuivingen in de filosofie van de wiskunde veroorzaakt vanwege zijn onorthodoxe karakter. Het is namelijk een stelling die voor een deel is bewezen door middel van een computer. Wij bespreken dit computerbewijs omdat het accepteren van dergelijke formele bewijzen uitstekend past binnen het formalistische raamwerk. Immers, als de wiskunde een spel is, net als het schaakspel, dan mogen computers het spel ook spelen, net als schaakcomputers. Het formalisme staat of valt hierdoor met het computerbewijs van de Vierkleurenstelling. Als we accepteren dat computerbewijzen ongeldig zijn, dan moeten we concluderen dat de filosofie die deze bewijzen toestaat ook ongeldig is. De bespreking van de Vierkleurenstelling is daarmee nog een interessante inspiratiebron om de vraag *wat is wiskunde?* verder te beantwoorden.

In het slotstuk van deze scriptie pogen we een afrekening met Frege's kritiek te formuleren. Hiertoe zullen we eerst helder voor ogen moeten hebben wat het begrip *spel* betekent. De latere filosofie van Ludwig Wittgenstein, waarin hij schrijft over *taalspelen*, zal de primaire inspiratiebron zijn voor dit hoofdstuk. Deze keuze is deels gebaseerd op het feit dat het formalisme wordt vergeleken met het schaakspel; een spel dat een belangrijke inspiratiebron was voor Wittgenstein om complexe menselijke interactie te analyseren. Dit hoofdstuk staat in teken van het synthetiseren van de inzichten van de formalisten, Wittgenstein en naar aanleiding van de Vierkleurenstelling.

Uiteindelijk combineren we alle inzichten en schetsen we een nieuwe formalistische filosofie, die we het *Wittgensteiniaans formalisme* zullen noemen. Volgens deze zienswijze is wiskunde een spel. 'Spel' reduceren we in deze filosofie niet tot het schaakspel, maar we hanteren een veelzijdige en gepoleisde definitie die is gebaseerd op Wittgensteins opmerkingen over taalspelen. Een belangrijke laatste opmerking is dat Wittgenstein de koppeling tussen taalspelen en wiskunde als een spel nooit heeft gemaakt. Zijn filosofie van de wiskunde komt uit een eerdere periode dan zijn filosofie over taalspelen. In deze scriptie zullen we zien dat het toepassen van Wittgensteins latere filosofie op de wiskunde zeer vruchtbaar is.

Hoofdstuk 1

De *primitieve* formalisten en Frege

De eerste gezaghebbende filosofische verhandeling van het formalisme hebben we te danken aan Gottlob Frege. In zijn *Grundgesetze der Arithmetik* bekritiseert hij het formalistische standpunt zoals ingenomen door Johannes Thomae en Eduard Heine. Hoewel hun formulering van het formalisme vrij mager en beknopt is, staat het wel aan de wieg van meer gedetailleerde formuleringen van het formalisme, zoals gegeven door Hilbert. In dit hoofdstuk wordt het 'primitieve' formalisme van Thomae en Heine gepresenteerd, waarna de kritiek van Frege aan bod komt. Of Frege succesvol blijkt in het tegenwerpen van Thomae en Heine's standpunt, wordt bediscussieerd in het volgende en laatste hoofdstuk.

1.1 Het 'primitieve' formalisme

1.1.1 Thomae's formalisme

Frege citeert passages uit Thomae's en Heine's werken en presenteert daarmee een (bevooroordeeld) overzicht van het formalisme. Allereerst komt Thomae's zienswijze aan bod, die schrijft:

> The formal conception of numbers accepts more modest limitations than does the logical conception. It does not ask what numbers are and what they do, but rather what is demanded of them in arithmetic. **For the formalist, arithmetic is a game with signs (*Zeichenspiel*), which are called empty.** That means they have no other content (in the calculating game) than they are assigned by their behaviour with respect to certain rules of combination (rules

> of the game). The chess player makes similar use of his pieces; he assigns them certain properties determining their behaviour in the game, and the pieces are only the external signs of this behaviour. To be sure, there is an important difference between arithmetic and chess. **The rules of chess are arbitrary, the system of rules for arithmetic is such that by means of simple axioms the numbers can be referred to perceptual manifolds and can thus make important contribution to our knowledge of nature.** (Frege 1977, 184)

De twee dikgedrukte zinnen vormen de kern van zijn opvatting. Thomae stelt dat de rekenkunde een betekenisloos spel tussen tekens is. Volgens hem hebben getallen niet een intrinsieke metafysische betekenis, maar worden ze betekenisvol door de regels die we ze toeschrijven. Ter illustratie: het getal 0 kunnen we metafysisch interpreteren als het 'niets' en 'leegte' of iets dergelijks. Het probleem dat hierdoor ontstaat is dat er geen metafysische consensus bestaat over de betekenis van 'niets' en 'leegte' in de filosofie. Het probleem van de betekenis van 0 wordt niet opgelost, maar verschoven naar de metafysica.

Dergelijke problemen over de interpretatie van getallen wil Thomae voorkomen. (Weir 2022) Daarom stelt hij dat 0 niets meer is dan een teken, dat in het formele spel van de rekenkunde een rol toegewezen krijgt volgens een aantal regels. In Peano's axiomatisering van de rekenkunde zouden dat $\forall x[0 \neq S(x)]$, $\forall x[x + 0 = x]$ en $\forall x[x \cdot 0 = 0]$ zijn. Om dit standpunt te verduidelijken, gebruikt Thomae de analogie van het schaakspel. Getallen zijn vergelijkbaar met schaakstukken: stukken hout die betekenis krijgen door de schaakregels. Getallen zijn inktpatronen op papier die op vergelijkbare wijze betekenisvol worden door axioma's, definities en stellingen.

Volgens Thomae zijn er dus sterke overeenkomsten tussen het schaakspel en de wiskunde. Toch merkt hij op dat er een essentieel verschil is. De schaakregels zijn arbitrair en regels van de rekenkunde zijn dat niet. Deze negatieve beschrijving van de rekenkunde voorziet hij niet van verdere toelichting. Hij stelt alleen dat het *mogelijk* is een rekenkundig systeem op te stellen dat in staat is de getallen te laten corresponderen met objecten uit de natuur. Er bestaat volgens Thomae dus een *effectieve* axiomatiseringing van de rekenkunde, die zeer toepasbaar is in andere wetenschapsgebieden. Deze axiomatisering zegt echter niets over de 'aard' van de getallen.

1.1.2 Heine's formalisme

Heine's formalistische standpunt is anders dan dat van Thomae. Zijn opvattingen zijn te vinden in het volgende citaat:

> Suppose I am not satisfied to have nothing but positive rational numbers. I do not answer the question, "What is a number?", by

> defining numbers conceptually, say by introducing irrationals as limits whose existence is presupposed. **I define from the standpoint of the pure formalist and call certain tangible signs numbers (*...ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne*)**. Thus the existence of these numbers is not in question. (Frege 1977, 1983)

Ook Heine probeert vraagstukken over de metafysische status van getallen te omzeilen. Dit doet hij niet door de rekenkunde als een strikt niet-inhoudelijke aangelegenheid te bestempelen. In Heine's formalisme hebben wiskundige uitdrukking, in tegenstelling tot Thomae's formalisme, wel een intrinsieke inhoud. Heine stelt dat wiskundige uitdrukkingen uit tekens (*Zeichen*) bestaat die verwijzen naar andere tekens. Door deze stellingname hoeft Heine het bestaan van een externe wiskundige realiteit niet te vooronderstellen. Wiskundige uitdrukkingen verwijzen slechts naar symbolische en talige tekens, niet naar iets 'buiten' het tekenspel.

Om Heine's formalisme uit te diepen analyseren we de uitdrukking '$0 = 0$' in het licht van het *type-token onderscheid* zoals gedaan in (Shapiro 2000, 142). Een token is een fysieke vorm die een type representeert. Als ik de letter 'm' opschrijf dan staat er een token op mijn papier. Type's zijn de abstracte vormen van tokens. Als we bijvoorbeeld zeggen dat het Latijnse schrift 26 letters bevat, dan hebben we het niet over tokens, het totaal aantal geschreven letters met het Latijnse schrift, maar over de 26 abstracte vormen van de letters. 'Formalisme' bestaat uit tien tokens, maar omdat het tweemaal 'm' bevat bestaat het uit negen types.

'$0 = 0$' is volgens Heine's formalisme een gelijkheid op het niveau van types, niet op het niveau van tokens. (Shapiro 2000, 144) Om uitspraken zoals $1 + 1 = 2$ toe te staan, moeten er alsnog rekenkundige regels worden geformaliseerd. Heine's formalistische standpunt stelt dus dat de rekenkunde bestaat uit uitspraken over tokens, waarvan de bewijzen eindige en deductieve rijen aan uitspraken zijn die volgen uit vooraf gestelde regels. Zowel de regels, als de bewijzen zijn inhoudelijk; ze hebben een talige inhoud op het abstracte niveau van de syntactische tokens.

1.2 Frege's kritiek

De bovenstaande formalistische zienswijze deed veel stof opwaaien bij metafysisch geörienteerde filosofen en wiskundigen. Gottlob Frege was de prominentste criticus van het formalisme. Zijn kritiek zullen we puntsgewijs bespreken.

1.2.1 Toepasbaarheid

Frege richt zijn eerste kritiek op het spelformalisme van Thomae. Hij vraagt zich af hoe het mogelijk is dat een formeel spel met arbitraire regels onnoemelijk veel toepassingen kent in alle wetenschapsgebieden. Als rekenkundige uitdrukkingen geen inhoudelijk component hebben en daarmee geen gedachte uitdrukken, dan is het toch absurd dat de rekenkunde zo toepasbaar is? Hoe is mogelijk om iets inhoudsloos toe te passen? Is de wetenschap daarmee ook inhoudsloos? Dit is volgens Frege absoluut niet het geval, omdat er een verschil is tussen het niet-toepasbare schaakspel en de rekenkunde. (Stenlund 2018, 77)

De regels voor het schaakspel zijn, volgens Frege, niet samengesteld om inhoudelijke resultaten af te leiden. In zekere zin zijn de schaakregels arbitrair. Het is immers mogelijk om wat kleine modificaties te doen aan het spel, waar het primaire spelmechanisme niet onder leidt. Als we de schaakanalogie voor de rekenkunde hanteren, dan blijkt de rekenkunde ook arbitrair te zijn. Volgens Frege is dit niet mogelijk. De rekenkunde is te toepasbaar om arbitrair en inhoudsloos te zijn.

Naar aanleiding van de bovenstaande rekenregels stelt Frege dat de rekenkunde niet gebaseerd is op willekeurige regels, maar op regels die een bepaalde gedachte uitdrukken. De axioma's selecteren we om bepaald stellingen af te leiden, die vervolgens worden toegepast in verscheidene vakgebieden. Het selecteren van de axioma's gebeurt volgens Frege op basis van de inhoud van de axioma's, omdat we bepaalde resultaten verwachten. Anders zouden we een rekenkundig systeem kunnen opstellen waarin $3 = 4$ is toegestaan. Dit nieuwe systeem voldoet nog steeds aan de schaak-analogie, maar het strookt niet met onze rekenkundige intuïtie.

1.2.2 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en oneindige rijen

Volgens Frege is het voor Thomae en Heine onmogelijk om het bestaan van oneindige rijen en irrationele getallen te verklaren. Kijken we bijvoorbeeld naar π, dan is het gewenste verwijzingsobject de oneindige decimale expansie: $3.1415\ldots$. Deze verwijzing is niet mogelijk in Heine's filosofie. $3.1415\ldots$ verwijst immers niet naar iets taligs of syntactisch, maar naar iets dat buiten de taal ligt: de volledige oneindige expansie. Het is niet mogelijk om deze in één symbool weer te geven. Frege stelt dat we π begrijpen, omdat we op een inhoudelijk niveau snappen wat er wordt bedoeld met $3.1415\ldots$.

Frege stelt ook dat Thomae's opvattingen het probleem van oneindigheid niet kunnen oplossen. Thomae deelt Heine's standpunt over wiskundige tekens. Ook volgens hem zijn het fysieke objecten, zoals penstroken op een blad of strepen op een krijtbord. Thomae verklaart oneindigheid door te stellen dat het *mogelijk* is om het rijtje $1, 2, 3, \ldots$ af te schrijven. Maar volgens Frege ontstaat hier een tweetal problemen: (i) Thomae's filosofie staat alleen potentiële oneindigheid toe, het is geen actuele oneindigheid. (ii) Er is slechts een eindige hoeveelheid papier en krijtbord. Het is volgens Frege nooit mogelijk om op formalistische wijze, dus door strepen te blijven zetten, een teken voor oneindigheid voor ons te zien. (Weir 2022)

1.2.3 Het spel en de theorie van het spel

Deze kritiek komt naar voren in de volgende passage:

> Let us remember that the theory of the game must be distinguished from the game itself. It is true that the moves of the game are made in accordance with the rules; yet the rules are not objects of the game, but the foundation of the theory of the game. (Frege 1977, 203)

Volgens Frege zien de formalisten een belangrijk onderscheid over het hoofd. Dat is het verschil tussen $0 + 1 = 1$ en $\models (0 + 1 = 1)$. (Weir 2022) De eerste uitspraak gebeurt *in* de rekenkunde, terwijl de tweede uitspraak *over* de rekenkunde gaat. Beide uitspraken zijn onderworpen aan regels, maar het zijn verschillende soorten regels. De regels die in het spel worden toegepast kunnen volgens Frege tot op zekere hoogte arbitrair worden gekozen. Het is bijvoorbeeld mogelijk om een niet-commutatieve rekenkunde op te bouwen. De regels die over uitspraken uit het spel gaan kunnen dan niet meer arbitrair zijn. In het spel $\forall x \forall y[x+y \neq y+x]$ toestaan en $\models \forall x \forall y[x+y = y+x]$ toestaan in de metatheorie is niet mogelijk.

De waarheidswaarden van uitspraken in de metatheorie worden bepaald door de interpretatie van de uitspraak in de theorie. Volgens Frege betekent dit dat de metatheorie altijd over inhoudelijke uitspraken gaat. Om dit te verduidelijken kunnen we Thomae's schaakanalogie hanteren. Een regel uit de metatheorie tonen staat gelijk aan het voordoen van een schaakbeweging zonder enige uitleg. Het uitleggen van de betekenis van een specifieke zet, wat de gewone gang van zaken is bij schaken, zou betekenen dat de tekens betekenisvol zijn en dat kan niet volgens de primitieve formalisten.

In de metatheorie ontstaan er hiernaast meteen uitspraken waardoor we hetzelfde probleem krijgen als in de vorige passage $(\mathbb{N}, <) \models \forall x[0 < x]$ staat namelijk voor $(\mathbb{N}, <) \models (0 < 1), (\mathbb{N}, <) \models (0 < 2), \ldots$ Deze oneindige rij is verre van een concreet teken.

Hoofdstuk 2

Hilberts formalisme

In dit hoofdstuk komen David Hilberts opvattingen over de grondslagen van de wiskunde aan bod. Gedurende zijn hele academische loopbaan heeft hij zich beziggehouden met de filosofie en de grondslagen van de wiskunde. Dit heeft geleid tot een logisch en wiskundig programma, genaamd 'Hilberts programma'. Vele ontwikkelingen op het gebied van de axiomatisering van de propositie- en predikaatlogica, de fundering van de analyse en de bewijstheorie zijn natuurlijke voortvloeisels van dit programma. Wij richten ons slechts op de filosofische fundering van zijn programma om uiteindelijk een oordeel te vellen hierover ten opzichte van Frege's kritieken op het formalisme. Hilberts filosofische werk is te verdelen in twee periodes: (i) vanaf 1899 tot ongeveer 1905. In deze periode ontwikkelde hij zijn eerste ideeën over de axiomatische methode. De kiem van zijn werk op het gebied van de grondslagen was zijn werk getiteld *Grundlagen der Geometrie*. (ii) vanaf 1917.In deze periode bouwt hij voort op zijn vorige periode en op ontwikkelingen die hebben plaatsgevonden in de grondslagen van de wiskunde. Denk hierbij aan Zermelo's bewijs van de welordeningsstelling (1908), diens axiomatisering van de verzamelingenleer (1908) en de publicatie van *Principia Mathematica* van Russell en Whitehead. (Zach 2021) Aangezien Hilberts tweede periode een uitbreiding is van zijn eerste periode, beperk ik mij tot literatuur uit en over deze periode.

2.1 De kernideeën van Hilberts programma

Hilberts technische gedachtegoed is te reduceren tot twee principes: (i) *Axiomatisches Denken* en (ii) *Beweistheorie*. Over of de vraag of wiskunde wel of niet betekenisloos is, in de zin van Thomae en Heine's betekenisloze tekenspel, heeft hij ook geschreven. Zijn opvattingen hierover liggen aan de grondslag van de technische kant van zijn programma. Deze zal ik daarom eerst behandelen.

2.1.1 *Eindigplaatsige* en ideale wiskunde

Het onderscheid tussen eindigplaatsige, *finites* in het Duits, en ideale wiskunde wordt in meerdere artikels door Hilbert verhelderd. In 1926 verscheen het meest verhelderende artikel, getiteld *Über das Unendliche*, hierover. (Zach 2021) Voor we dieper in dit artikel duiken, leggen we het onderscheid in hoofdlijnen uit. De eindigplaatsige wiskunde is het deel waarin er alleen uitspraken worden gedaan die uit een eindig aantal onderdelen bestaan en over een eindig aantal dingen gaan. Volgens Hilbert is dit het bevooroordeelde deel van de wiskunde waarin iedere uitspraak betekenisvol is. De ideale wiskunde is de ontkenning hiervan; het gaat over oneindige constructies die betekenisloos zijn. Hilbert bouwt op naar dit onderscheid vanuit het volgende citaat:

> Kant already taught-and indeed it is part and parcel of his doctrine that mathematics has at its disposal a content secured independently of all logic and hence can never be provided with a foundation by means of logic alone; [...]. Rather, as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, **something must already be given to our faculty of representation (*in der Vorstellung*), certain extralogical concrete objects that are intuitively (*anschaulich*) present as immediate experience prior to all thought.** If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position that I consider requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking, understanding, and communication. **And in mathematics, in particular, what we consider is the concrete signs themselves, whose shape, according to the conception we have adopted, is immediately clear and recognizable.** (Hilbert 1967, 376)

Hilbert hanteert dus als basis een epistemologie die gebaseerd is op Kants leer. Hieruit concludeert hij dat aan de basis van wiskundige kennis concrete tekens staan die ieder subjectief wezen onmiddellijk tot zijn beschikking heeft. In de wiskunde zijn dat tekens van de volgende vorm:

$$|, ||, |||, ||||, |||||, \ldots$$

Het zijn rechte stokjes die ieder een getal representeren: het *Zahlzeichen*. De eigenschappen van deze onmiddellijke tekens zijn waarnemingsgewijs beschikbaar. We zien immers meteen dat $||$ 'meer' is dan $|$ en dat $|||$ meer is dan $||$. Hilbert stelt hierna dat ze op zichzelf geen betekenis hebben, maar dat de waarneming de eigenschappen van ieder individueel stokje bepaalt. Hiermee stemt hij tot op zekere hoogte in met het standpunt dat Thomae en Heine vertolken. Wiskundige tekens op zichzelf zijn betekenisloos, maar in verhouding tot elkaar krijgen ze een rol en daarmee een soort betekenis.

De natuurlijke getallen zijn volgens Hilbert afkortingen voor de onmiddellijke tekens. 2 schrijven we in plaats van $||$, 3 schrijven we in plaats van $|||$, enzovoorts. De hedendaagse rekenkundige relatie- en functietekens fungeren ook als afkortingen. '$+$' is het bij elkaar voegen van de verschillende tekens en '$<$' staat voor het vergelijken van de hoeveelheid stokjes, enzovoorts. (Hilbert 1967, 376) Dit gedeelte van de wiskunde is volgens Hilbert 'inhoudelijk' in de Fregeaanse zin. We kunnen uitspraken als $2+3 < 3+4$ reduceren tot de intuïtief en onmiddellijk begrijpbare stokjes. De uitspraak van boven wordt: $||||| < |||||||$. Dit kunnen we verder uitbreiden tot uitspraken met algemene constanten: $a+b=b+a$ blijft inhoudelijk, voor alle vaste keuzes voor a en b.

Om de grens van de eindige wiskunde te demarceren gebruikt Hilbert een propositie van Euclides:

Zij p een priemgetal, dan bestaat er een priemgetal tussen $p+1$ en $p!+1$

Een dergelijke uitspraak is volgens Hilbert een afkorting voor een langere uitspraak, namelijk:

Zij p een priemgetal, dan is $p+1$ of $p+2$ of $\ldots$ of $p!+1$ een priemgetal

Het bewijs van deze uitspraak of het bewijs van de ontkenning kunnen we opschrijven als een eindige reeks uitspraken, daarmee is het 'eindigplaatsig'. Daarom is het volgens Hilbert onderdeel van de inhoudelijk bevatbare eindige wiskunde. De volgende uitspraak is niet eindigplaatsig:

$$\forall a \in \mathbb{N}[a+1=1+a]$$

Voor het bewijzen van de waar- of onwaarheid van deze uitspraak moeten we gebruik maken van oneindig veel proposities. We moeten namelijk alle elementen van $\mathbb{N}$ nagaan om deze uitspraak te bewijzen. (Hilbert 1967, 378)

Om uitspraken die niet eindigplaatsig zijn een plaats te geven in zijn filosofie wil Hilbert twee standpunten mijden: (i) Frege's opvatting dat een dergelijke uitspraak leeft als een inhoudelijk idee in een soort metafysische sfeer en (ii) het finitisme dat oneindigplaatsige uitspraken uitsluit. Hiervoor introduceert hij de 'ideale wiskunde'.

'Idealiseren' is een essentieel en noodzakelijk onderdeel van de wiskundige gereedschapskist. Volgens Hilbert is het ontstaan van niet-eindigplaatsige wiskunde onvermijdbaar. Hiervoor gebruikt hij $\sqrt{-1}=i$ als voorbeeld. (Hilbert 1967, 379) Het oplossen van polynomen is een eeuwenoud onderdeel van de wiskundige praktijk. Een voorbeeld is $x^2 = a$ met $a > 0$, waarvan de oplossing meetkundig te interpreteren is als een vierkant van $\sqrt{a}$ bij $\sqrt{a}$. Op den duur doen zich echter uitspraken voor die we niet op een dergelijke manier kunnen interpreteren, bijvoorbeeld: $x^2 = -1$. Door het toevoegen van een oplossing van dit polynoom, voegen we een ideaal onderdeel toe aan de theorie van polynomen.

Het ontstaan van uitspraken als $\forall a \forall b \in \mathbb{N}[a + b = b + a]$ is evenzeer een gevolg van een natuurlijke verloop van de wiskundige gang van zaken. Als we het gedachteproces dat begint bij de stokjes voortzetten, belanden we bij de volgende ideale uitspraak:

voor alle natuurlijke getallen a en b geldt: $a + b = b + a$

Het nagaan van de waarheid van deze uitspraak komt neer op het nalopen van deze uitspraak voor alle gehele getallen, wat in onze mensenlevens onmogelijk is. Volgens Hilbert is het daarom een *geïdealiseerde* uitspraak, wiens waarheid we kunnen bevestigen met onze logische vermogens. Het is een waar 'idee' en geen onderdeel van de realiteit.

Ideale uitspraken zijn op zichzelf niet inhoudelijk, maar Hilbert behandelt ze als uitspraken die iets communiceren *over* de eindige wiskunde. Een groot deel van de wiskunde wordt in zekere zin ontwikkeld om het eindigplaatsige deel te verhelderen. $\sqrt{-1} = i$ bijvoorbeeld is een ideale constructie die veelvuldig wordt gebruikt in de complexe analyse. Een vakgebied met talloze resultaten die worden toegepast in de natuurkunde. Hilberts historische reconstructie van de ontwikkeling van de wiskunde klinkt aannemelijk en is historisch gezien tot op zekere hoogte accuraat is. Toch bevatten Hilberts opvattingen over de tweedeling in de wiskunde wat hiaten. Deze komen in het gevolg van deze subsectie aan bod.

Het eerste bezwaar is epistemologisch van aard. Hilbert beschouwt de stokjes $|, ||, |||, \ldots$ als 'concreet', 'onmiddellijk gegeven' en 'intuïtief inhoudelijk'. Wij kunnen ons nu afvragen wat deze begrippen precies betekenen. Hilbert doet hiervoor een beroep op Kantiaanse noties van deze begrippen, maar hierdoor is het onduidelijk wat de epistemologische status is van de stokjes. Hilbert en Bernays stellen dat het mentale constructies noch inktstroken zijn, maar 'formele objecten'. (Zach 2006, 422) Deze typering gaat echter in tegen de eis dat ze concreet moeten zijn, want formele objecten zijn doorgaans 'abstract'.

Dit probleem ontstaat doordat het hedendaagse gebruik van het begrip 'concreet' anders is dan Hilberts gebruik. Hij gebruikte het in de Kantiaanse zin. Dat wil zeggen dat hij de stokjes ofwel zag als *a priori* gegeven zuivere intuïtieve kennis of als empirisch intuïtieve entiteiten. (Zach 2006, 423) Een verdere uitleg van de Kantiaanse kenleer lijkt mij overbodig, gezien Hilbert hier geen uitsluitsel over geeft. Hiermee is dit een hiaat in zijn filosofie, aangezien het probleem nu wordt verschoven naar de epistemologie over Kantiaanse intuïtie.

Het onderscheid tussen ‘eindig’ en ‘ideaal’ is bovendien niet altijd duidelijk zwart-wit. Een voorbeeld is Fermat’s Laatste Stelling. Voor een vaste n is de formulering van deze stelling eindigplaatsig en eenvoudig te begrijpen. Het bewijs ervan berust echter op abstracte ideale technieken. Hierdoor dienen zich de volgende vragen aan: moeten we het bewijs als compleet onafhankelijk van de stelling zien? Of wordt een stelling ook ‘ideaal’ en niet-intuïtief als het bewijs dat ook is? Hilbert geeft hier helaas geen antwoord op.

2.1.2 *Axiomatisches Denken*

Hilberts paper getiteld *Axiomatisches Denken* uit 1917 is het startsein voor de volwassenwording van zijn werk aan de grondslagen van de wiskunde. Dit paper vormt de ideologische kiem van zijn latere, meer technische, werk in de logica en de grondslagen van de wiskunde. (Zach 2021) Dit werk is evenzeer een uitstekende bron om zijn filosofische opvattingen over de axiomatiek uit te leggen. De volgende passage is een samenvatting van zijn denken hierover:

> I should like to sum up in a few sentences my general conception of the essence of the axiomatic method. I believe: anything at all that can be the object of scientific thought becomes dependent on the axiomatic method, and thereby indirectly on mathematics, **as soon as it is ripe for the formation of a theory.** By pushing ahead to ever **deeper layers of axioms** in the sense explained above we also win everdeeper insights into the essence of scientific thought itself, and we become ever more conscious of the unity of our knowledge. In the sign of the axiomatic method, mathematics is summoned to a leading role in science. (Hilbert 2005, 1115)

Hilbert gelooft dat axiomatisering plaatsvindt op het moment dat een bepaalde theorie ‘rijp’ is. Om het idee achter axiomatisering te verduidelijkingen gebruikt Hilbert, net als voor de ideale wiskunde, een soort ‘genealogische methode’. Dat wil zeggen dat hij een theoretische reconstructie maakt van de onstaansgeschiedenis van axiomatische systemen. Het begin van deze geschiedenis beschrijft hij als volgt:

> When we assemble the facts of a definite, more-or-less comprehensive field of knowledge, we soon notice that these facts are capable of being ordered. This ordering always comes about with the help of a certain framework of concepts (*Fachwerk von Begriffen*) in the following way: a concept of this framework corresponds to each individual object of the field of knowledge, and a logical relation between concept corresponds to every fact within the field. (Hilbert 2005, 1112)

Bij een zekere mate van rijpheid kunnen de concepten van een theorie en de logische relaties tussen deze concepten worden geordend op basis van hun onderlinge relatie. In dit raamwerk bevinden zich een aantal feiten dat aan de basis ligt van het geheel. Zonder deze feiten houdt het raamwerk geen stand. Volgens Hilbert zijn dit de axioma's van de theorie. De gewaarwording van de axioma's komt altijd in een later stadium dan de samenstelling van het theoretische raamwerk. (Hilbert 2005, 1108)

Als voorbeeld en bevestiging van Hilberts theoretische historische reconstructie nemen we de geschiedenis van de groepentheorie onder de loep. De eerste bevindingen werden gedaan door te kijken naar wat wij nu 'voorbeelden' van groepen noemen: permutatiegroepen, transformatiegroepen en abelse groepen. (Kleiner 2007, 28) Op den duur ontdekten wiskundigen dat er een onderliggende structuur was die voorafging aan alle voorbeelden en ze met elkaar verbond. Zo ontstonden de eerste formuleringen van de groepsaxioma's. (Kleiner 2007, 32) Uiteindelijk kwam er aan de begin van de twintigste eeuw een consensus over de formulering van de axioma's.

Axiomatisering is volgens deze beschrijving een proces. Het doel van dit proces is het uitdiepen en het begrijpen van de beginselen van een wiskundige theorie. Deze procesmatigheid wijst er ook op dat we de axiomatisering van de theorie niet moeten gaan vereenzelvigen met de theorie, maar we moeten het zien als een soort middel om de theorie te begrijpen. Hiermee is er enerzijds ruimte voor inhoudelijke wiskunde: tijdens het werken aan de theorie en het samenstellen van de axioma's in de metataal. Anderzijds wordt de theorie een formeel object in de vorm van een axiomatische systemen, hierover meer in de volgende paragraaf.

Zodra er een rijtje axioma's voor een gegeven theorie is gevonden, zijn er twee cruciale eigenschappen die na moeten worden gegaan: (i) de *consistentie* en (ii) de *(on)afhankelijkheid* van de axioma's. Consistentie gaat over het leven of de dood van een theorie: in een inconsistente theorie is het namelijk mogelijk om tegenspraken af te leiden. Dit willen we koste wat kost vermijden. Onafhankelijkheid wil zeggen dat we kunnen nagaan of het mogelijk is om een axioma af te leiden uit de andere axioma's. Als we overbodige axioma's vinden, die afleidbaar zijn uit de rest, is het mogelijk om ze weg te laten.

Om (i) en (ii) te verhelderen maak ik gebruik van de hedendaagse logische noties. Voor 'theorie' gebruik ik een algemene structuur $\mathfrak{S}$ en de axioma's beschouw ik als een verzameling gesloten formules Γ. We nemen een formule ψ. Een consistentiebewijs is de afleiding van de volgende afspraak:

$$\text{niet: } \Gamma \vdash (\psi \wedge \neg\psi) \text{ of niet: } \Gamma \vdash \neg(0 = 1)$$

Onafhankelijkheid van een axioma gaan we na door na te gaan dat:

$$\text{niet: } \Gamma \setminus \{\alpha\} \vdash \alpha$$

waarbij α een element is uit Γ.

Hoewel het zekerstellen van consistentie en onafhankelijkheid van de axioma's van primair belang zijn, is er ook een heel domein aan aanverwante zaken dat van belang is om de vitaliteit van een axiomatische theorie na te gaan. Hilbert schrijft hierover:

> When we consider the matter more closely we soon recognize that the question of the consistency of the integers and of sets is not one that stands alone, but that it belongs to a vast domain of difficult epistemological questions which have a specifically mathematical tint: for example (to characterize this domain of questions briefly) the problem of the *solvability in principle of every mathematical question*, the problem of the subsequent *checkability* of the results of a mathematical investigation, the question of a *criterion of simplicity for mathematical proofs*, the question of the relationship between *content and formalism* in mathematics and logic, and finally the problem of the *decidability* of a mathematical question in a finite number of operations. (Hilbert 2005, 1113)

2.1.3 *Beweistheorie*

Ook de ontwikkeling van de bewijstheorie wordt ingeluid door Hilbert in zijn artikel *Axiomatisches Denken*:

> All such questions of principle, which I characterized above and of which the question just discussed that is, the question about decidability in a finite number of operations—was only the last, seem to me to form an important new field of research which remains to be developed. To conquer this field we must, I am persuaded, make the concept of specifically mathematical proof itself into an object of investigation, just as the astronomer considers the movement of his position, the physicist studies the theory of his apparatus, and the philosopher criticizes reason itself. (Hilbert 2005, 115)

Hilbert wil een formele theorie ontwikkelen om wiskundige theorieën, hun axiomatische systemen, daarvan de consistentie en hun andere eigenschappen te analyseren. Dit project ontaardde in de ontwikkeling van de bewijstheorie, waarin bewijzen worden gezien als eindige rijtjes afleidingen. Het uiteindelijke doel van de bewijstheorie is het leveren van een deductief systeem dat een formeel consistentiebewijs van een axiomatisch systeem mogelijk maakt. Hilbert kwam tot deze conclusie door te filosoferen over het onderscheid tussen semantiek en syntax. In een artikel komt hij tot de conclusie dat er geen noodzakelijke relatie bestaat tussen een deductief systeem en de semantische interpretatie daarvan. (Sieg 2009, 323) Hij geeft weliswaar toe dat veel deductieve systemen worden opgesteld met een bepaalde betekenis in gedachte, maar het is ook mogelijk om deductieve systemen op zich te analyseren. Dit kunnen we zien als de kiem van de *metawiskunde* en de bewijstheorie.

Het volgende citaat is een samenvatting van Hilberts bijdrage:

> To Hilbert is due now, first, the emphasis that strict formalization of a theory involves the total abstraction from the meaning, the result being called a *formal system* or *formalism* (or sometimes called a formal theory or formal mathematics); and second, his method of making the formal system as a whole the object of a mathematical study called *metamathematics* or *proof theory*. (Avigad en Reck 2021, 21)

Hilberts vernieuwing op dit gebied was het analyseren van de logica als een soort algebra of als wiskundig gereedschap. De logica werd niet alleen toegepast, hij ontwikkelde een bewijstheorie die het *bewijzen* zelf onder de loep zou nemen. Het uiteindelijke doel was het produceren van zekere consistentiebewijzen voor axiomatische systemen die niet berusten op semantische interpretaties van de symbolen. Zijn bewijstheorie was daarmee een stap naar een versteviging van het meest waardevolle wiskundige denkgereedschap: de logica. (Avigad en Reck 2021, 22)

Na *Axiomatisches Denken* verschenen verscheidene artikels van Hilbert waarin hij pogingen doet tot het ontwikkelen van een deductief systeem. Een gedetailleerd en uitvoerig overzicht van deze ontwikkeling is te vinden in Siegs artikel *Hilbert's Proof Theory*. Wij zullen ons niet focussen over de ontwikkeling, maar over het resultaat: het Frege-Hilbertsysteem. Een axiomatisch systeem voor propositielogica. Dit bewijssysteem bevat één afleidingsregel, de zogenaamde *modus-ponens* regel:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Door middel van deze regel kunnen we redeneren met aannames A en $A \to B$. Verder bevat dit systeem axioma's waarmee we tautologieën kunnen 'afleiden' zonder de bovenstaande regel te gebruiken. Er zijn verschillende equivalente samenstellingen van axioma's die men kan gebruiken. Een voorbeeld is het volgende lijstje uit (Buss 1998, 4).

$$\begin{array}{cc}
A \to (B \to A) & (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A \\
(A \to B) \to (A \to (B \to C)) \to (A \to C) & (\neg\neg A) \to A \\
A \to (A \vee B) & (A \wedge B) \to A \\
B \to (A \vee B) & (A \wedge B) \to B \\
(A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B \to C) & A \to B \to (A \wedge B)
\end{array}$$

Modus-ponens en deze axioma's vormen een volwaardig deductief systeem waarin we alle afleidingen uit de propsitielogica kunnen doen. Een van Hilberts doelen was het aantonen dat dergelijke deductieve systemen voldoen aan eigenschappen als 'volledigheid' en 'gezondheid'. De eerste eigenschap wil zeggen dat iedere uitspraak die waar is in een model, kan worden bewezen vanuit bepaalde aannamen in een axiomatisch deductiesysteem. 'Gezondheid' wil zeggen dat het omgekeerde ook geldt: alle bewijsbare uitspraken zijn waar in een model, wat een 'semantische' eis is. Het bovenstaande

Frege-Hilbertsysteem voldoet aan deze eigenschappen. Op deze manier is er een relatie tussen wat 'waar' is in een gegeven axiomatisch systeem en wat geldig kan worden afgeluit vanuit dit axiomatische systeem met de bovenstaande axioma's. Een consistentiebewijs, zoals Hilbert dat voor zich zag, kan worden bewezen aan de hand van de bovenstaande afleidingsregel en de axioma's.

Hoewel Hilberts beoogde doel– het geven van consistentiebewijzen voor ieder wiskundig systeem – niet werd bereikt, is de bewijstheorie wel uitgegroeid tot een belangrijke tak van de wiskundige logica. Gerhard Gentzen heeft hier een belangrijke bijdrage aan geleverd met zijn *Natuurlijke Deductie*. (Zach 2021) Dit systeem en aanverwante systemen bevatten veel meer afleidingsregels en geen axioma's. Het idee hierachter is dat dit overeenkomt met de 'natuurlijke' manier van redeneren. Anno nu zijn bewijstheoretici onder meer bezig met het analyseren en vergelijken van de uitdrukkingskracht van verscheidene bewijssystemen en het automatiseren van bewijzen door middel van computers. Deze tak van sport zal in het volgende hoofdstuk kort aan bod komen.

2.2 Houdt Frege's kritiek stand?

2.2.1 Toepasbaarheid

Frege bekritiseerde het primitieve formalisme ervan dat het de toepasbaarheid niet kan verklaren. Volgens het formalistische standpunt zijn, volgens Frege, wiskundige systemen arbitrair. Hilbert pareert deze kritiek door de arbitraire component uit de theorie te verwijderen. Zoals we hebben gezien is een axiomatisering geen arbitraire samenstelling van spelregels, maar is het een proces met een gericht verloop waar bepaalde regels uit volgen.

Om dit punt te staven kunnen we wederom naar de axioma's van de groepentheorie kijken. Gezien het feit er door verscheidene wiskundigen werk is verricht om de groepsaxioma's te ontwaren en bondig te formuleren, is het ridicuul om te zeggen dat deze axioma's het gevolg zijn van een arbitraire selectieprocedure. Daarnaast wordt de groepentheorie veelvuldig toegepast in de natuurkunde en scheikunde om symmetrische structuren te onderzoeken. De axiomatisering van de studie van groepen (daarmee de symmetriegroep) is veeleer een bevestiging van de toepasbaarheid, niet een willekeurige idealisering.

2.2.2 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en oneindige rijen

Volgens Frege is het niet mogelijk om oneindigheid te verklaren als je ervan uit gaat dat de wiskunde gaat over eindige concrete tekens. Hiervoor introduceert Hilbert het onderscheid tussen eindigplaatsige en ideale wiskunde.

Volgens hem zijn eindige rijen en oneindige decimale expansies simpelweg ideale wiskundige entiteiten. In zekere zin geeft hij hiermee Frege gelijk: ze zijn inderdaad niet-*echt*. Voor Frege is het verdwijnen van deze 'echtheid' een reden om deze filosofie niet aan te hangen. De wiskunde moet volgens hem gaan over echt-bestaande structuren, anders is het niet mogelijk om het toe te passen op de 'echte' wereld. Hilbert komt niet in de knel, omdat hij een meer instrumentele kijk heeft op de wiskunde. Volgens hem kunnen dergelijke ideale entiteiten kunnen ons helpen met het bewijzen van uitspraken over de echte wereld. Hoewel Hilbert dit ziet als een volwaardige tegenwerping van Frege's standpunt, nemen wij hier geen genoegen mee. De reden hierachter is dat er hiaten in zijn onderscheid tussen de ideale en eindigplaatsige wiskunde zit. Dit zagen we aan het einde van de eerste paragraaf.

2.2.3 Het spel en de theorie van het spel

Deze kritiek is tweeledig: enerzijds beticht Frege de primitieve formalisten ervan dat ze het onderscheid tussen de theorie en de metatheorie niet waarborgen in hun filosofie, anderzijds stelt hij dat er altijd inhoudelijke uitspraken worden gedaan in de metatheorie. Hilbert brengt een zeer duidelijk onderscheid aan tussen het spel en de theorie van het spel. Een voortvloeisel hieruit is zijn bewijstheorie. Daarmee ziet hij het onderscheid tussen de theorie en de metatheorie niet over het hoofd. Het eerste deel van Frege's kritiek gaat hiermee niet op. Het tweede deel van Frege's kritiek gaat niet op voor Hilberts formalisme, aangezien Hilbert de eindigplaatsige bewijstheorie, een onderdeel van de eindigplaatsige wiskunde, als iets inhoudelijks beschouwt.

Hoofdstuk 3

Het vierkleurenprobleem

De Vierkleurenstelling is een interessante casus voor het formalisme. Voor het eerste kloppende bewijs van deze stelling is er namelijk veelvuldig gebruikt gemaakt van een computer. Het formalisme is de filosofie die bij uitstek dit bewijs met open armen moet ontvangen. Wiskunde bestaat volgens deze filosofie uit het bewijzen van stellingen in axiomatische systemen en een goed bewijs is een syntactisch geldig bewijs dat gecontroleerd kan worden in een deductief systeem. Computerbewijzen voldoen aan deze eis. Nadat het bewijs van de Vierkleurenstelling was gepubliceerd, werden er vanuit de filosofie kanttekeningen geplaatst bij de rol van dergelijke bewijzen in de wiskunde. Het belangrijkste artikel, getiteld *The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance* hebben we te danken aan Thomas Tymoczko. In dit hoofdstuk komen het computerbewijs en de kritiek van Tymoczko aan bod. Het idee achter dit hoofdstuk luidt als volgt: als de kanttekeningen en de kritiek van Tymoczko ons ertoe doen leiden dat we computers als ongeldige wiskundige instrumenten beschouwen, dan moeten we het formalisme ofwel laten varen of aanpassen.

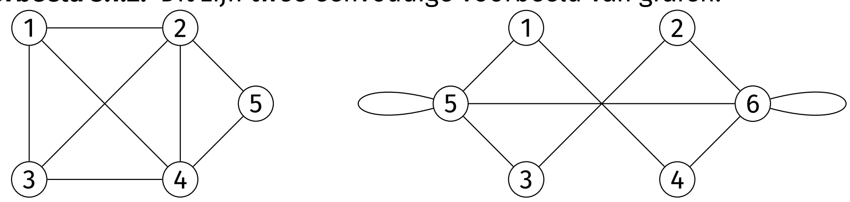
3.1 Grafentheorie

Aangezien de Vierkleurenstelling grafentheoretisch is geformuleerd, zullen we enkele basale begrippen en stellingen uit dit vakgebied presenteren. Deze paragraaf is gebaseerd op (Wilson 2002) en (Schrijver).

3.1.1 Basale definities en stellingen

Aangezien grafen visueel makkkelijk te begrijpen zijn, beginnen we eerst met een voorbeeld, waarna een algemene definitie wordt gegeven.

Voorbeeld 3.1.2. Dit zijn twee eenvoudige voorbeeld van grafen:



Dergelijke structuren kunnen wij formaliseren met de volgende definitie:

Definitie 3.1.3. Een *graaf* G is een paar verzamelingen (V, E) waarbij V een verzameling *punten* en E een verzameling *randen* of *lijnen* is – dat wil zeggen: paren $\{v, \overline{v}\}$ uit V waartussen lijnen lopen.

Opmerking 3.1.4. Voor de grafen in 3.1.2 geldt: $V_1 = \{1,2,3,4,5\}$ en $V_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$. Met de lijnen: $E_1 = \{\{1,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}, \{3,4\},\{4,5\}\}$ en $E_2 = \{\{1,5\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,6\},\{3,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{5,5\}, \{6,6\}\}$.

Definitie 3.1.5. Een lijn *koppelt* twee punten, deze punten noemen we de *eindpunten* van de lijn, die *aangrenzend* worden genoemd. Twee punten waartussen een lijn loopt noemen we *buren*.
Een lijn die een punt aan zichzelf koppelt ($\{v, v\}$) noemen we een *loop*. Twee lijnen die hetzelfde paar aan punten koppelen, $\{v, w\}$ en $\{w, v\}$ noemen we *parallel*.

Definitie 3.1.6. Een *deelgraaf* is een paar, (V', E'), dat bestaat uit $V' \subset V$ en $E' \subset E$. Een *opspannende* deelgraaf bevat alle punten; $V' = V$. De *deelgraaf voortgebracht door* V bevat alle punten uit V en alle randen die de punten koppelen.

Definitie 3.1.7. Een *wandeling* van *lengte n* is een rijtje $(v_1 e_1 v_2 \dots v_n e_n v_{n+1})$ van punten en randen, zodanig dat ieder opvolgend element gekoppeld is aan het voorgaande. Het is een *gesloten wandeling* als $v_1 = v_{n+1}$, anders is het een *open wandeling*. In een *pad* zijn alle punten verschillend.
Een gesloten wandeling heet een *circuit* als $n \geq 3$ en $v_i \neq v_j$ voor alle $i \neq j$.

Definitie 3.1.8. Twee punten *hangen samen* of *zijn samenhangend* als er een wandeling is van de een naar de ander. Een graaf $G = (V, E)$ is samenhangend als er tussen elk tweetal punten een wandeling is.

In het volgende lemma gaan we na dat *samenhang* een equivalentierelatie is.

Lemma 3.1.9. *Zij u, v en w punten in een graaf, dan:*

1. *u hangt samen met u;*
2. *als u samenhangt met v, dan hangt v samen met u;*
3. *als u samenhangt met v en v met w, dan hangen u en w ook samen.*

Bewijs. 1. u is een wandeling van u naar u;

2. Stel dat $(ue_1w_1 \dots e_nv)$, dan is $(ve_n \dots w_1e_1u)$ een wandeling van v naar u;

3. Stel dat er een wandeling $(ue_1w_1 \dots e_nv)$ bestaat en dat $(vd_1s_1 \dots d_mw)$. Voeg beide wandelingen samen, $(ue_1w_1 \dots e_nvd_1s_1 \dots d_mw)$ om een wandeling van u naar w te maken.

□

We zullen zien dat we met het bovenstaande lemma 3.1.8 kunnen preciseren.

Definitie 3.1.10. De deelgraaf die wordt geïnduceerd door een samenhangs-equivalentieklasse $[u]$ van G, noemen we het *component* van de graaf. Dat wil zeggen dat het de maximale niet-lege samenhangende deelgraaf van G is.
G is samenhangend als er hoogstens één samenhangs-equivalentieklasse bestaat.

Definitie 3.1.11. Een graaf is *volledig* als ieder punt een buur van alle andere punten is.
Een graaf is *bipartiet* als alle $v \in V$ kunnen worden verdeeld in twee verzamelingen X en Y zodanig dat alle lijnen een element uit X koppelen aan een element uit Y. Ofwel: de punten in X zijn alleen verbonden aan een punt uit Y.
Een graaf is *volledig bipartiet* als hij volledig en bipartiet is. Ofwel: ieder punt uit X is verbonden aan alle punten in Y.
De volledige graaf met n punten noemen we K_n en de volledig bipartiete graaf waarvoor geldt dat $|X| = n, |Y| = m$ noemen we $K_{n,m}$.

Definitie 3.1.12. Twee grafen V en W zijn isomorf als er een bijectie $f\colon V \to W$ bestaat zodanig dat:

$$u \text{ en } v \text{ zijn verbonden in } V \Leftrightarrow f(u) \text{ en } f(v) \text{ zijn verbonden in } W$$

Een graaf noemen we *vlak* als het te tekenen is zonder dat twee randen elkaar kruisen.
Een graaf G noemen we *planair* als hij isomorf is aan een vlakke graaf.
Merk op: in sommige literatuur wordt de definitie van planair achterwege gelaten. Wat wij 'vlakke grafen' noemen, worden dan 'planaire grafen' genoemd.

Definitie 3.1.13. Een *Euler-cykel* is een gesloten wandeling $(v_0e_0v_1e_1 \dots v_n)$ met de eis dat voor elke lijn $e_i \in E$ ($i \leq n-1$) geldt dat er een unieke $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ bestaat zodanig dat $e_i = \{v_{j-1}, v_j\}$.
Dat wil zeggen dat elke lijn hoogstens één keer wordt doorlopen tijdens de wandeling.

Opmerking 3.1.14. De bovenstaande definitie hebben we te danken aan Leonhard Euler. Hij heeft in een artikel over de zeven bruggen in Königsberg (nu:

Kaliningrad) de basis gelegd voor de grafentheorie. In dit artikel onderzoekt hij of het mogelijk is om een wandeling te maken door Königsberg, gedurende deze wandeling de zeven bruggen hoogstens één keer over te steken en terug te lopen naar het beginpunt. Hij zocht dus naar een Euler-cykel met als punten de gebieden aan de weerszijden van alle bruggen. Het antwoord bleek negatief.

Stelling 3.1.15 (Eulers stelling)**.** *Een graaf bevat een Euler-cykel dan en slechts dan als de graaf samenhangend en de graad van ieder punt even is.*

Bewijs. $\Rightarrow$: Stel dat $G = (V, E)$ een Euler-graaf is. Zij $C = (v_0 e_0 v_1 \dots v_n)$ de Euler-cykel.
Samenhangend: Neem $v, v' \in V$. Omdat we de geïsoleerde punten hebben uitgesloten, zijn er lijnen $e, e' \in E$ waarvoor geldt dat: $v \in e$ en $v' \in e'$.
Merk op: de Euler-cykel C doorloopt v en v'. We hoeven nu alleen de i en j te vinden waarvoor geldt: $v_i = v$ en $v_j = v'$. We hebben nu de gezochte wandeling gevonden: $(v_i, \dots, v_j)$ is de wandeling van v naar v' tussen twee willekeurige punten. Daarmee is de graaf samenhangend. Even graad: Neem $u \in V$.
Bij het bewandelen van C lopen we nooit terug en het is een gesloten wandeling is. Bij punt u geldt dus: als we van een buur afkomen, dan moeten we naar een andere buur toe.
u staat dus in verbinding met $2\dot{k}$ buren, waarbij k gelijk staat aan het aantal keer dat we u bezoeken.
$\Leftarrow$: Stel dat G een samenhangende graaf is en stel dat de graad van ieder punt even is.
Bekijk de langst mogelijke wandeling waarin elke lijn hoogstens één keer voorkomt: $W = (v_1 e_1 v_2 \dots v_n e_n v_{n+1})$.
Stel dat W geen gesloten wandeling is.
$v_{n+1} \neq v_1$ en de graad van v_{n+1} is 2. Tot dusver is de enige buur van v_{n+1} v_n. Kennelijk zijn we een lijn en een buur vergeten toe te voegen. Dan geldt: $W' = (v_1 e_1 v_2 \dots v_n e_n v_{n+1} e_{n+1} v_{n+2})$ Maar dan is W' langer dan W. Tegenspraak. W is dus een gesloten wandeling.
Stel dat G geen Euler-cykel bevat.
Dan zijn er dus lijnen die niet door W worden doorlopen. Bepaal een zo'n lijn en noem hem l.
G is samenhangend, dus er is een pad $P = (p_1 l p_2 \dots p_n)$ met p_i de punten en l_i de lijnen. We merken op dat een p_i in W moet voorkomen, vanwege samenhang. Kort P in zodat p_i het laatste punt is. Kort P zodanig in dat de lijnen van P niet in W voorkomen.
p_i komt voor in W, bepaal dan de j zodat $v_j = p_i$. Dan:

$$W' = (p_0, p_1, \dots, v_j, \dots, v_n, v_2, \dots, v_j)$$

Elke lijn komt hier hoogstens eenmaal in voor. W' is dus langer dan W. Tegenspraak.

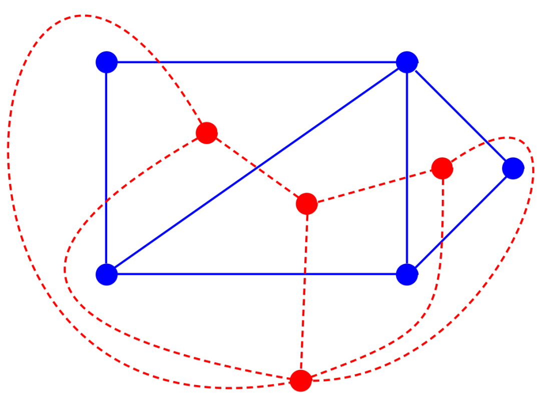
G is een Euler-graaf. □

We eindigen met wat definities die nuttig zijn voor het kleuren van landkaarten.

Definitie 3.1.16. M, een *kaart*, bestaat uit $G(M)$ de onderliggende planaire graaf en een *inbedding*, een tekening waarin de randen elkaar niet kruisen.
Een *overbrugging* is een lijn van $G(M)$ wiens verwijdering ervoor zorgt dat $G(M)$ onsamenhangend wordt.
Een *standaardkaart* is een kaart zonder overbruggingen en waarvoor geldt dat alle punten minstens graad 3 hebben. Vanaf nu nemen we aan dat als we het hebben over 'kaarten' we 'standaardkaarten' bedoelen. Intuïtief kunnen we hierbij denken aan een politieke landkaart zonder enclaves en exclaves.

Nu richten we ons op een uitleg van een *duale graaf* $D(G)$ van een graaf G. Dit kan vrij makkelijk aan de hand van politieke kaarten en hoofdsteden. Een politieke kaart bevat landen die aan elkaar grenzen, in plaats van de landen kunnen we ook naar de hoofdsteden van de landen kijken en deze koppelen aan de hoofdstad van de aangrenzende landen. Zo krijgen we een graaf waar de punten de hoofdsteden zijn en de lijnen de weg tussen de hoofdsteden. Dit is de intuïtie achter een duale graaf. In plaats van 'land' nemen we facetten van de graaf. In ieder facet zetten we een punt dat we verbinden aan punten in aangrenzende facetten, zo construeert men de duale graaf.

Voorbeeld 3.1.17. De rode graaf hieronder is de duale graaf van de blauw graaf:



Propositie 3.1.18. *Zij M een kaart met v punten, e lijnen en f vlakken. De duale kaart $D(M)$ heeft dan f punten, e lijnen en v vlakken.*

Bewijs. Zet in ieder vlak van M een punt, $D(M)$ heeft nu f punten.
Verbindt nu alle punten met elkaar. Ieder punt van M is nu omringd door een vlak, daarmee hebben we v vlakken.
Dat er e lijnen zijn volgt uit de formule van Euler, die we in het volgende onderdeel zullen bewijzen. □

3.1.19 De formule van Euler

In dit onderdeel nemen we de formule van Euler onder de loep. Hiertoe bewijzen we eerst een lemma:

Lemma 3.1.20. *Zij G een graaf met minstens één lijn en geen punten van graad 1, dan bevat G een circuit.*

Bewijs. Merk op dat een circuit een gesloten wandeling tussen meer dan 3 verschillende punten is, waarbij ieder punt hoogstens eenmaal wordt gepasseerd.
Zij $e_1 = v_1v_2$ een lijn. v_2 heeft graad ≥ 2. Als e_1 een loop is, dan zijn we meteen klaar. Neem dus aan dat er een $e_2 = v_2v_3$ bestaat en dat er geen loops zijn. Zet dit proces voort en dan krijgen we:

$$v_1e_1v_2 \dots e_{i-1}v_i$$

Omdat G eindig is, moet dit proces ophouden. Neem aan dat het ophoudt bij v_{i+1}. Omdat v_{i+1} graad ≥ 2 heeft en geen loop is, moeten we het koppelen aan een v_j $j \leq i$. Dit vormt een circuit tussen v_{i+1} en v_j. □

Stelling 3.1.21 (De formule van Euler)**.** *Zij G een samenhangende planaire graaf, met v punten, f vlakken en q lijnen, dan geldt: $v - e + f = 2$*

Bewijs. We doen inductie naar $v + e$.
Stel dat $v + e = 1$. Dit is een vlak met een punt erin. Dan geldt: $f = 1$. Dus $v + 1 = 2 + e \Leftrightarrow v + 1 = 2 + (v - 1)$.
Stel dat de uitspraak geldt voor $(v - 1) + (e - 1)$.
Stel dat G geen circuits bevat, dan is G een boom. Halen we een punt v weg en de bijbehorende lijn e ook, dan houden we $v-1$ punten over en $e-1$ lijnen. We mogen aannemen dat f gelijk blijft. Dan komen we via de inductiehypothese uit op:

$$(v - 1) - (e - 1) + f = 2 \Leftrightarrow v - e + f = 2$$

Stel dat G wel circuits bevat. Bepaal een lijn $e_1 = v_1v_2$. Verwijder deze uit G. Omdat G planair is, blijft G samenhangend onder deze verwijdering.
Merk op: het aantal vlakken staat gelijk aan $f-1$, het aantal lijnen aan $e-1$ en het aantal punten blijft gelijk. Dan volgt wederom via de inductiehypothese:

$$v - (e - 1) + (f - 1) = 2 \Leftrightarrow (v - 1) - (e - 1) + f = 2 \Leftrightarrow v - e + f = 2$$

□

De rest van deze sectie is het oplossen van telproblemen om uiteindelijk Kempe's eerste poging tot het bewijzen van de vierkleurenstelling te begrijpen. Er geldt in het vervolg dat v het aantal punten is van G, f het aantal vlakken en e het aantal lijnen, tenzij anders is aangegeven.

Het eerste lemma dat we bewijzen is het 'handenschud-lemma'. De intuïtie hieracher is: als er een aantal mensen is dat elkaars handen schud, dan is het totaal aantal geschudde handen altijd een even getal.

Lemma 3.1.22 (Handenschud-lemma)**.** *Zij $i \in \mathbb{N}$ en v_i het aantal punten van graad i. Dan geldt:*

$$\sum_{i \geq 1} iv_i = 2e$$

Bewijs. Halveer iedere lijn. Nu hebben we $2e$ halve lijnen. Iedere halve lijn is nu gekoppeld aan een punt v. Het totaal aantal halve lijnen dat gekoppeld is aan zo'n punt v is gelijk aan de graad i van dat punt. Het aantal halve lijnen $2e$ is daarmee gelijk aan de som van de graad van de punten, met iv_i bepalen we het aantal halve lijnen gekoppeld aan een punt van graad i. Door middel van $\sum_{i \geq 1} iv_i = 2e$ hebben we alle halve lijnen. $\square$

Er bestaat ook een duale versie van dit lemma.

Lemma 3.1.23. *Zij G een planaire graaf en f_i het aantal vlakken met i kanten. Dan geldt:*

$$\sum_{i \geq 1} if_i = 2e$$

Bewijs. Vervang in het vorige resultaat v door f. Dit kan vanwege propositie 3.1.18. $\square$

Het volgende resultaat kan soms gebruikt worden om aan te tonen dat een graaf niet planair is.

Stelling 3.1.24. *Zij G een planaire graaf met minstens drie punten. Dan geldt:*

$$e \leq 3v - 6$$

Bewijs. De graaf kan getekend worden in het vlak en is samehangend. Transformeer G zodanig dat hij een circuit bevat, dit kan omdat $v \geq 3$. G heeft minstens twee facetten, dus drie zijden per facet. Dus: $3f \leq 2e$. Via Euler volgt

$$6 = 3f - 3e + 3v \leq 3v - q \Leftrightarrow q \leq 3v - 6$$

$\square$

3.2 Kaartkleuringen en Kempe's bewijs

Er zijn twee gebruikelijke manieren om naar kaartkleuringen te kijken. De meest voor de hand liggende opvatting is dat we een planaire graaf G kunnen inkleuren door aan ieder facet een kleur toe te kennen. Dit noemen we de *facettenkleuring*. De kleuring van G kan ook worden gedaan door de duale graaf $D(G)$ onder de loep te nemen. Herinner dat een duale graaf wordt geconstrueerd door een punt in het midden van ieder facet van G te zetten en deze punten met lijnen te verbinden. De hele kaart kleuren we door ieder punt een kleur te geven. Dit heet de *puntkleuring*.

De bewijzen in deze en de volgende paragraaf zijn afkomstig uit (Wilson 2002) en (Wilson 2014). De illustraties komen uit (Wilson 2014).

We beginnen met een belangrijk lemma:

Lemma 3.2.1. *Zij G een (samenhangende) planaire graaf met punten die allemaal graad ≥ 3 hebben, dan geldt: er is een facet met hoogstens vijf zijden.*

Bewijs. Stel dat er geen facet is met vijf zijden.
Dan hebben alle facetten meer dan zes zijden. Uit het handenschud-lemma volgt: $2e \geq 3v$ en $2e \geq 6f$. Vul in in de formule van Euler en: $2 = v - e + f \leq \frac{2}{3}e - e + \frac{1}{3}e = 0$. Dus $2 \leq 0$. Tegenspraak. □

Dit lemma vertelt ons dat een kaart M altijd een land met vijf of minder aangrenzende landen bevat. Dat wil zeggen dat iedere kaart een twee-, drie-, vier- of vijfhoekig land bevat. Dit resultaat vormt een essentieel onderdeel van Kempe's eerste bewijs van de vierkleurenstelling. Het idee van dit bewijs is dat we aannemen dat er een kaart bestaat die *niet* vierkleurbaar is. Er bestaat dus een tegenvoorbeeld. Als er een tegenvoorbeeld bestaat, dan is er ook een *minimaal tegenvoorbeeld*. Dat is een niet-vierkleurbare kaart die bestaat uit n landen, die vierkleurbaar is als we een land weghalen. Ofwel: de configuratie van deze kaart is vierkleurbaar voor $n - 1$ landen. Minimaliteit wil dus zeggen dat het de *kleinst mogelijke* niet-vierkleurbare kaart is.

Nu bewijzen we een stelling die ons zal helpen bij Kempe's bewijs van het vierkleurenprobleem.

Stelling 3.2.2. *Als de vierkleurenstelling geldt voor kaarten zodanig dat iedere punt v graad 3 heeft, dan geldt het voor alle kaarten.*

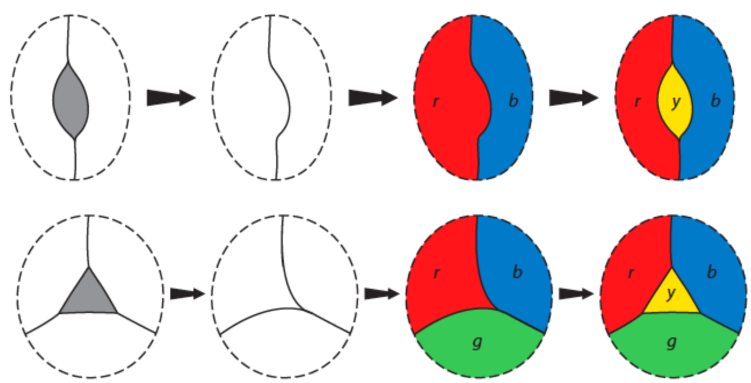
Bewijs. Neem een kaart M. Neem een punt v met graad $g > 3$. Zet op de plek van v een klein landje, de g hoekpunten van dit land laten we graad 3 hebben: ieder hoekpunt verbinden we (i) met een lijn die v raakt, met (ii) het hoekpunt aan de rechterkant en (iii) het linkerhoekpunt. Dit doen we voor de g hoekpunten. Deze kaart is vierkleurbaar per aanname. Verwijder alle kleine landjes en het geldt ook voor M. □

Ook deze stelling gebruikte Kempe voor zijn bewijs. Het idee achter het bewijzen van de vierkleurenstelling is vrij simpel en visueel makkelijk te begrijpen. Het enige wat we hoeven te bewijzen, is dat een minimaal tegenvoorbeeld *niet* kan bestaan. Dan krijgen we een tegenspraak met de aanname dat er een tegenvoorbeeld bestaat. Aangezien Kempe's bewijs uit een aantal gevallen bestaat, delen we de stelling op in lemma's. In ieder lemma behandelen we een deel van de gevallen.

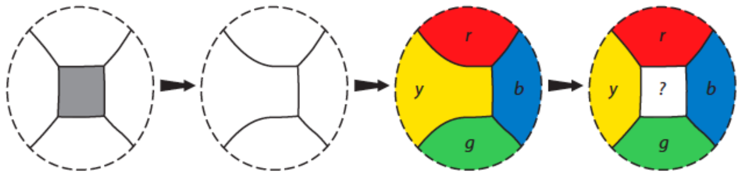
Lemma 3.2.3 (Eerste deel van Kempe's bewijs)**.** *Iedere kaart kan met vier kleuren worden ingekleurd.*

Bewijs. We kunnen ons vanwege stelling 3.2.2 veperken tot kaarten waarin ieder punt graad 3 heeft. We werken toe naar een tegenspraak, vanuit de aanname dat er een niet-vierkleurbare kaart bestaat. Er volgt hieruit dat er een minimale niet-vierkleurbare kaart bestaat; ofwel: er is een minimaal tegenvoorbeeld.
Uit een voorgaand lemma weten we eveneens dat iedere kaart, waarin alle punten graad ≥ 3 hebben, een facet bevat met hoogstens vijf zijden. Dat wil zeggen dat ook ons minimaal tegenvoorbeeld een twee-, drie-, vier- of vijfhoek bevat. Dit brengt ons op een gevalsonderscheid:
Gevallen 1 en 2: Stel het minimale tegenvoorbeeld bevat een twee- of driehoek. Haal de twee- of driehoek weg en kleur de rest van de kaart in met vier kleuren. Dit is mogelijk vanwege minimaliteit. Zet de twee- of driehoek. De tweehoek heeft twee buurlanden en de driehoek heeft er drie. Geef het teruggeplakte land een andere kleur dan hun buren. Hiermee is de hele kaart vierkleurbaar.
Geval 3: Stel dat de kaart een vierkant bevat. Gebruik dezelfde strategie als bij de vorige gevallen. We stuiten hier op een probleem. Aangezien een vierkant altijd vier buren heeft, blijft er geen kleur 'over' die we het teruggeplakte land kunnen geven. Om dit probleem op te lossen, introduceren we wat nieuwe terminologie. □

Het bovenstaande bewijs van gevallen 1 en 2 kunnen we mooi visueel weergeven:



Wat er fout gaat bij het vierkant is ook goed te visualiseren:



Om dit probleem op te lossen beginnen we met een informele definitie: zij $G = (V, E)$ een graaf en K de verzameling kleuren voor de puntkleuring, met minstens twee verschillende kleuren. In dit geval bevat K minstens rood en blauw. Zij $f : V \to K$ de kleuringsfunctie.
Als v een rood punt is, dan definiëren we de rood-blauwe-*Kempe-keten van G die v bevat* als de grootst mogelijke verzameling gekoppelde punten, $ve_1v_1 \dots v_n$ die allen rood of blauw zijn. Een Kempeketen is daarmee een keten aan landen (punten in de puntkleuring van een graaf) die alterneren tussen twee kleuren.

De volgende formele definitie zet het bovenstaande om in een compactere puntkleuringsdefinitie:

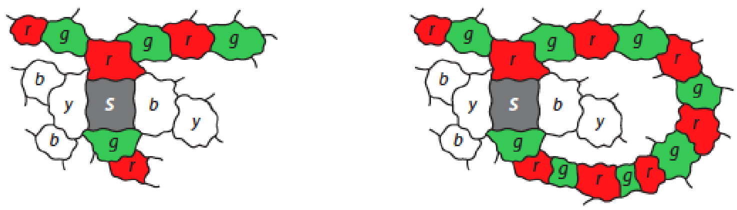
Definitie 3.2.4. Zij G een planaire graaf en K een kleuring van G. Een *Kempe-keten* is de maximale samenhangende deelgraaf S van G, zodanig dat S alleen punten van twee kleuren bevat.

We bewijzen het derde geval van Kempe's bewijs, het geval met het vierkant, als een lemma. Het vierde geval, met de vijfhoek, zullen we evenzeer als een lemma bewijzen.

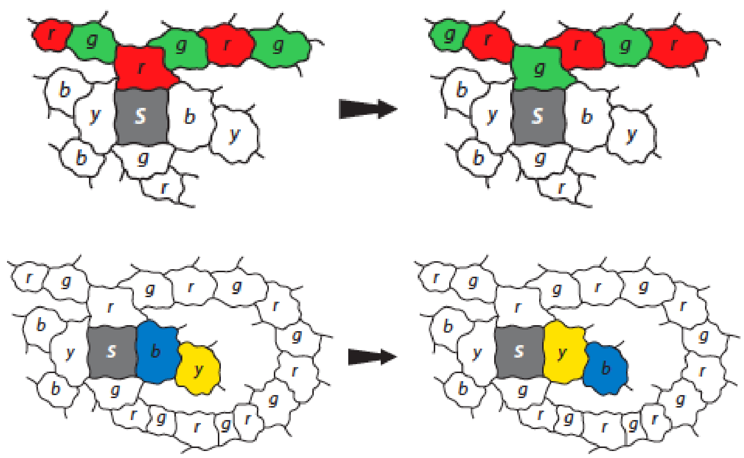
Lemma 3.2.5 (Vervolg Kempe's bewijs)**.** *Zij M een vierkleurbare kaart. Zij v een punt van graad 4, ofwel v is een vierkant, dan is M vierkleurbaar en hebben we hoogstens drie kleuren nodig om alle buren van v te kleuren.*

Bewijs. Stel we gebruiken de kleuren rood, groen, blauw en geel om de landen rondom v, het vierlandenpunt, te kleuren. De kleuren rood en blauw liggen tegenover elkaar en de kleuren groen en geel ook.
Geval (i) Stel dat het rode en het blauwe land niet tot dezelfde rood-blauwe keten behoren. Dat wil zeggen dat de overliggende rode en blauwe landen niet met elkaar verbonden zijn in een lus aan landen. Kleur het blauwe land dan in met rood; verwissel de kleuren van de keten waar dit land in zit. Dan hebben we het vierlandenpunt gekleurd met rood, blauw en geel. De rest van de kaart is door de verwisseling nog steeds met vier kleuren gekleurd.
Geval (ii) Stel dat ze wel tot dezelfde rood-blauwe keten behoren. De overliggende landen zijn met elkaar verbonden. Het gele en het groene land worden dan gescheiden van elkaar door deze rood-blauwe keten. Het gele en groene land bevinden zich dus in andere ketens. Kleur de gele keten in met groen en verwissel ditmaal alle kleuren van de keten waar het gele land in zit.
Dit zijn alle mogelijke relevante ketens, hiermee zijn we klaar. □

Ook dit bewijs kunnen we eenvoudig visualiseren:



Links zien we geval 1 en rechts geval 2. De oplossingen hiervoor zijn respectievelijk:



Het bovenstaande lemma is gebaseerd op Kempe's bewijs. De moderne puntkleuringsvariant kunnen we beschrijven door 'lokaal' naar de duale graaf te kijken van het minimale tegenvoorbeeld. Bij dit lemma hebben we de 'inductiestap' al genomen - we hebben het de punt die op het 'vierkant' staat al weggehaald. De graaf is vanwege minimaliteit vierkleurbaar.

Lemma 3.2.6. *Zij G een vier-puntkleurbare planaire graaf. Zij r, b, g en y de punten in ieder facet van G in cyclische volgorde. r, b, g en y kunnen we dan met drie kleuren inkleuren.*

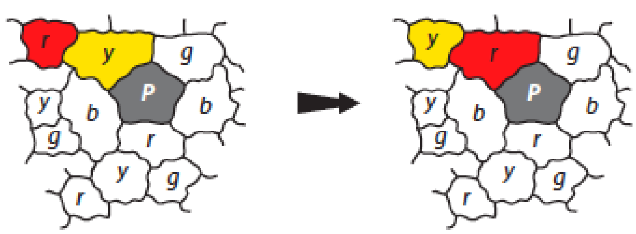
Bewijs. Het bewijs berust op het idee dat het niet mogelijk is om zowel een $(r-g)$-Kempeketen als een $(b-y)$-Kempeketen te hebben. Hiermee bedoelen we dat er een keten is van r naar g en een van y naar b. In de plaatjes boven zijn dit de ketens die een 'lus' maken. Nogmaals: we beweren dat het niet mogelijk is om zowel een $(r-g)$-Kempeketen als een $(b-y)$-Kempeketen te hebben.
Als er wel twee van zulke ketens zijn, dan moeten ze elkaar kruisen op een

punt. De $(r-g)$-Kempeketen omringt immers b of y. Maar als ze elkaar kruisen, dan zitten ze in dezelfde Kempeketen en dat is natuurlijk niet mogelijk. Dus er is hoogstens één $(r-g)$- of één $(b-y)$-Kempeketen.
De twee punten waarvoor geldt dat ze niet in een Kempeketen zitten, kunnen we dezelfde kleur geven. Dan zijn de punten met drie kleuren ingekleurd. Het punt dat we eruit hebben gehaald kunnen we terugzetten en inkleuren met de vierde kleur. $\square$

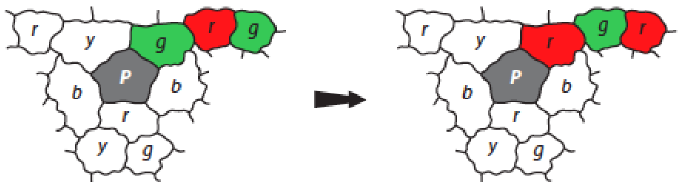
Het bovenstaande moderne bewijs bevat veel van de ideeën die we al zagen in het oorspronkelijke bewijs van Kempe. Inhoudelijk hebben we wellicht niet veel nieuws geleerd, maar we hebben wel gezien dat het mogelijk is om te redeneren over kaarten en kaartkleuringen in termen van punten en grafen. Aangezien de grafentheorie goed te formaliseren is in computers en kaartkleuringen te vertalen zijn naar puntkleuringen van planaire grafen, is dit een belangrijke vertaalstap naar het computerbewijs. Voor we naar het computerbewijs gaan, kijken we naar het laatste en foutieve onderdeel van Kempe's bewijs.

Fout lemma 3.2.7 (Laatste deel Kempe's bewijs). *Zij M een vierkleurbare kaart. Zij v een punt van graad 5 ofwel v is een vijfhoek, dan hebben we hoogstens vier kleuren nodig om alle buurlanden van v te kleuren.*

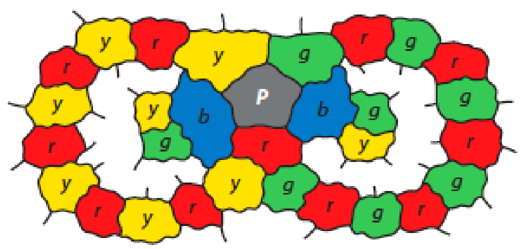
Fout bewijs. Stel voor het gemak dat de landen in de volgende volgorde zijn gekleurd: rood-blauw-geel-groen-blauw. Dit korten we af met $r-b-y-g-b$. We maken weer een gevalsonderscheid op basis van de Kempeketens.
Geval 1. Stel dat er geen Kempeketen tussen r en y is. Dan kunnen we de kleur van een van de twee punten aanpassen naar de andere kleur, zodat we drie kleuren overhouden. Hetzelfde geldt voor het geval dat er geen Kempeketen tussen r en g is. Dan kunnen we de kleur van een van de twee veranderen, zodat er drie kleuren overblijven.



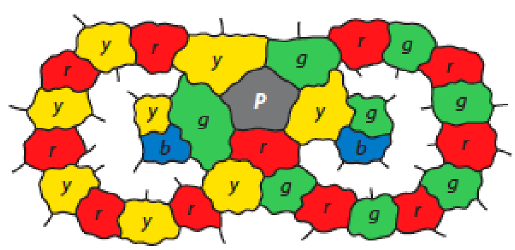
Geval 2. Stel dat er wel een Kempeketen tussen r en y is. Als er geen Kempeketen is tussen r en g, dan kunnen we weer een van de kleuren vervangen. Net als in geval 1.



<u>Geval 3.</u> Stel dat er een Kempeketen tussen r en y is en dat er een Kempeketen tussen r en g is. Deze Kempeketens sluiten allebei een blauw land in. Dat ziet er zo uit:



Kleur het blauwe land dat wordt ingesloten door r en y in met groen. Aangrenzende landen die eerst groen waren gekleurd kunnen we nu blauw kleuren. Kleur het andere blauwe land, dat wordt ingesloten door de $(r-g)$-Kempeketen in met geel. Aangrenzende landen die eerst geel waren gekleurd, kleuren we blauw. Dan krijgen we de volgende kleuring:



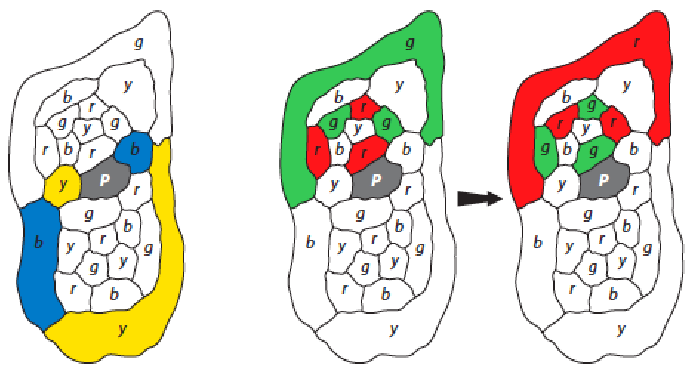
$\square$

Stelling 3.2.8 (Vierkleurenstelling)**.** *Iedere kaart kan met vier kleuren worden ingekleurd.*

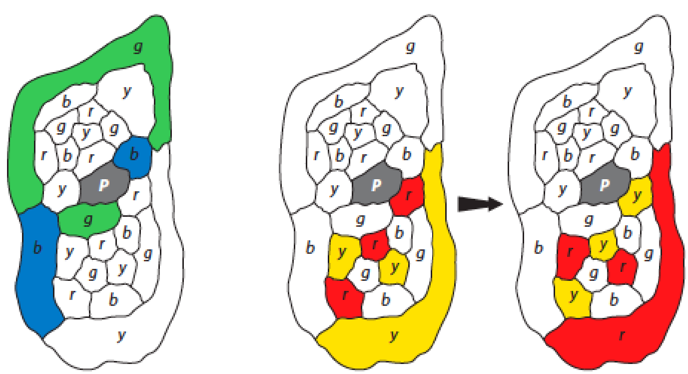
Fout bewijs. Stel dat er een minimaal tegenvoorbeeld bestaat. Uit lemma's 3.2.3, 3.2.5 en 3.2.7 volgt dat we ieder minimaal tegenvoorbeeld kunnen herkleuren zodanig dat de volledige kaart vierkleurbaar is. Dit leidt tot een tegenspraak met de aanname. Er is geen minimaal tegenvoorbeeld en daarmee is iedere kaart wel vierkleurbaar. □

De bovenstaande bewijzen zijn foutief omdat Kempe's constructie niet werkt in het geval dat er een land met vijf buren is. De schoen wringt bij het derde geval, met twee Kempeketens. Dit leidt tot moeilijkheden. De strategie die we hier toepassen - het kleuren van landen die worden omringd door twee Kempeketens - heeft niet altijd een vierkleurbare kaart als resultaat. Percy John Heawood heeft dit aangetoond aan de hand van een tegenvoorbeeld:

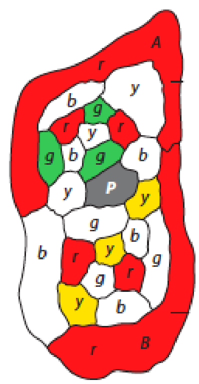
Voorbeeld 3.2.9 (Heawood's tegenvorbeeld). We bevinden ons voor dit tegenvoorbeeld in het scenario waarbij er een vijfhoekig land is. De landen zijn met de volgende kleuren op deze volgorde gekleurd: rood-blauw-rood-geel-groen. Er zijn twee Kempeketens: eén blauw-gele keten die een rood land omringt en een blauw-groene die het andere rode land omringt. We wisselen eerst de kleuren van het eerste rode land:



Dan wisselen we de kleuren van het andere rode land:



Uiteindelijk houden we deze kaart over:



Een kaart met aangrenzende landen die dezelfde kleur hebben.

Tot dusver hebben we gezien dat Kempe's bewijs onvoldoende is gebleken om het vierkleurenprobleem op te lossen. De technieken die hij hierboven toepast zijn echter geenszins onvruchtbaar. Andere wiskundigen zijn namelijk aan de haal gegaan met zijn ideeën over minimale tegenvoorbeelden en het verwijderen van landen - het zogeheten *reduceren*. Er is aangetoond dat er eigenschappen bestaan van minimale tegenvoorbeelden die ervoor zorgen dat het bestaan van een minimaal tegenvoorbeeld leidt tot een contradictie. De ideeën die hierachter schuilgaan bespreken we in het volgende onderdeel.

3.3 Het computerbewijs

Het verhaal van het Vierkleurenprobleem eindigt niet bij Heawood's tegenvoorbeeld en Kempe's foutieve bewijs. Zoals we al hebben opgemerkt bereikt Kempe niet zijn beoogde doel, maar hij ontwikkelt wel geldige en waardevolle ideeën. Na het voortborduren op deze ideeën komt er een onorthodox bewijs van de Vierkleurenstelling in 1974 van Wolfgang Haken en Kenneth Appel. Wat dit bewijs onorthodox maakt is het uitvoerige gebruik van computers. Een groot onderdeel van het bewijs van Appel en Haken is het langsgaan van allerlei gevallen. Voor een mens zijn er te veel gevalsonderscheiden om langs te lopen in één leven, maar de computer kostte het 1200 uur. (Appel en Haken 1977, 117)

In de rest van deze paragraaf zullen we het idee achter het computerbewijs proberen te begrijpen. Dit doen we niet vanuit het oogpunt technische kennis op te doen van formele bewijzen, maar om filosofisch te kunnen reflecteren op het gebruik van computers in de wiskunde. We zullen Appel en Haken's oorspronkelijke bewijs eerst bekijken, waarna we kort ingaan op twee latere computerbewijzen van de Vierkleurenstelling. We beginnen eerst met een opmerking over Kempe's bewijs van Appel en Haken. Volgens hen is het oorspronkelijke bewijs een poging tot het vinden van een *onvermijdbare* verzameling *reduceerbare configuraties*. (Appel en Haken 1977, 111) Het computerbewijs kan precies op deze manier beschreven worden. Daarom nemen we de volgende kernconcepten onder de loep: *onvermijdbaarheid* en *reduceerbaarheid*.

De twee kernconcepten worden pas relevant als we de ontkenning van de Vierkleurenstelling aannemen. Net als Kempe, werken Appel en Haken toe naar een tegenspraak vanuit de aanname dat er een minimaal tegenvoorbeeld bestaat. Pas nadat dit is aangenomen kunnen we onze zoektocht naar de onvermijdbare verzameling beginnen. De *onvermijdbare verzameling configuraties* begrijpen we het makkelijkst als we naar Kempe's bewijs kijken. Hij gebruikt de Eulerformule om tot de conclusie te komen dat iedere kaart een land bevat met hoogstens vijf buurlanden. De volgende verzameling $\{$tweehoek, driehoek, vierkant, vijfhoek$\}$ is daarmee *onvermijdbaar*. Ieder kaart bevat immers een van deze vier *configuraties*.

Met *reduceerbaar* bedoelen we dat iedere kaart die een van deze vier configuraties bevat kan worden *gereduceerd* tot een vierkleurbare kaart. Kempe slaagt erin reduceerbaarheid te bewijzen voor drie van de vier configuraties. In het geval van de vijfhoek mislukt zijn exercitie. (Appel en Haken 2008, 113) We kunnen dus zeggen dat de onvermijdbare configuratie van Kempe niet *reduceerbaar* is. Appel en Haken ontwikkelden een nieuwe techniek om een onvermijdbare verzameling van reduceerbare configuraties te vinden: het *dischargen*. Deze techniek berust uit een aantal te bewijzen resultaten uit de grafentheorie.

Lemma 3.3.1. *Zij G een planaire graaf en f_i het aantal i-zijdige facetten, dan geldt:*

$$\sum_{i\geq 3}(6-i)f_i = 6f - 2e$$

Bewijs. Merk op dat uit 3.1.23, de duale variant van het handenschud-lemma, volgt dat: $\sum_{i\geq 3} if_i = 2e$.
Merk op: $\sum_{i\geq 3} f_i = f$.

$$\begin{aligned} 6f - 2e &= 6\sum_{i\geq 3} f_i - \sum_{i\geq 1} if_i \\ &= \sum_{i\geq 3}(6-i)f_i \end{aligned}$$

□

Propositie 3.3.2. *Zij $G = (V, E)$ een planaire graaf, zodanig dat voor alle $v \in V$ geldt dat de graad van $v \geq 3$, dan geldt:*

$$\sum_{i\geq 3}(6-i)f_i \geq 12$$

Bewijs. Merk op: $2e \geq 3v$ omdat de punten graad minstens 3 hebben. Dit volgt uit het handenschud-lemma ($2e = \sum_{i\geq 3} iv_i \geq 3v$).
Er volgt dus $6v - 4e \leq 0$. Via de formule van Euler krijgen we:

$$\begin{aligned} 12 &= 6v - 6e + 6f \\ &= (6v - 4e) - (6e - 4e) + 6f \\ &\leq 6f - 2e \end{aligned}$$

Dus: $6f - 2e \geq 12$ en we passen 3.3.1 toe, dan volgt:

$$\sum_{i\geq 3}(6-i)f_i = 6f - 2e \geq 12$$

□

Gevolg 3.3.3. *Zij G een planaire graaf, zodanig dat alle punten graad ≥ 3 hebben en geen facetten met minder dan 5 zijden, dan geldt dat er minstens 12 facettten zijn met 5 zijden.*

Bewijs. We weten uit het geldige gedeelte van Kempe's bewijs dat:

$$f_1, f_2, f_3, f_4 = 0$$

Dus:

$$f_5 \geq \sum_{i\geq 7}(i-6)f_i + 12$$

Dit volgt uit het herschrijven van de formule uit de vorige propositie. De ongelijkheid vertelt ons precies dat het aantal facetten met 5 zijden groter of gelijk aan 12 is. □

Omdat kaartkleuringen altijd over eindige kaarten gaan, gebruiken Appel en Haken de volgende formule:

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_7 - 2f_8 - \cdots - (i_{max} - 6)f_{i_{max}} \geq 12$$

We vervolgen nu met een bespreking van het idee achter het dischargen. We nemen allereerst aan dat de ongelijkheid een gelijkheid wordt, daarnaast nemen we de duale variant ervan, om het te vertalen naar de grafentheorie. Hierin volgen we (Haken 2006, 203).

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 - v_7 - 2v_8 - \cdots - (i_{max} - 6)v_{i_{max}} = 12$$

Deze bovenstaande gelijkheid, kunnen we interpreteren als een gelijheid tussen aan de linkerzijde de *charge* per punt en aan de rechterzijde de *totale charge*. Op deze wijze is er een relatie tussen de negatieve *charges* van de punten van graad 7 of hoger en de positieve *charges* van de punten van graad 5 of lager.

Stel nu dat we de charges herverdelen, zonder dat de totale charge verandert. Stel in het bijzonder dat positieve charge wordt overgeheveld naar de punten met negatieve charge en vice versa. Op deze wijze is er zeker geen verandering in de totale charge, omdat we evenveel optellen als aftrekken. Deze methode kan leiden tot *discharged* punten, die geen charge meer overhouden, en *overcharged* punten, die meer charge hebben dan voorheen.

Appel en Haken maken gebruik van een specifiek dischargingsproces op een willekeurige graaf. Hierbij is het mogelijk om een eindige lijst te maken van alle configuraties die alle punten bevatten met positieve charge, na het dischargen. Dat wil zeggen dat de verdeling van positieve charge beperkt is tot deze eindige lijst. Aangezien alle ontvangers van positieve charge voor een willekeurige graaf in deze lijst aan configuraties zitten, moet iedere planaire kaart minstens een van deze configuraties bevatten. Uit dischargen volgen dus onvermijdbare configuraties.

Het doel van dischargen in het geval van het Vierkleurenprobleem is het vinden van een procedure die beschrijft hoe je charge kan veranderen om uiteindelijk ervoor te zorgen dat ieder punt met positieve charge in de uiteindelijke configuratie zelf reduceerbaar is of tegen een reduceerbare configuratie aanligt. Appel en Haken is het gelukt om een dischargingsmethode te ontwikkelen die dit doel heeft behaald. Dat wil zeggen dat er door middel van dischargen er een onvermijdbare verzameling aan reduceerbare configuraties is gevonden.

Na het dischargen houden we een eindige lijst aan onvermijdbare configuraties over. Appel en Haken hielden er 1482 over. Nadat deze configuraties zijn gevonden, moeten worden nagegaan dat ze reduceerbaar zijn. Het probleem hiermee is dat dit een tijdrovend proces is. Dit heeft te maken met het aantal landen dat de gevonden configuratie omringt: de *ring*-grootte. Ter illustratie: een vijfhoek heeft ring-grootte vijf. Hoe meer buurlanden een configuratie heeft, hoe meer ketenwisselingen en gevalsonderscheiden het kost om een vierkleurbare kaart te krijgen. Aangezien de meest configuraties ring-grootte 13 of 14 hadden, kostte het de computer 1200 uur om reduceerbaarheid van de onvermijdbare configuraties af te leiden. (Appel en Haken 1977, 114)

Dit bewijs noemen we een *computer*bewijs, omdat het noodzakelijk is dat er veelvuldig gebruik wordt gemaakt van een computer. Het dischargen, het vinden van onvermijdbare configuraties, is niet gedaan met behulp van een computer. De enige stap waarbij Appel en Haken moesten grijpen naar de computer is het nagaan van reduceerbaarheid.

3.3.4 Filosofische opmerkingen

Omdat Appel en Haken gebruik maken van een computer om de Vierkleurenstelling te bewijzen, is er enige kritiek opgeworpen die de geldigheid van het bewijs bevraagt. De meest invloedrijke criticus is de filosoof Thomas Tymoczko, die in zijn *The Four-Color Problem and Its Philosopical Significance* de filosofische consequenties van het accepteren van de Vierkleurenstelling onder de loep nam. De inhoud van dit artikel is te reduceren tot twee stellingen: (i) Omdat het niet mogelijk is het bewijs van de Vierkleurenstelling volledig na te lopen, is het geen 'bewijs' en (ii) Omdat er gebruik wordt gemaakt van een computer bij dit bewijs wordt wiskunde deels een experimentele wetenschap. (Tymoczko 1979, 58) We zullen beide punten behandelen.

Tymoczko's artikel begint met het benoemen van drie karakteristieke eigenschappen van een bewijs:

1. Bewijzen zijn overtuigend
2. Bewijzen zijn 'na te lopen' (ik zal het treffendere en oorspronkelijke *surveyable* gebruiken)
3. Bewijzen zijn formaliseerbaar (Tymoczko 1979, 59)

Dit zijn criteria die afkomstig zijn uit verschillende gebieden die de wiskunde als studie-object hebben. Het eerste criterium is afkomstig uit de antropologie van de wiskunde, het tweede punt uit de kenleer van de wiskunde en het derde punt uit de wiskundige logica. (Tymoczko 1979, 60) Het eerste punt volgt veeleer uit de observatie en niet uit filosofische reflectie. Dit criterium stelt grofweg dat wiskundigen in zekere zin bepalen wat ze een goed bewijs vinden, door erdoor overtuigd te raken. Surveyability is van belang omdat een goed bewijs gelezen, gereviewd en beoordeeld kan worden door een ander rationeel wezen. Door deze eigenschap zijn wiskundige resultaten bestendiger dan andere natuurwetenschappelijke resultaten waarbij data kan worden gemanipuleerd. Formaliseerbaarheid is een andere geëxternaliseerde toets om na te gaan of een bewijs geldig is.

Volgens Tymoczko voldoet het bewijs van de Vierkleurenstelling niet aan de tweede eigenschap. Het werk dat is gepubliceerd door Appel en Haken is een uitvoerig *verslag* van een bewijs maar geen volledig en surveyable bewijs. Volgens Tymoczko is er overigens niets mis met een verslag van een bewijs. (Tymoczko 1979, 69) Er zijn immers talloze voorbeelden te bedenken van wiskundige literatuur waarin bewijzen worden overgeslagen of aan de lezer worden overgelaten. Het verschil met de Vierkleurenstelling is dat er in deze gevallen wel iemand bestaat die het bewijs volledig heeft nagelopen. Het computergedeelte van het bewijs van de Vierkleurenstelling is daar echter te lang voor. Het probleem hiermee is dat het accepteren van het bewijs niet gebeurd op logische gronden, maar op basis van autoriteit van de computer. Hoe kunnen we zeker weten dat deze geen fouten maakt in het ellenlange bewijs?

Een tweede consequentie van het accepteren van het computerbewijs van de Vierkleurenstelling komt neer op het aanvaarden van een gedaanteverwisseling van de wiskunde. Volgens Tymoczko beschouwen filosofen wiskundige kennis als *a priori*. (Tymoczko 1979, 81) Dat wil zeggen dat wiskundigen de waarneming niet nodig hebben bij het behalen van wiskundige resultaten. Als een wiskundige een stelling bewijst, dan heeft hij hiervoor geen microscoop of iets dergelijks nodig. Hij gebruikt enkel en alleen zijn logische vermogen. Dit staat in tegenstelling tot de natuurkunde waar men gebruik maakt van empirische instrumenten. Dat noemen we *a posteriori* kennis. Dat wil zeggen dat we de waarneming nodig hebben om deze kennis op te doen.

Het bewijs van Appel en Haken behoort volgens Tymoczko tot de a posteriori-categorie. Onze kennis berust namelijk niet op aannamen die onafhankelijk zijn van de waarneming. We kunnen a priori beredeneren dat een onvermijdbare verzameling van reduceerbare configuraties leidt tot de Vierkleurenstelling, maar deze redenering berust op een experiment. Daarom is het a posteriori kennis. Met experiment doelt Tymoczko op het nagaan van reduceerbaarheid van de configuraties middels een computer. Voordat we hieraan beginnen hebben we namelijk slechts een vermoeden, waarna ons vermoeden wordt bevestigd door een extern apparaat. Onze kennis berust op empirische aannamen over computers en het experimentele computerwerk van Appel en Haken.

Tot dusver heb ik de twee belangrijkste filosofische consequenties van het accepteren van het computerbewijs geformuleerd. In het volgende hoofdstuk bespreken we deze ideeën vanuit de lens van Wittgensteins latere filosofie. Als laatst merken we op dat Appel en Haken's bewijs op veel punten is verbeterd door Robertson, Saunders, Seymour en Thomas in 1995. Hun bewijs is echter alsnog vatbaar voor dezelfde errors in het computermechanisme. In 2005 verscheen er een nieuw bewijs van Georges Gonthier waarbij gebruik werd gemaakt van het formele bewijssysteem *Coq*. Een system dat betrouwbaarder is dan voorgaande bewijssystemen. (Gonthier 2008). Gonthier heeft hiernaast alle benodigde wiskunde geformaliseerd.

Hoewel deze innovaties een ander licht schijnen op Tymoczko's kanttekeningen – met name het bewijs van Gonthier dat voldoet aan Tymoczko's derde eis – is een discussie hiervan niet relevant voor onze vraag. Het feit blijft dat de wiskundige gemeenschap het bewijs van Appel en Haken *naast* alle andere bewijzen accepteert dan wel heeft geaccepteerd. Hierdoor zijn we genoodzaakt te concluderen dat deze gemeenschap de filosofische consequenties van het accepteren van dit computerbewijs ook accepteert. We vervolgen de discussie van de filosofische consequenties later in het volgende hoofdstuk.

Hoofdstuk 4

Houdt het formalisme stand?

De afgelopen drie hoofdstukken hebben in teken gestaan van het uitdiepen van de formalistische theorie, het presenteren van de kritieken op deze theorie en het bespreken van een casus en de kritieken daarop. In het vervolg richten we ons op het verwerken van de opgedane kennis om de kritieken op het formalisme, zij het direct vanuit Frege of indirect vanuit Tymoczko, te pareren. We zullen gebruik maken van de filosofie van Ludwig Wittgenstein om een duidelijker beeld te krijgen van spellen en wat 'wiskunde is een spel' precies inhoudt. Dit hoofdstuk is in drie onderdelen verdeeld. In het eerste deel worden Wittgensteins opvattingen over spellen gepresenteerd, waarna we deze combineren met Hilberts filosofie om Frege's en Tymoczko's kritiek een weerwoord te bieden. We sluiten het af met een pleidooi voor een hybride formalisme, de culminatie van deze scriptie en een synthese van Hilberts en Wittgensteins filosofie.

4.1 Wat is een spel?

Er zijn vele spellen die niet of nauwelijks op wiskunde lijken. Het schaakspel, de kandidaat van Thomae, kent winnaars en verliezers, de wiskunde niet. Hetzelfde geldt voor vele balspellen. Puzzels zijn wellicht een betere kandidaat, hoewel de wiskunde meer toepassingen kent dan de meeste puzzels. Het vinden van één spel dat de lading volledig dekt, lijkt onbegonnen werk. Daarom zullen we ons in dit gedeelte niet richten op het vinden van een spel dat identiek is aan de wiskunde. De wiskunde is daar te veelzijdig en complex voor. We moeten de koers van onze zoektocht veranderen.

Het concept *taalspel* biedt mogelijkheden hiervoor. Dit concept is door de filosoof Ludwig Wittgenstein ontwikkeld om menselijke taal en talige communicatie te begrijpen. (McGinn 2013, 61) Zijn inzichten hierover zijn zeer invloedrijk geweest in de taalfilosofie. Talen beschouwen als *taalspelen* biedt immers veel inzichten in de verschillende verschijningsvormen van menselijke communicatie. Dit zullen we later nog zien. Aangezien de wiskunde eveneens een talig fenomeen is dat te complex is om gevat te worden door een alledaags bordspel of een puzzel, is het relevanter om onze koers te verleggen richting de *taalspelen*.

Wittgenstein beschouwt de taal vanuit de lens van het spel. Wij zullen hetzelfde doen met de taal waarin de wiskunde wordt bedreven. Het taalspel is een soort spel, dat wil zeggen dat er in talige communicatie zekere regels bestaan die het verloop van interacties dicteren. Om dit uit te kunnen uitdiepen, is het allereerst van belang om helder voor ogen te hebben wat Wittgenstein bedoelt met 'spel'. Een belangrijk methodologisch inzicht vooraf is dat Wittgenstein niet gelooft dat er een overkoepelende definitie bestaat van het woord 'spel'. Er is geen eigenschap die alle spellen met elkaar gemeen hebben. (Kenny 2006, 129) Toch ontkent Wittgenstein niet dat er bepaalde gelijkenissen zijn tussen spellen, hij schrijft hier het volgende over:

> §66 Kijk bijvoorbeeld eens naar de bezigheden die wij "spelen"noemen. Ik bedoel bordspelen, kaartspelen, balspelen, Olympische Spelen, enzovoorts. Wat hebben ze allemaal gemeen? – Zeg niet: "Ze *moeten* iets gemeen hebben, anders zouden ze geen 'spelen' hetenmaar *kijk* of er iets is dat ze allemaal gemeen hebben. - Want wanneer je kijkt, zul je niet iets zien dat ze *allemaal* gemeen hebben, maar je zult gelijkenissen, verwantschappen ontdekken, en neit zo weinig ook. [. . .] Kijk bijvoorbeeld naar de bordspelen met hun veelvoudige verwantschappen. En nu kaartspelen, hier zie je vele overeenkomsten met de eerste groep, maar een groot aantal gemeenschappelijke eigenschappen valt af, om plaats te maken voor weer andere. [...]
> §67 Ik weet deze gelijkenissen niet beter te karakteriseren dan met het woord "familiegelijkenissen"; want op deze wijze overlappen en kruisen de verschillende gelijkenissen tussen de leden van een familie elkaar: bouw, gelaatstrekken, kleur van de ogen, manier van lopen, temperament, etc. etc. - Daarom zeg ik: 'spelen' vormen een familie. (Wittgenstein 1976, 65)

'Spel' is volgens deze passage een begrip dat we moeten begrijpen door de verschillende verschijningsvormen ervan te beschouwen. Het is geen begrip dat op voorhand eenduidig kan worden gedefinieerd, waarna we voorbeelden kunnen verzinnen die voldoen aan de rechtlijnige definitie. Dit staat in sterk contrast tot de wiskunde, waarbij de helderheid van de begrippen en de wiskundige taal ervoor zorgt dat het duidelijk is welke voorbeelden wel en niet voldoen aan een definitie. 'Spel' is vanwege de veelzijdigheid moeilijker te vangen. Geven we de voorkeur aan een heldere en duidelijke definitie, zoals “spellen zijn bedoeld ter vermaak en hebben doorgaans een winnaar” dan vallen heel veel voorbeelden, zoals overgooien, buiten de boot.

In de bovenstaande passage uit de Filosofische Onderzoekingen legt Wittgenstein een grote nadruk op het *kijken* naar de verschillende verschijningsvormen van spellen. Dit doet hij omdat het volgens hem van belang is om recht te doen aan de veelzijdigheid van het begrip ‘spellen’. Hij ziet dat filosofen het *theoretiseren* verkiezen boven het *kijken*, waardoor er een theorie ontstaat die weliswaar duidelijk is, maar veelal een gesimplificeerd beeld schetst van het te verklaren object. (McGinn 2013, 41) De theorieën gaan een eigen leven lijden en worden zelf een studie-object, in plaats van dat ze het oorspronkelijke object, in dit geval de taal, beschrijven.

De wiskunde valt ook ten prooi aan deze filosofische houding. De filosofieën van de wiskunde die wij besproken berusten ook op een nauwe kijk op de wiskunde. Thomae en Heine reduceren het tot een (teken)spel, waarbij de historische en intuïtieve kant van de wiskunde wordt genegeerd. Hilberts filosofie laat wel ruimte over voor de historische en intuïteve kant van de wiskunde, maar ook zijn theorie berust op simplificatie. Zijn bewijstheorie is een uitstekende illustratie hiervoor. Een wiskundig bewijs wordt daarin gereduceerd tot een theoretisch *object* dat bestaat uit een afleiding van een uitspraak uit aannames en eerder bewezen uitspraken. De Wittgensteiniaanse kritiek hierop is dat deze karakteriseringvan ‘bewijs’ niet de volledige lading van het begrip dekt.

Een bewijs zou voor Wittgenstein niet slechts een *object* zijn. Laten we de wens om een ondubbelzinnige en heldere bewijstheorie te formuleren achterwege en leggen we een nadruk op het *kijken* naar de situaties waarin er wiskundig wordt ‘bewezen’, dan zien we iets heel anders dan een rijtje dat bestaat uit axioma’s, bewezen uitspraken en afleidingen. In wetenschappelijke artikelen en wiskundige boeken zien we informele bewijzen waarbij de deductiestappen impliciet zijn, we zien foute of onafgemaakte bewijzen die worden ingeleverd bij studentassistenten en, niet te vergeten, de nieuwe computerbewijzen.

Willen we een volledige filosofie van de wiskunde, dan moeten we op zijn minst erkennen dat het begrip ‘wiskunde’ deels verwijst naar de *subjectieve* kanten van de wiskunde. Wiskunde is niet alleen wiskunde-als-object; een samenraapsel van definities, stellingen, bewijzen en voorbeelden, maar er schuilt een sociale kant achter: nadenken, experimenteren, discussiëren enzovoorts. Laatstgenoemde is echter het studieobject van de socioloog of de filosoof van de wiskundige praktijk. Wij willen voorkomen dat we niet verzanden in een discussie over de sociale aspecten achter de wiskunde, tegelijkertijd willen we de ‘mens achter de wiskunde’ recht aan doen in onze theorie.

Ons doel, het formuleren van een *volledige* filosofie van de wiskunde, komt deels overeen met Wittgensteins doel van het formuleren van een volledige ‘filosofie’ van de taal. Op inhoudelijk gebied is Wittgensteins latere filosofie niet direct toepasbaar, maar de filosofische methode achter het conceptualiseren van het taalspel zal zeker nuttig zijn. Ons doel is daarmee niet alleen het begrijpen van het begrip ‘taalspel’, maar ook het begrijpen van de achterliggende methode. Met dit in het achterhoofd kunnen we de karakterisering van het ‘taalspel’ voortzetten. Een ander belangrijk verschil is dat wij de filosofie van de wiskunde-als-object - zoals Hilberts bewijstheorie - willen inbedden in de volledige filosofie van de wiskunde, terwijl Wittgenstein de taalkunde niet wil inbedden in zijn theorie.

4.1.1 Voorbeelden en taalspelen

We volgen Wittgensteins methode en *bekijken* eerst een aantal voorbeelden van taalspelen, alvorens we opmerkingen maken over taalspelen in het algemeen. In §23 van de Filosofische Onderzoekingen presenteert Wittgenstein de volgende opsomming:

> Het geven en opvolgen van bevelen
> Het beschrijven van een voorwerp naar de vorm of naar de afmetingen
> Het maken van een voorwerp aan de hand van een beschrijving (tekening)
> Rapporteren hoe iets zich heeft toegedragen
> Gissen naar de toedracht
> Een hypothese opstellen en toetsen
> De resultaten van een experiment weergeven in tabellen en diagrammen
> Een verhaal bedenken; het lezen
> Toneelspelen
> Reien zingen
> Raadsels oplossen
> Een mop bedenken; hem vertellen
> Een vraagstuk uit de toegepaste rekenkunde oplossen
> Vertalen uit de ene taal in de andere
> Vragen, danken, vloeken, groeten, bidden. (Wittgenstein 1976, 42)

Om deze opsomming te verhelderen, duiken we dieper in een ander voorbeeld uit de Onderzoekingen, ook hiervoor citeren we direct:

> §2 [...Deze] taal moet de communicatie mogelijk maken tussen een bouwer A en zijn helper B. Bij het bouwen gebruikt A de volgende bouwelementen: blokken, pilaren, platen en balken. B moet de elementen aangeven, en wel in de volgorde waarin A ze nodig heeft. Voor dit doel bedienen zij zich van een taal die bestaat uit de woorden ‘blok’, ‘pilaar’, ‘plaat’, ‘balk’. A roept ze af; - B brengt het element dat hij geleerd heeft op die roep te brengen. -
> Vat dit op als een volledige primitieve taal. [...]
> §6 We zouden ons kunnen indenken dat de taal in §2 de *gehele*

> taal van A en B uitmaakt, of zelfs de gehele taal van een volksstam. De kinderen worden tijdens hun opvoeding bijgebracht *die* handelingen te verrichten, daarbij *die* woorden te gebruiken en *zo* te reageren op de woorden van een ander. [...] (Wittgenstein 1976, 32)

Deze 'bouwvakkerstaal' laat een aantal dingen zien over hoe wij met elkaar communiceren. In een hypothetische wereld waarin er slechts bouwvakkers bestaan en er alleen bouwvakkerswerk wordt verricht is er geen noodzaak om andere woorden op te nemen. De bouwvakker heeft genoeg aan de vier genoemde woorden. Wittgenstein noemt het om deze reden een 'gehele taal'. Het voorbeeld laat zien dat taal functioneert temidden van de praktische, levende en sociale contexten van de sprekers, waarin de taal in verbinding staat tot het niet-linguïstische gedeelte van het leven. (McGinn 2013, 47) In het geval van de bouwvakkerstaal is de verbinding zeer duidelijk: de taal dient als een soort steno voor de handeling die de helper moet uitvoeren.

We bekijken nog een laatste voorbeeld, dat in het verlengde ligt van het bouwvakkersvoorbeeld. Ditmaal betreft het de africhting van een bouwvakkerspupil b:

> Voor een belangrijk deel zal de training hierin bestaan, dat de leraar A op de dingen wijst, de aandacht van het kind (b) erop vestigt, en daarbij een woord uitspreekt; bijvoorbeeld het woord 'plaat' bij het aanwijzen van die vorm. [...]

Wittgenstein maakt hier de volgende opmerkingen over:

> Men zou kunnen zeggen dat dit ostensieve onderwijs van woorden een associatief verband legt tussen het woord en het ding. [...] Nu, dat kan verschillende dingen betekenen, maar we denken waarschijnlijk in de eerste plaats aan het feit dat het kind, op het horen van het woord, een beeld van het ding voor de geest komt. [...]
> Maar in de taal van §2 hebben de woorden *niet* tot doel voorstellingen op te roepen. [...] (Wittgenstein 1976, 33)

We zien hier een nadruk op een ander belangrijk onderdeel van taalspelen: de functionaliteit. Als een pupil een taal leert dan is het idee dat het kind spelenderwijs leert hoe hij zich moet gedragen als een helper (B). Deze processen zijn weliswaar in taal gegoten, maar ze dienen altijd een praktisch doel. Het kind leert geen 'mentaal plaatje' maken van het ding. (Stern 2004, 92) Het bouwvakkersvoorbeeld is een beknopt voorbeeld van een taalspel, maar Wittgenstein stelt dat deze primitieve communicatievorm dient als een model voor de taal in het algemeen. Vanuit de primitieve talen die we leren als kind ontwikkelen we ons verder en breiden we onze taal spelenderwijs, middels taalspelen, uit.

In §7 van de Onderzoekingen staat de meest expliciete typering van het taalspel:

> §7 [...] We kunnen ons het hele proces van het gebruik van de woorden in §2 voorstellen als een van die spelen, waardoor kinderen hun moedertaal leren. Ik zal deze spelen *taalspelen* noemen en van een primitieve taal soms spreken als een taalspel. [...]
> Ik zal dan ook het geheel, namelijk de taal en de activiteiten waarmee deze verweven is, het "taalspel" noemen. (Wittgenstein 1976, 35)

Alle onderdelen van 'taal', zoals aanwijzend onderricht worden in de bouwvakkerskunst, zijn taalspelen, maar de taal in specifieke contexten is ook een taalspel dat bestaat uit kleinere deelspellen. Hiermee bedoelt Wittgenstein niet dat taal *slechts* een spel is, zoals monopolie, hij gebruikt het taalspel veeleer als een metafoor of als *vergelijksingsobject* om de taal te verhelderen. (Wittgenstein 1976, 88) 'Het summum aan taalspellen' is daarmee geen wiskundige woordenboekendefinitie van het woord 'taal'. Hij wil taalspelen als metaforen gebruiken om onze aandacht te vestigen op alle verschillende aspecten en verschijningsvormen van de taal, zonder ons blind te staren op hoe taal 'hoort' te functioneren. (Stern 2004, 90) Wittgensteins theorie is daarmee van een *descriptieve* aard en niet van een *normatieve* aard.

De verwevenheid van de taal en het menselijk leven wijst ook op een *performatief* aspect van de taal. Dat wil zeggen dat communicatie als doel heeft de ander iets te laten doen. Als de bouwer A het woord 'plank!' roept wil hij dat B hem een plank brengt. Als de priester aan de bruidegom vraagt of hij de bruid wil huwen, dan is dat niet alleen een talige uiting maar ook een oproep tot handelen. Antwoordt de bruidegom met 'ja', dan *spreekt* hij niet alleen maar hij *huwt*. Dit voorbeeld onderstreept niet alleen de verwevenheid van de praktische niet-linguïstische aspecten van het menselijk bestaan en de taal, maar ook het feit dat veel menselijke interactie is gebonden aan veelal ongeschreven regels.

De regels voor de taal leren we, net als bij een spel, spelenderwijs. Vragen als 'alles goed?' en 'hoe gaat het?' vormen een mooi voorbeeld voor dit onderdeel. Het antwoord op deze vragen is namelijk gebonden door een regel als *niet te eerlijk zijn en antwoorden met 'ja'*. Als kind heeft men dit niet door. Een dergelijke regel is echter niet te formaliseren, het vormt een ongeschreven regel die onderdeel is van een bepaalde cultuur. Door te benadrukken dat het taalspel een vergelijkingsobject is en geen formeel voorschrift aan regels, wil Wittgenstein het onderscheid tussen een 'calculus' en een 'taalspel' aanstippen. Het taalspel moeten we beslist niet zien als iets dat gegrondvest is op formele syntactische regels. De regels ontstaan naar aanleiding van een sociale context en een beoogd praktisch doel. In het geval van 'alles goed' is het doel vaak het starten van een gesprek.

4.1.2 Naamgeven en schaken

Om dit onderdeel in te leiden bekijken we wederom een voorbeeld, waarna we dit voorbeeld vergelijken met een passage uit de Filosofische Onderzoekingen.

Het voorbeeld is tweeledig en het betreft de uitspraak ‘dit is een perfect lichaam’, een uiting met als doel het definiëren of karakteriseren van een perfect lichaam. Aan de ene kant kan een modellenscout dit zeggen terwijl hij wijst naar een model. Wordt deze uiting geuit in de context van een college Galoistheorie, dan wordt er verwezen naar een lichaam K waarbij ieder polynoom over K als de graad van het polynoom gelijk is aan het aantal verschillende nulpunten. Is dit een flauw voorbeeld of gebeurt er hier iets interessants? Voor we deze vraag beantwoorden citeren we uitvoerig uit §30 en §31 van de Onderzoekingen:

> §30 [...] Je moet al iets weten (of kunnen), wil je naar de naam van iets kunnen vragen. Maar wat moet je weten?
> §31 Laten we iemand de koning in het schaakspel zien en zeggen we daarbij: “Dit is de koning”, dan vertellen we hem daarmee nog niet hoe dit stuk gebruikt wordt, - tenzij hij de spelregels al kent, op dit ene punt na: de vorm van de koning. We kunnen ons voorstellen dat hij de regels van het spel geleerd heeft, zonder ooit een echt schaakstuk onder ogen te hebben gekregen. De vorm van het stuk correspondeert hier met de klank of de vorm van een woord. We kunnen ons echter ook voorstellen dat iemand het spel geleerd heeft, zonder ooit de regels te hebben geleerd of geformuleerd. Hij heeft bijvoorbeeld eerst door te te kijken heel eenvoudige bordspelen geleerd en is toen verder gegaan met steeds ingewikkelder spelen. Ook hem zouden we de verklaring kunnen geven: “Dit is de koning”, - als we hem bijvoorbeeld schaakstukken van een voor hem ongewone vorm laten zien. Ook deze verklaring maakt het slechts daarom duidelijk dat het stuk gebruikt wordt, omdat de plaats waar die verklaring moest komen als het ware als was voorbereid. Misschien ook zullen we dan pas zeggen dat de verklaring hem duidelijk maakt hoe hij het stuk dient te gebruiken, als de plaats al is voorbereid. En dat dit hier het geval is komt niet, omdat degene aan wie wij de verklaring geven al regels kent, maar omdat hij op een andere manier al een spel beheerst.
> Kijk ook eens naar het volgende geval: ik leg iemand het schaakspel uit en begin met een stuk aan te wijzen en daarbij te zeggen: “Dat is de koning”. Die gaat zo en zo over het bord, etc. etc.- in dit geval zullen we ze zeggen dat de woorden “Dat is de koning”(of “Dat heet koning”) slechts dan de verklaring van een woord vormen, als degene aan wie we het spel uitleggen al ‘weet wat een stuk is’. Als hij dus bijvoorbeeld al eens andere spelen gespeeld heeft, of ‘met begrip’ heeft toegekeken wanneer andere mensen

> speelden - *en dergelijke dingen*. Alleen in dat geval zal de vraag "Hoe heet dat?- namelijk dat stuk - tijden het leren van het spel relevant zijn.
> We kunnen zeggen dat het alleen dan zinvol is dat iemand naar de naam van iets vraagt, als hij er ook wat mee kan doen.
> We zouden ons ook kunnen voorstellen dat degene tot wie de vraag gericht is, antwoordt: "Bepaal de naam zelf maar- waarmee dan alles op de steller van de vraag zou worden afgeschoven. (Wittgenstein 1976, 45-47)

Het eerste voorbeeld - over het perfecte lichaam - is een makkelijk voorbeeld om in te zien dat woorden niet alleen dienen als een koppeling tussen een 'ding' en een 'betekenis'; er is vaak ook een context die hiertussen medieert. Wittgenstein trekt dit door en stelt dat naamgeven op zichzelf nietszeggend is. Naamgeven zien we als het 'labelen' van dingen met woorden om deze labels vervolgens in onze taal te gebruiken. Maar hoe gebruiken we deze labels? En is het labelen los te zien van het gebruik van de label? Uit §30 en §31 blijkt dat Wittgenstein hier een negatief antwoord op geeft.

Een naam heeft volgens Wittgenstein een functioneel doel in een taalspel. Kijken we terug naar de bouwvakkerstaal, dan zien we dat het label voor een balk 'balk' is, maar dit label dient eigenlijk als afkorting voor 'geef me de balk'. Volgens Wittgenstein is het mogelijk om de labels los te koppelen van functies van de objecten. Een balk kunnen we evenzeer 'b' of 'dat lange ding daar' noemen. Naamgeven is daarmee op inhoudelijk niveau nietszeggend. Het roept geen inhoudelijk idee van het ding op, maar het beweegt ons tot handelen. (Stern 2004, 92)

Het schaakspel is een van Wittgensteins meest geliefde vergelijkingsobjecten voor deze kwestie. Middels dit voorbeeld laat hij zien dat we de nadruk niet moeten leggen op het naamgeven, maar op wat er *voor* en *na* het naamgeven gebeurt. In §31 van Onderzoekingen bespreekt Wittgenstein twee gevallen die deze opmerking onderstrepen: (i) het scenario waarin je hebt geleerd wat alle regels van het schaakspel zijn, maar je nog niet weet hoe de koning eruitziet en (ii) het scenario waarin je het spel leert zonder kennis hebt van de regels, bijvoorbeeld door toe te kijken. (McGinn 2013, 47)

In beide gevallen zien we dat naamgeven niet als doel dient om een mentaal plaatje te kunnen creëren van de koning, maar dat we 'koning' definiëren aan de hand van de zetten die men mag doen. (Stern 2004, 94) Het moment waarop je 'dat is de koning' zegt is daarmee niet het belangrijkste aan naamgeven. Wat ervoor gebeurt, het opdoen van de kennis over het schaakspel, en wat erna gebeurt, het gebruiken van de koning tijdens het schaakspel, is vele malen belangrijker. 'Dat is de koning' berust op kennis van de structuur van het schaakspel, die we voor het naamgeven opdoen. 'De koning' betekent niets op zichzelf; het is alleen betekenisvol in het schaakspel.

4.2 Frege's kritiek en computerbewijzen

Wittgensteins analyse van het schaakspel vormt een mooie brug naar het formalisme en de kritieken van Frege. In deze sectie gebruiken we de inzichten van Wittgenstein om het primitieve formalisme en Hilberts formalisme te verrijken. Hiermee plakken we pleisters op de wonden van het formalisme, die veroorzaakt zijn door Frege.

4.2.1 Frege's kritiek

Toepasbaarheid

Frege's eerste kritiek is dat de primitieve formalisten de toepasbaarheid van veel gebieden van de wiskunde niet kunnen verklaren. Zien we de wiskunde als een soort schaakspel, dan zijn wiskundige entiteiten arbitrair. Volgens Frege is het onmogelijk om een arbitraire theorie te hebben die zo goed toe te passen is. Hilbert antwoordt hierop door te stellen dat wiskundige spelregels niet arbitrair zijn, maar worden geformaliseerd nadat er een inhoudelijk corpus aan kennis over bepaalde structuren is. Axiomatiseren - de spelregels vastzetten - is daarmee een gevolg van een inhoudelijke ontwikkeling.

Dit is echter geen directe tegenwerping van Frege's kritiek. Hilberts antwoord kan worden geherformuleerd als "de wiskunde is een ander soort spel dan het schaakspel, omdat het wel inhoudelijk is". Wittgensteins opmerkingen over het schaakspel geven ons het gereedschap om Frege direct te lijf te gaan. Volgens Frege corresponderen getallen met abstracte ideeën. 1 is volgens hem een label voor het *idee* 'één'. 'Inhoudelijk' tegenover 'arbitrair' betekent volgens Frege dat er een echt bestaand verwijzingsobject is in de wereld; de stukken in het schaakspel hebben geen verwijzingsobjecten.

Wittgenstein is het hier op een zeer fundamenteel niveau mee oneens. Zijn filosofie in de Filosofische Onderzoekingen is namelijk een pleidooi voor het feit dat Frege's definitie van 'inhoudelijk' nietszeggend is. Frege hangt de theorie van het 'mentale plaatje' aan. 'Balk' is het mentale plaatje van de balk in het echt. Volgens Wittgenstein negeert Frege een zeer belangrijke vraag: "waarom labelen de bouwvakkers de balk wel, maar het hout waar het van gebouwd is niet?" Omdat de balk een functie heeft in hun wereld en het hout niet.

Inhoudelijke entiteiten zijn nietszeggend zonder de structuur waarbinnen ze een functie krijgen. Wittgensteins verhandeling van het schaakspel in §31 is een overtuigend pleidooi voor deze stellingname. Naamgeven is nooit leeg, omdat we een naam altijd in een structuur zien. Volgens Wittgenstein is het dus onmogelijk om een 'arbitrair spel' in Fregeaanse zin te bedenken. Een 'arbitrair spel' is een soort onsamenhangend spel met willekeurige regels. Maar dat is helemaal geen spel, dat zijn willekeurige handelingen. Volgens Wittgenstein bevatten spellen een soort overkoepelende samenhang in een (sociale) context.

De gekozen namen van dingen in het spel zijn wellicht arbitrair, we zouden in plaats van 'de koning' ook ∞ kunnen kiezen als naam. De achterliggende structuur van het schaakspel blijft hierdoor echter onaangetast. Deze is bovendien niet arbitrair, het schaakspel is immers met een bepaald idee bedach. Spellen hebben altijd een inhoudelijke samenhang, niet vanwege de spel*stukken*, maar door de spel*structuur*. Hetzelfde geldt voor het wiskundige spel van de rekenkunde. Voordat de rekenregels werden bedacht bestonden er al ideeën over hoeveelheden, ruimte en structuur die een bepaalde samenhang hadden. Deze samenhang wordt op een gegeven moment zo duidelijk, dat we de theorie kunnen axiomatiseren.

We zien dus dat er al ideeën over de samenhang en mogelijke regels moeten bestaan, voordat ze worden vastgelegd. Dit proces dat eraan voorafgaat is verre van een arbitrair proces, het gebeurt in een inhoudelijke context. Het naamgeven van onderdelen is het bestendigen van een al bestaande structuur. In wiskundige context kunnen we het naamgeven zien als het axiomatiseren, waarin bepaalde symbolen bepaalde vaste rollen krijgen. Ook bij het axiomatiseren draait het om wat erna en ervoor gebeurt. Frege heeft het dus niet bij het rechte eind als hij stelt dat spellen inhoudsloos zijn.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en oneindige rijen

Omdat de primtieve formalisten stellen dat wiskundige entiteiten *concrete* en *grijpbare* tekens zijn, is er volgens Frege geen plek voor oneindigheid in de wiskunde. ∞ is volgens hem een afkorting voor $1, 2, 3, 4, \ldots$; een teken dat we nooit kunnen afschrijven. Het is concreet noch grijpbaar. Hilberts oplossing vooor dit probleem komt voort uit zijn tweedeling tussen ideale en eindigplaatsige wiskunde. Zijn filosofische argumentatie achter dit onderscheid is echter enigszins gebrekkig.

Om de hiaten die Hilbert achterlaat te vullen zullen we wederom gebruik maken van Wittgensteins analyse van de taal. Zijn nadruk op de *functionaliteit* van taal en zijn opvatting dat onze taal in het geheel een summum is van kleinere taalspelen zijn de voornaamste inspiratiebronnen. We brengen eerst het meest dubieuze onderdeel van Hilberts filosofie ter herinnering: de aanname dat er extralogische concrete tekens $|, ||, |||, \ldots$ ons intuïtief en a priori zijn ingegeven. Deze aanname staaft Hilbert door te zeggen dat Kant dit zegt. Wij nemen geen genoegen met deze verklaring.

We contrasteren deze verklaring met Wittgensteins opmerkingen over hoe kinderen leren tellen in §28 en §29 van de Onderzoekingen. Als we tegen een kind "Dat heet twee" zeggen, terwijl we naar een paar pinda's wijzen, dan bedoelen daarmee niet dat 'twee' verwijst naar twee noten. We leren een kind tellen door hem eerst vele instanties van 'twee' te laten zien. (Wittgenstein 1976, 44) Wittgenstein stelt dat we het getal dan definiëren door te zeggen

"Dit *getal* heet 'twee'". (Wittgenstein 1976, 45) Dit vooronderstelt vertrouwdheid met het woord "getal". Als het goed is komt een kind tot het besef van getallen door eerst in heel veel contexten telwoorden gebruikt te zien worden. Vanuit vele contexten waarin 'twee' wordt gebruikt als hoeveelheid, krijgt het kind een besef van 'twee' als iets algemeens.

Dit leren van getallen - waarbij we via concrete en zichtbare hoeveelheden, een besef krijgen van telwoorden, waarna we bewust worden van getallen - is een primitief taalspel van het leren tellen. In plaats van stellen dat het rijtje $|, ||, |||, \ldots$ a priori ingegeven is in de menselijke cognitie, is het logischer om $|, ||, |||, \ldots$ te zien als de samenvatting van het primitieve taalspelletje van het leren tellen. $|, ||, |||, \ldots$ symboliseert voor onze theorie ons prille en primitieve getalbegrip dat we opdoen tijdens dergelijke teltaalspellen.

$|, ||, |||$ zijn geen op zichzelf bestaande dingen voor het kind, maar ze beschrijven het nemen van één, twee of drie pinda('s) in het primitieve taalspelen van leren tellen. Gaandeweg ontwikkelen we het vermogen om $|, ||, |||, \ldots$ los te zien van de praktische toepassing in het alledaagse leven en krijgen ze een bepaalde gedaante in een wiskundig spel: $1, 2, 3, \ldots$. Maar waarom zijn $\sqrt{2}$ en π anders dan? Volgens Frege bestaan deze getallen niet volgens het formalistische standpunt, omdat ze een niet-concrete en niet-grijpbare oneindige decimale expansie hebben.

Doet 'bestaan' er echter toe? Voor het kind dat leert tellen zeker niet. Degene die het kind vraagt om twee pinda's te brengen krijgt twee stuks, of 'twee' bestaat of niet. Volgens Wittgenstein is het bestaan van een begrip - het bestaan van een label - niet gekoppeld aan een 'ding', maar een gebruik of functionaliteit in een taalspel. (Wittgenstein 1976, 45) Als we dit criterium voor bestaan hanteren dan bestaan $\sqrt{2}$ en π ook. Niet alleen worden ze gebruikt in wiskundige context, ze kennen ook een heel duidelijke intuïtieve verklaring.

$\sqrt{2}$ is de lengte van de schuine zijde van een vierkant van één bij één en π is de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel. Dergelijke intuïtieve uitleg wordt gebruikt tijdens het taalspel waarin een scholier meetkunde leert. Uiteindelijk bedden we $\sqrt{2}$ en π in in een logisch formalisme, waarin ze niet meer verwijzen naar meetkundige figuren, maar *functionele* reken- en denkinsrumenten worden. $\sqrt{2}$ en π beginnen als iets intuïtiesf en betekenisvols in een primitief taalspel, waarna ze een functionele rol krijgen in een wiskundig spel. Dit onderstreept Hilberts standpunt over de axiomatiek.

Frege's kritiek pareren we door te stellen dat hij 'betekenis' en 'bestaan' fout gebruikt. De kous is nog niet af als Frege stelt dat "schaakstukken betekenisloos" en "getallen betekenisvol" zijn. Het schaakspel vooronderstelt al een soort web aan betekenis en regels. $\sqrt{2}, \pi, \infty, \omega, \omega^{\omega}$ zijn geen ijdele en ideale fantasieën of stroken op papier maar denkinstrumenten die functioneren in een bepaalde structuur. Het is de structuur die betekenisvol is in zijn toepassing, niet de afzonderlijke wiskundige entiteiten, hoewel ze de structuur wel ondersteunen. De differentiaalrekening, die veelvuldig wordt toegepast in de natuurkunde, berust op oneindigheid bij het nemen van limieten. Dat maakt de theorie niet minder toepasbaar.

'Spel' en 'betekenis' zijn daarmee geen tegenpolen, zoals Frege en de primitieve formalisten beweren, ze gaan zelfs samen. Het bestaan van de spelstukken wordt gegarandeerd door de rol die ze spelen in een logisch samenhangend spel. De wiskunde is bovendien gevrijwaard van dubieuze denkinstrumenten en drogredenen, want de informele wiskunde is zo opgebouwd dat het, indien iemand dat wenst, mogelijk is het te vertalen naar formele wiskunde in logische taal. Wiskundigen doen namelijk hun best om in hun informele redeneringen nauwkeurig en logisch te redeneren. 'Valsspelen' is daarmee niet aan de orde van de dag in het informele taalspel.

Het spel en de theorie van het spel

Dit kritiekpunt kunnen we vrij snel aan de kant schuiven omdat het evenzeer berust op het idee dat het formaliseren van spelregels op een arbitraire wijze gebeurt. Uit de analyses van Hilbert en Wittgenstein volgt dat deze stellingname van de primitieve formalisten, waar Frege zijn kritiek op baseert, foutief is.

4.2.2 Het computerbewijs

We behandelen in het vervolg de filosofische consequenties naar aanleiding van het bewijs van de Vierkleurenstelling. Eerst herhalen we de belangrijkste punten van Tymoczko. Er zijn drie karakteristieke eigenschappen van een goed bewijs:

1. Bewijzen zijn overtuigend
2. Bewijzen zijn surveyable
3. Bewijzen zijn formaliseerbaar (Tymoczko 1979, 59(

Het bewijs van de Vierkleurenstelling voldoet niet aan de tweede eis, aangezien het gedeelte dat met de computer wordt bewezen niet na te lopen is. Daarnaast representeert de acceptatie van dit bewijs een gedaanteverwisseling van de wiskunde. Omdat wiskudige kennis opgedaan kan worden middels computerexperimenten, is een deel van de wiskunde a posteriori.

We beginnen met een classificatie van de criteria. Het eerste criterium gaat volgens Tymoczko over de antropologie van de wiskunde. In ons Wittgensteiniaanse referantiekader kunnen we zeggen dat dit over het taalspel van de wiskunde gaat - over wiskunde-als-activiteit. De laatste eigenschap is een eigenschap van het bewijs als wiskundig object in de bewijstheorie. Het tweede punt is gekoppeld aan het derde punt, maar Tymoczko bedoelt hiermee niet dat er een mogelijkheid bestaat om het te kunnen nalopen, maar dat het door een wiskundige is gedaan. Ook het tweede criterium is onderdeel van het taalspel van de wiskunde.

De eerste eigenschap is vanuit het perspectief van Hilbert zinloos. Er zijn voorbeelden te verzinnen van foute bewijzen die wel zijn geaccepteerd door wiskundigen. Het eerste bewijs van de Vierkleurenstelling van Kempe is hier een voorbeeld van. De nadruk zou daarom niet moeten liggen op het sociale aspect van de wiskunde, maar de geldigheid van een bewijs moet enkel en alleen berusten op objectieve maatstaven uit de formele logica. Dit is veeleer een *normatief* punt: dit is hoe het zou moeten gebeuren in de ideale situatie. Kortom, het Vierkleurenprobleem is, vanwege het feit dat het is geformaliseerd in een computer, volgens dit enige normatieve criterium een geldig bewijs.

We lopen ook de andere punten langs van Tymoczko. Om dit te doen introduceer ik een gedachte-experiment. We vervangen 'computer' met 'PhD-student' in zijn redenering. Stel dat er in plaats van een computer een zeer slimme PhD-student was die alle configuraties naliep op reduceerbaarheid, is er dan nog een probleem met het bewijs? Volgens Tymoczko wel, want ook in dit geval lijkt het bewijs niet navolgbaar. Toch lijkt hij geen bezwaren te hebben tegen bijvoorbeeld de classificatie van simpele eindige groepen. Dit werk beslaat duizenden pagina's die zijn opgesteld door een veelvoud aan wiskundigen. Er is niet één wiskundige die alle kennis heeft nagelopen. Tymoczko's kritiek is daarmee deels skeptisch van aard: hij wantrouwt datgene wat je zelf niet hebt doorgelopen, terwijl een groot deel van de wiskunde berust op vertrouwen in andere wiskundigen.

Het tweede punt van Tymoczko is vanuit Wittgensteiniaans perspectief geen probleem. Veel wiskundige kennis die we opdoen zouden we nooit hebben als we geen waarneming hadden gehad. Ons eerste getalbesef komt tot stand in een taalspel waarin we abstraheren vanuit de waarneming. Het computerbewijs representeert een nieuw taalspel dat familiegelijkenissen vertoont met andere wiskundige spellen. Dit wijst ons ook op het feit dat de filosofische consequenties die Tymoczko poneert alleen een consequentie zijn voor een filosofie die één uniforme theorie wil formuleren voor de hele wiskunde. Wittgenstein waakt in zijn Onderzoekingen voor deze filosofische werkwijze, aangezien het altijd leidt tot een theorie die een eigen leven gaat leiden. Het computerbewijs is weliswaar niet na te lopen, het is wel breed geaccepteerd en de 'code' is geschreven in een robuust formalisme.

De kritiek op het computerbewijs kan dus ook worde toegepast op veel andere wiskundige bewijzen. Aangezien deze bewijzen niet problematisch zijn en wel worden aanvaard, is Tymoczko's diagnose van de nieuwe experimentele wiskunde eigenlijk een diagnose van de al bestaande wiskunde. Heel veel oude wiskunde is niet surveyable en het onderscheid tussen a priori en a posteriori is in de praktijk niet zo duidelijk, zoals het gedachte-experiment met de PhD-student doet blijken. Om deze redenen moeten we Tymoczko's consequenties aanvaarden en inbedden in onze nieuwe filosofie van de wiskunde.

4.3 Pleidooi voor het *Wittgensteiniaans formalisme*

In de vorige paragraaf en in het hoofdstuk over Hilberts formalisme hebben we aangetoond dat Frege's kritiek niet standhoudt als we het primitieve formalisme uitdiepen. Hiermee kunnen we voorzichtig concluderen dat we in ieder geval niet *tegen* het formalisme zijn. In het vervolg zal ik voortborduren op de negatieve kant van de medaille en een pleidooi geven *vóór* een specifieke vorm van het formalisme: het *Wittgensteiniaanse formalisme*. Dit is een combinatie van de inzichten van Hilbert over de formele aspecten van de wiskunde en de inzichten van Wittgenstein over de informele. Uiteindelijk formuleren we een positief antwoord op de hoofdvraag: wiskunde is een spel.

'Spel' gebruiken we net als Wittgenstein als een vergelijkingsobject. We reduceren de wiskunde niet tot een spel, maar we proberen het functioneren van de wiskunde te verklaren door het te contrasteren met het spel. 'Wiskunde is een spel' is daarmee een iets te boude stelling; 'wiskunde werkt als een spel' is meer op zijn plaats. Toch is er een specifiek bevoorrecht onderdeel van de wiskunde dat niet alleen gelijkenissen vertoont met een spel, maar écht een spel is. Hier valt volledige geaxiomatiseerde en formele wiskunde onder. Denk hierbij aan PA, maar ook aan ZFC waar we alle denkbare hedendaagse wiskunde in kunnen uitdrukken.

Deze wiskundige formalismen lijken op het schaakspel. Alle spelstukken, de objecten uit het formalisme, zijn bekend en de toegestane regels met deze spelstukken, de afleidingsregels, staan ook vast. Net als dat we het schaakspel kunnen zien als een object, waarbij de beweging van een loper en daarna een paard compact kan worden opgeschreven als '1.e4 e5 2.Pc3', kunnen we alle aantekeningen van een wiskundige achterwege laten, alleen kijken naar de resultaten die op zijn velletje staan en deze in een formalisme gieten. Zo krijgen we een formele afleiding van een wiskundig stelling - een bewijs - die betekenisvol is in het formele systeem, zoals het Frege-Hilbertsysteem.

De meeste wiskundigen werken echter niet in formele taal en willen vaak een intuïtief begrip hebben van een wiskundige theorie. In veel bewijzen die we zien in de vakliteratuur zijn alle afleidingsstappen niet genoteerd en worden er veel stappen zelfs overgelaten, omdat de lezer alle stappen al kent. Dit is een 'informeel' of 'sociaal' bewijs. Het informele en sociale deel van de wiskunde vangen we het beste door Wittgenstein's taalspel. Hier spelen zich veel sociale processen af die lijken op de spellen die Wittgenstein in zijn werken bespreekt, maar de regels van de spellen zijn niet bekend bij de gebruikers. Wiskundigen maken deze keuze omdat het opstellen van een formeel bewijs zeer tijdrovend monnikkenwerk is; ze nemen genoegen met het geloof dat hun informele bewijs waarschijnlijk te formaliseren is. Dit geloof berust niet op niets, aangezien van de 100 belangrijkste stellingen uit de wiskunde er al 99 zijn geformaliseerd met computerprogramma's. Zie hiervoor (Wiedijk).

De formele en de sociale kanten van de wiskunde - het spel en het taalspel - hebben een diepe verbinding met elkaar. Hier grijpen we naar het idee van de ontwikkeling van de wiskunde. Enerzijds naar de historische ontwikkeling van de wiskunde, zoals geschetst door Hilbert, anderzijds naar de ontwikkeling van de telvermogens van een kind, door Wittgenstein. Onze filosofische opvatting is dat de eerste wiskundige systemen vaak een functioneel en sociaal doel dienen in een primitief taalspel. Zoals het kind met de twee pinda's. Een summum aan primitieve wiskundige taalspelen worden uiteindelijk de eerste wiskundige taalspelen, die uiteindelijk de eerste wiskundige systemen vormen.

Ter illustratie kijken we naar de getaltheorie. De eerste intuïties bij getallen ontstaan door het tellen van pinda's in een primitieve taalspelen. Dit is het eerste stadium in de ontwikkeling van de getaltheorie. Na tellen met pinda's leren we werken met denkinstrumenten als variabelen en constanten in vergelijkingen, zoals $x - y = 3$. Uiteindelijk groeit dit uit tot abstractere wiskundige structuren, zoals de studie van $\mathbb{Z}[i]$; de ring van de gehele getallen van Gauss. Voor dergelijke structuren ontstaan er axioma's, die we op den duur kunnen schrijven in formele taal. Tegenwoordig zelfs in computers!

Een belangrijk onderdeel van het voorgestelde formalisme is de nadruk op de progressieve historische wiskundige ontwikkeling. We beginnen met een functioneel begrip van kleine gehele getallen die we leren tijdens primitieve taalspelen, ontwikkelen daarna de eerste wiskundige machinerie die ons in staat stelt abstracter te redeneren, die axiomatiseren we en deze kunnen we in formele talen gieten. In een overzicht ziet dit er zo uit:

$$\text{Primitieve taalspelen} \rightarrow \text{Calculi} \rightarrow \text{Formele calculi} \rightarrow \text{Computercalculi}$$

'Calculus' staat in dit geval op een spel met vaste en formele regels, maar niet in een formele taal. (McGinn 2013, 61) Bij iedere stap laten we het vorige stadium niet achterwege, de ontwikkeling is veeleer een accumulatie. De informele en sociale wiskunde bestaat naast de formele wiskunde. Dit onderstreept de relatie tussen het spel van de wiskunde en het taalspel van de wiskunde; het formele en het informele. De interactie tussenbeide vormt een taalspel op zich.

Net als spellen zijn er ook 'verschillende soorten wiskunde' die familiegelijkenissen vertonen. Dit is het laatste belangrijke vergelijkingspunt. 'Wiskunde' is geen uniforme definitie die alle mogelijke verschijningsvormen van de wiskunde dekt, maar een term die wijst op familiegelijkenissen. Enerzijds is er het makkelijke voorbeeld van familiegelijkenissen tussen de verschillende wiskundige vakgebieden. Anderzijds vangen we hiermee ook de relatie tussen de stadia van de progressieve ontwikkeling die we boven hebben geschetst. Primitieve taalspelen vertonen familiegelijkenissen met formele bewijzen, die op hun beurt gerelateerd zijn aan computerbewijzen.

De formulering van de bovenstaande theorie is een poging tot het inbedden van de formele wiskunde - wiskunde-als-object - en de sociale kanten van de wiskunde - wiskunde-als-activiteit - in een algemene filosofie. Dit hebben we gedaan door de wiskunde te vergelijken met het taalspel van Wittgenstein, dat verder verdeeld is in andere kleinere taalspelen. In ons geval is dat enerzijds het sociale spel dat zich afspeelt in de wandelgangen van menig wiskundefaculteit, anderzijds de idealisering van dit sociale spel in de vorm van het formele wiskundige (schaak)spel. Deze zijn verder opgebouwd uit kleinere spellen: eerstgenoemde uit het taalspel van de analyse, de algebra, enzovoorts en laatstgenoemde uit verscheidene formele talen, maar ook het nieuwe spel van de computerbewijzen. Deze zienswijze biedt mogelijkheden om de wiskunde op te vatten als een geheel, wiens delen onderling verbonden zijn als familieleden.

Conclusie

De zoektocht naar een antwoord op de vraag *is wiskunde een spel?* begon met het beantwoorden van *wat is wiskunde?* vanuit een primitief formalistisch standpunt. Thomae en Heine voorzagen een filosofie van de wiskunde waarin er geen ruimte was voor ambigue metafysische speculatie over de aard van wiskundige entiteiten, om deze reden formuleerden zij een filosofie waarin het wiskunde werd gereduceerd tot een *Zeichenspiel* dat vergelijkbaar is met het schaakspel. Daarin zijn wiskundige entiteiten betekenisloos. Ze krijgen slechts een rol toegekend in het spel. Frege formuleerde een aantal tegenargumenten, die tot op heden worden aangehaald om het formalisme te bekritiseren. Zijn drie tegenargumenten zijn:

1. Het schaakspel en diens regels zijn arbitrair. Als de wiskunde te vergelijken is met het schaakspel, dan is de wiskunde ook arbitrair. Hoe verklaar je dan dat de wiskunde zo toepasbaar is in de (natuur)wetenschappen?
2. Als wiskunde een spel is tussen grijpbare en concrete tekens, wat voor rol spelen π en $\sqrt{2}$ dan? Dit zijn oneindige decimale expansies of oneindige rijen. Ze zijn beiden niet te schrijven als een concreet teken.
3. Het is niet mogelijk $\forall x \forall y[x + y \neq y + x]$ toe te staan in de theorie en $\models \forall x \forall y[x+y = y+x]$ toe te staan in de metatheorie. Dit suggereert volgens Frege een soort inhoudelijke connectie tussen verschillende delen van de wiskunde. Niet alle regels zijn dus arbitrair.

In het tweede hoofdstuk hebben we de ontwikkeling van het formalisme door Hilbert onder de loep genomen en gebruikt om de kritieken van Frege te weerleggen. Zijn theorie bestond uit drie hoofdonderdelen: (i) het onderscheid tussen ideale en eindigplaatsige wiskunde, (ii) de axiomatische methode en (iii) het toetsingsmechanisme voor deze methode: de bewijstheorie. Deze filosofie vormt op deze wijze een kritiek van Frege's standpunten:

1. Toepasbaarheid Hilbert weerlegt deze kritiek niet, maar bedt hem in in zijn eigen filosofie. In zijn bespreking van het onderscheid tussen eindigplaatsige en ideale wiskunde stelt Hilbert dat er een geprivilegieerd deel is van de wiskunde dat we inhoudelijk kunnen begrijpen en toepassen. De rest van de wiskunde is ideaal en dient als een instrument om eindigplaatsige theorieën te ontwikkelen. Deze is inderdaad niet toe-

pasbaar. De eindigplaatsige wiskunde is volgens Hilbert niet arbitrair, maar deze komt tot stand na een historische aanloop tot axiomatisering.

2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en oneindige rijen Dergelijke wiskundige constructies zijn volgens Hilbert ideaal. Deze getallen bestaan inderdaad niet, maar dat is geen probleem voor hem omdat ze een belangrijke rol spelen in ideale wiskunde.
3. Het spel en de theorie van het spel 'Het spel' is volgens Hilbert geen arbitrair samenraapsel aan axioma's, maar een bestendiging van een historisch inhoudelijke opmars naar axiomatisering. Voor 'de theorie van het spel' ontwikkelt Hilbert verschillende gebieden van de wiskundige logica. Deze worden gescheiden van 'het spel' en zijn evenzeer inhoudelijk, ze gaan namelijk over een inhoudelijk spel.

In het laatste hoofdstuk bouwen we door op deze tegenwerpingen en breiden we ze uit door middel van de latere filosofie van Wittgenstein. Hilberts standpunt is steekhoudend, maar zijn rechtvaardiging van het onderscheid tussen ideale en eindigplaatsige wiskunde is wankel en hij staat een zekere mate van 'inhoudsloosheid' toe, terwijl dit niet strookt met de intuïtie van vele wiskundigen. Voor we dit hoofdstuk behandelen vervolgende we de beantwoording van *wat is wiskunde?* door het computerbewijs van de Vierkleurenstelling te beschouwen. Dit bewijs bestaat deels uit het nagaan van een reduceerbaarheid bepaalde onvermijdbare kaartconfiguraties. Vanwege alle gevalsonderscheiden is dit een te lang proces voor een mensenleven. Voor een computer is dit gesneden koek: het kostte slechts 1200 uur.

Volgens Tymoczko representeert de grootschalige acceptatie van dit bewijs een aardverschuiving in de filosofie van de wiskunde. Filosofen van de wiskunde moeten vrede hebben met bewijzen die niet-surveyable zijn en met experimentele methodes. Hierdoor wordt wiskundige kennis deels a posteriori. Deze inzichten, gecombineerd met de inzichten over het formalisme en Wittgensteins latere filosofie zijn de inspiratiebron voor een nieuwe theorie, dat wij tot het *Wittgensteiniaans formalisme* hebben gedoopt. Deze theorie is een poging tot het verklaren van de relatie tussen de wiskundige praktijk en de wiskunde-als-object. Vanuit deze theorie kunnen we definitief afrekenen met Frege's kritieken en een gemodificeerde variant van het formalisme accepteren. De afrekening gaat als volgt:

1. Toepasbaarheid Frege schetst een vals dilemma tussen 'spel' en 'inhoud'. Een spel is al betekenisvol, niet vanwege betekenisvolle spel*stukken*, maar vanwege een betekenisvolle spel*structuur*. Axiomatisering is het vastzetten van een inhoudelijke ontwikkeling van een structuur, niet het kiezen van arbitraire regels.
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en oneindige rijen $\sqrt{2}$ en π zijn betekenis- en waardevolle denkinstrumenten in het wiskundige spel. Op deze manier krijgen ze een rol in een betekenisvol spel. Frege's opvattingen berusten op een fout gebruik van 'bestaan' en 'betekenis'. Deze noties moeten we functioneel en

niet statisch opvatten. Wiskundige entiteiten bestaan als ze een functie bekleden binnen een betekenisvol spel.

3. Het spel en de theorie van het spel Deze kritiek berust op de aanname dat de spelregels van de wiskunde arbitrair worden gekozen, in het bovenstaande hebben we aangetoond dat dit niet is wat ons formalisme voorschrijft. Hilberts visie van een wiskunde en een ondersteunende wiskundige logica is het beste antwoord op deze kritiek.

Frege's kritiek op het formalisme weerhield ons ervan de slogan 'wiskunde is een spel' te aanvaarden. Nu we Frege's kritiek stapsgewijs hebben kunnen pareren en een formalistische filosofie kunnen formuleren met daarin een genuanceerde en serieuze karakterisering van het begrip 'spel' volgt het eindoordeel: wiskunde is inderdaad een spel.

Bibliografie

Appel, Kenneth en Wolfgang Haken. 1977. “The Solution of the Four-Color-Map Problem.” *Scientific American* 237(4): 108–121.

Avigad, Jeremy en Erich H. Reck. 2001. ““Clarifying the nature of the infinite”: the development of metamathematics and proof theory.”

Buss, Samuel R.. 1998. ”An Introduction to Proof Theory”. In *Handbook of Proof Theory*. Geredigeerd door Samuel R. Buss, 1-78. Amsterdam: Elsevier.

Frege, Gottlob. 1977. *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege*. Vertaald, ingeleid en van commentaar voorzien door P. T. Geach, and Max Black. Oxford: Basil Blackwell.

Gonthier, Georges. 2008. ”Formal Proof – The Four-Color Theorem”. *Notices of the AMS* 55(11): 1382-1393.

Haken, Wolfgang. 2006. ”An Attempt to Understand the Four-Color Theorem”. *Journal of Graph Theory* 1(3): 193-206.

Hilbert, David. 1967. ”On the Infinite”. In *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Geredigeerd door Jean van Heijenoort, 367-392. Cambridge, MU: Harvard University Press.

Hilbert, David. 2005. ”Axiomatic thought”. In *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, Volume II*. Geredigeerd door William Ewald, 1105-1115. Oxford: OUP.

Kenny, Anthony. 2006. *Wittgenstein*. Oxford: Blackwell.

Kleiner, Israël. 2007. *A History of Abstract Algebra*. Boston: Birkhäuser.

McGinn, Marie. 2013. *The Routledge Guidebook to Wittgenstein’s Philosophical Investigations*. London: Routledge.

Schrijver, Alexander. *Grafen: Kleuren en Routeren*.

Sieg, Wilfried. 2009. ”Hilbert’s Proof Theory. In *The Handbook of the History of Logic*. Geredigerd door Dov Gabbay, 321-384. Amsterdam: Elsevier. Shapiro, Stewart. 2000. *Thinking about Mathematics*. Oxford: OUP.

Stenlund, Sören. 2018. ”Frege’s Critique of Formalism”. In *New Essays on Frege: Between Science and Literature* geredigeerd door Gisela Bengtsson, Simo Säätelä en Alois Pichler, 75-86. Dordrecht: Springer.

Stern, David G. 2004. *Wittgenstein’s Philosophical Investigations: an introduction*. Cambridge: CUP.

Tymoczko, Thomas. 1979. ”The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance”. *The Journal of Philosophy* 76(2): 57-83.

Weir, Alan. 2022. “Formalism in the Philosophy Mathematics” In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, 1997-2023. Gepubliceerd op 12 Januari, 2022.

Wiedijk, Freek. *Formalizing 100 Theorems*. https://www.cs.ru.nl/ freek/100/index.html.

Wilson, Robert A. 2002. *Graphs, Colourings and The Four-Color Theorem*. Oxford: OUP.

Wilson, Robin. 2014. *Four Colors Suffice*. Ingeleid door Ian Stewart. Princeton: PUP.

Wittgenstein, Ludwig. 1976. *Filosofische Onderzoekingen*. Vertaald door Hans. W. Bakx en ingeleid door R.F. Beerling. Meppel: Boom.

Zach, Richard. 2006. ”Hilbert’s program then and now.”In *Handbook of the Philosophy of Science, vol. 5.*. Geredigeerd door Dale Jacquette, 411-447. Amsterdam: Elsevier.

Zach, Richard. 2021. ”Hilbert’s Program”. In *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Stanford University, 1997-2023. Gepubliceerd op 31 Juli, 2003.