Wanneer ga ik dood?

Klaas Landsman

Radboud Universiteit Nijmegen
Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics
Toernooiveld 1, 6525 ED NIJMEGEN
email landsman@math.ru.nl

28 februari 2008

Samenvatting

Tijdens FYSICA 2008 op 18 april in Nijmegen vindt onder de titel *Controversies in physics* een parallelsessie plaats over determinisme. Na een inleiding door grondslagenonderzoeker Dennis Dieks zal Gerard 't Hooft de tegendraadse stelling verdedigen dat de natuur ondanks het beeld dat de kwantummechanica schetst deterministisch is. Hier zal mathematisch fysicus Hans Maassen vervolgens op reageren. Het onderstaande artikel bereidt de lezer op deze discussie.

1 Een controverse in de natuurkunde

Iedere fysicus heeft geleerd dat het zeker is dát een radioactieve atoomkern ooit vervalt, maar dat het precieze moment waarop dat gebeurt onzeker is en slechts achteraf bepaald kan worden. Iets soortgelijks lijkt te gelden voor ons eigen leven, waarbij we ons uiteraard moeten afvragen of we ook zouden wíllen weten wanneer we sterven. Een ander voorbeeld is een polaroidglas. Stel voor het gemak dat dit de helft van het binnenkomende licht doorlaat en dat de andere helft wordt geabsorbeerd. Wordt één gegeven invallend foton doorgelaten of geabsorbeerd? Ook dat is volgens de huidige natuurkunde toevallig: de kwantumtheorie voorspelt kansen op bepaalde uitkomsten, maar is niet in staat te voorspellen wélke uitkomst met zekerheid plaatsvindt.

We zijn inmiddels zó aan dit argument gewend geraakt, dat vrijwel niemand nog stilstaat bij de vraag hoe het überhaupt mogelijk is dat iets kan gebeuren zonder oorzaak, of wat fundamenteel toeval eigenlijk betekent. Evenmin vragen we ons nog af of de kwantumtheorie zelf, of anders misschien onze probabilistische interpretatie daarvan, het wel bij het rechte eind heeft. Natuurkundigen met enig historisch besef weten dat dergelijke vragen ooit, kort na het ontstaan van de kwantummechanica, het onderwerp waren van verhitte debatten tussen Albert Einstein en Niels Bohr (met in diens kielzog Werner Heisenberg en Wolfgang Pauli), en dat de laatste triomfantelijk uit deze strijd tevoorschijn kwam [1, 2]. Sindsdien rekenen we halfwaardetijden en werkzame doorsneden uit met behulp van de Born-regel uit de kwantummechanica en stellen we tevreden vast dat statistische gemiddelden over een groot aantal metingen geheel met dergelijke berekeningen overeenstemmen.

Eind vorig jaar vroeg de redactie van het tijdschrift *nwt* (*natuurwetenschap & techniek*) een aantal vooraanstaande wetenschapsbeoefenaren waarover ze het met al hun collega's oneens waren. In zijn antwoord op deze vraag [3] schrijft Gerard 't Hooft: "Ik ben een van de weinigen die stelt dat een volledige theorie alleen maar over zekerheden mag gaan. (. . .) Mijn vermoeden is dat niet de natuur, maar onze huidige kennis ervan kwantummechanisch is. De wetten die wij kennen, leveren slechts kansverdelingen op, omdat wij de eigenlijke wetten (nog?) niet kennen." Dit was precies het standpunt van Einstein, en 't Hooft gaat dan ook verder met de opmerking dat de meeste van zijn collega's hem "met wisselende hoeveelheden takt" vertellen dat zijn opvatting sinds het begin van de vorige eeuw achterhaald is en bovendien door de theorema's van John Bell is weerlegd. Hoe slecht de opvattingen van het enige genie dat Nederland naast Ton Sijbrands momenteel rijk is inderdaad liggen, bleek bijvoorbeeld uit het feit dat geen enkele spreker - uit een consortium van collega-Nobelprijswinnaars en andere coryfeeën - het tijdens de conferentie ter ere van 't Hoofts zestigste verjaardag (op Terschelling, 14-16 juli 2006) voor hem opnam. Een door 't Hooft in 2007 bij de FOM ingediend voorstel voor een zogenaamd *Vrij Programma*, waarin onder meer onderzoek naar deterministische varianten van de kwantumtheorie werd voorgesteld, haalde niet eens de *shortlist*. Wie in Nederland onderzoek wil doen naar dit soort vragen moet kennelijk zijn toevlucht nemen tot de *Templeton Foundation*.

2 Wat is (in)determinisme?

Alvorens een standpunt te bepalen, zou men het eerst eens moeten worden over de precieze vraagstelling. Dat is niet eenvoudig. Ten eerste is het allerminst duidelijk wat de begrippen determinisme en haar tegenpolen, indeterminisme en toeval, precies betekenen. Gaat het hier om mogelijke eigenschappen van de natuur? Of eerder van de natuur*kunde*, in de zin dat juist de middelen die wij hebben om tot kennis over de natuur te komen een beslissende rol spelen? Dit laatste was de opvatting van de filosoof Immanuel Kant, die van mening was dat het zinloos was dergelijke eigenschappen aan de natuur *an sich* toe te schrijven. Ook Bohr was deze mening toegedaan [4], maar waar Kant een natuur*kunde* zonder *a priori* determinisme niet mogelijk achtte, trok Bohr zoals al opgemerkt de tegengestelde conclusie dat onze kennis van de natuur volgens de kwantummechanica juist tot *in*determinisme leidt.

Het standpunt van Kant en Bohr dat we niets kunnen weten over de natuur zelf heeft tegenwoordig niet veel aanhangers meer, maar het onderscheid dat zij maken tussen de natuur zelf en onze kennis daarvan is wel degelijk verhelderend. In de kwantumfysica kan men bijvoorbeeld Einstein in principe recht doen met de opmerking dat de natuur (zoals beschreven door de Schrödinger-vergelijking) deterministisch is, terwijl Bohr zonder Einstein tegen te spreken mag opmerken dat onze ervaring van de natuur indeterministisch is vanwege de noodzaak er als het ware door een klassieke bril naar te kijken. Inderdaad kan het probabilistische karakter van de kwantumtheorie op die manier begrepen worden [5].

Maar ook binnen het raamwerk van de klassieke fysica kan men zo begrijpen waarom de natuur vaak een indeterministische indruk maakt: twee belangrijke bronnen van toeval in de macroscopische wereld liggen namelijk in ons zelf. De eerste, pas goed uitgewerkt en omgezet in kanstheoretische uitspraken door Henri Poincaré [6, 7], is ons gebrek aan precieze kennis van de toestand van een systeem. De tweede, die haar oorsprong heeft in de statistische mechanica van Gibbs, Boltzmann en Einstein, is de praktische noodzaak tot uitmiddelen over grote aantallen (micro-) toestanden en/of de tijd [6, 8].

We nemen voorlopig aan dat de natuur*wetten* op de natuur zelf slaan en vragen ons eerst af wat het wiskundig zou kunnen betekenen dat deze deterministisch zijn. Deze vraag is eenvoudig te beantwoorden. Een fysisch systeem wordt beschreven door een ruimte S van mogelijke toestanden en een bewegingsvergelijking $\dot{x}(t) = H(x(t))$, met $x \in S$ en H een gegeven functie op S. Hierbij kunnen we denken aan S als faseruimte, zoals in de klassieke mechanica, waar $x = (p, q)$ de kanonieke variabelen zijn, of aan S als Hilbert-ruimte, als in de kwantummechanica, waar $x = \psi$ de golf-functie is. We zeggen nu dat het systeem *deterministisch* is als $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ impliceert dat $x_1(t) = x_2(t)$ voor alle $t > t_0$. Met andere woorden, de dynamica $x(t_0) \mapsto x(t)$ moet bestaan en uniek zijn.

Isaac Newton geldt als de vader van het wetenschappelijke determinisme, omdat vrijwel iedereen denkt dat zijn klassieke mechanica in de bovengenoemde zin deterministisch is. Klopt dat ook? Allereerst was Newton zelf allerminst een determinist: hij geloofde in een voortdurend goddelijk ingrijpen in de natuur en deed zelfs in zijn officiële werk uitspraken als "No variation of things arises from blind metaphysical necessity" en "The fabrick of the universe, and course of nature, could not continue for ever in its present state, but would require, in process of time, to be re-established or renewed by the same hand that formed it" [9]. Newtons indeterminisme was klaarblijkelijk religieus gemotiveerd, maar hij had het ook wiskundig kunnen onderbouwen, als volgt.

3 Is de klassieke fysica deterministisch?

De bewegingsvergelijkingen van Newton (in Hamiltoniaanse vorm) zijn $\dot{q}(t) = p(t)$ en $\dot{p}(t) = F(q(t))$. Neem nu een deeltje met massa $m = 1$ dat in één dimensie beweegt en de kracht $F(q) = 6\,\mathrm{sgn}(q)|q|^{1/3}$ ondergaat. Met de begincondities $q(0) = 0$ en $p(0) = 0$ (zodat het deeltje op tijdstip $t = 0$ in rust in de oorsprong is) blijken de volgende drie uitdrukkingen alle oplossingen van de bewegingsvergelijkingen te zijn: $q(t) = 0$ voor alle t, $q(t) = t^3$, en $q(t) = -t^3$ [10]. Kennelijk heeft het deeltje de 'keuze' om te blijven liggen, of naar links te bewegen, of ook naar rechts te bewegen. De beweging blijkt dus bepaald niet uniek te zijn! Dit komt, zoals ieder boek over gewone differentiaalvergelijkingen leert, omdat de kracht niet aan een Lipschitz voorwaarde voldoet. Veel fysici zullen opmerken dat voorbeelden waarbij dat zo is kunstmatig zijn. Voor eindig veel vrijheidsgraden mag dit zo zijn, maar ook in de hydrodynamica treedt de niet-uniciteit van oplossingen op, zelfs al bij de Euler-vergelijking [11].

Behalve de *uniciteit* van de oplossing blijkt ook haar *bestaan* een probleem te kunnen zijn, in de zin dat de beweging op een bepaald eindig tijdstip t_0 singulier kan worden en daarna eenvoudigweg niet meer gedefinieerd is. Formeel betekent dit, dat de oplossing van de bewegingsvergelijking voor $t \geq t_0$ niet bestaat. Dit verschijnsel heet *incompleetheid* van de beweging en is, als men er eenmaal voor open staat, naast gebrek aan uniciteit een tweede belangrijke bron van 'objectief' indeterminisme in de klassieke fysica [12]. Het allereenvoudigste voorbeeld is een vrij deeltje op een tafel (gezien als het hele universum waarin het deeltje zich beweegt), dat daar bij willekeurige beginsnelheid ongelijk nul onherroepelijk in eindige tijd vanaf valt: de singulariteit is de rand van de tafel. Als men de kamer waar de tafel in staat echter in de beschrijving meeneemt, vervalt de singulariteit en daarmee het voorbeeld uiteraard. 'Echte' singulariteiten vindt men in de algemene relativiteitstheorie van Einstein, waarin ze volgens stellingen van Stephen Hawking en Roger Penrose zelfs onvermijdelijk zijn: denk aan zwarte gaten en de oerknal [13, 14].

Maar ook de alledaagse Newtoniaanse fysica geeft aanleiding tot incomplete beweging. Om dit te illustreren nemen we de kracht $F(q) = q^3$ bij begincondities $q(0) = 0$ en $p(0) = 5$. Dit voorbeeld is (bij mijn weten) alleen numeriek op te lossen, waaruit blijkt dat het deeltje rond tijdstip $t = 1$ *verdwijnt* in de zin dat het dan al oneindig ver weg is; de bewegingsvergelijkingen hebben ná die tijd geen oplossing. Terugkijkend in de tijd *verschijnt* het deeltje rond $t = -1$, i.e. de vergelijkingen hebben vóór die tijd geen oplossing. Een ander voorbeeld waarin deeltjes in eindige tijd naar oneindig kunnen verdwijnen is het n-deeltjesprobleem (i.e. onder invloed van gravitatie) voor $n \geq 5$ [15]. Ook de Navier-Stokes vergelijkingen geven voorbeelden van incomplete beweging: de wiskundige verklaring van turbulentie is nauw gerelateerd aan het 'opblazen' van gladde oplossingen van deze vergelijkingen, in de zin dat deze na een bepaalde tijd hun regulariteit verliezen en daarmee (in de ruimte van gladde oplossingen) ophouden te bestaan [16, 17]. Het bewijs dat dit in $d = 3$ al dan niet gebeurt is één van de belangrijkste open problemen van de mathematische fysica en is - evenals de constructie van kwantum Yang–Mills theorie - zelfs op de prestigieuze lijst van zeven *Clay Millennium Problems* van de wiskunde als geheel geplaatst [18]: voor iedere oplossing is een miljoen dollar uitgeloofd!

4 Is de kwantumfysica deterministisch?

Deze vraag is dubbelzinnig en daarom niet zonder meer te beantwoorden. Zoals we hebben gezien moeten we (net als in de klassieke nauurkunde!) een onderscheid aanbrengen tussen enerzijds de 'kale' theorie en anderzijds metingen en andere vormen waarin de kwantumwereld zich aan ons manifesteert. De kale kwantumtheorie draait om Hilbert-ruimten, operatoren en de Schrödinger-vergelijking, en gedraagt zich wat (in)determinisme betreft duidelijk anders dan de theorie van Newton, maar niet in de verwachte richting van meer indeterminisme... Integendeel, de twee mogelijke 'objectieve' bronnen van indeterminisme in de klassieke mechanica, i.e. het niet-bestaan en de niet-uniciteit van de oplossing van de bewegingsvergelijking, hebben juist geen evenknie in de kwantummechanica! Als de Hamiltoniaan goed gedefinieerd is (technisch gesproken als een zelfgeadjungeerde operator), dan heeft de Schrödinger-vergelijking een unieke oplossing die voor alle tijden bestaat [19]. In het bijzonder is incomplete beweging in de 'kale' kwantumtheorie onmogelijk vanwege unitariteit, hetgeen de vraag stelt hoe dergelijke bewegingen niettemin uit de klassieke limiet van de kwantumtheorie voort kunnen komen [5]. Een eenvoudig voorbeeld is het eerder genoemde deeltje op een tafel, dat er klassiek afvalt maar kwantummechanisch een staande golf vormt, die eeuwig heen en weer blijft bewegen. Zo is ook de oerknal volgens de kwantumtheorie helemaal niet mogelijk [20].

Waar komt het probabilistische karakter van de kwantummechanica dan eigenlijk vandaan? Dat komt volgens Bohr en Heisenberg voort uit de noodzaak de kwantummechanica door middel van de klassieke fysica te interpreteren [21]. En dan blijkt het onmogelijk te zijn om te veel kwantummechanische variabelen tegelijk als klassieke variabelen met een scherpe waarde te beschouwen. Deze onmogelijkheid bleek in eerste instantie uit de onzekerheidsrelaties van Heisenberg en is later bevestigd door talloze stellingen, zoals die van von Neumann, Kochen & Specker, Bell, en anderen [22]. Wel is het mogelijk om deze variabelen als 'onscherpe' klassieke grootheden met een bepaalde spreiding op te vatten en de kwantumtheorie daarmee statistisch te interpreteren. Men ziet daarbij af van het voorspellen van individuele uitkomsten van experimenten en stelt zich tevreden met het berekenen van kansverdelingen over allerlei mogelijke uitkomsten. Zoals al aan het begin van dit artikel opgemerkt is deze procedure inmiddels routine geworden en krijgt men meewarige blikken en soms zelfs geringschattende opmerkingen toegeworpen wanneer men zich in het openbaar afvraagt wat er eigenlijk achter deze routine zit en of deze wel gerechtvaardigd is.

Een belangrijke vraag is in welk opzicht het statistische karakter van de kwantumtheorie zoals die zich via metingen aan ons voordoet objectief is en hoe dat verschilt van een klassieke statistische theorie, waarin het toeval een gevolg is van subjectieve onzekerheid over de toestand (zie boven). Onderdeel van deze vraag is hoe de kwantummechanische kansen geïnterpreteerd moeten worden. Daarbij heeft men tenminste de keuze uit de traditionele twee opties [23]: de 'subjectieve' of Bayesiaanse, waarin kansen worden gerelateerd aan mate van geloof (die zich dan weer vertaalt in de bereidheid om bepaalde weddenschappen af te sluiten op de uitkomst van een experiment) en de 'objectieve' frequentie-interpretatie, waarin kansen slaan op oneindige reeksen experimenten. Ofschoon de Bayesiaanse aanpak op alle fronten terrein aan het winnen is [24], zullen de meeste fysici hun dagelijkse praktijk niet vanuit de gokwereld willen rechtvaardigen en zien ze deze (in geïdealiseerde vorm) beter weerspiegeld in de frequentie-interpretatie. Hier zijn echter wiskundige en conceptuele problemen aan verbonden, waarvan ik er in het licht van de vraag aan het begin van deze paragraaf slechts één wil noemen.

Kunnen we uit een (zeer lange of oneindige) reeks meetuitkomsten van een gegeven variabele in een bepaalde toestand zien of deze reeks 'random' is, en zo ja, of het toevalskarakter een gevolg is van onwetendheid of 'irreducibel' is? Concreet kunnen we denken aan een meting van de z-component van de spin van een elektron in de toestand $|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$; we verwachten dan een reeks enen (voor *spin up*) en nullen (voor *spin down*) die met gelijke frequentie $1/2$ voorkomen, maar zouden raar opkijken en het experiment niet geloven als er bijvoorbeeld $010101010101010\cdots$ uitkwam.

De juiste definitie van een 'random sequence' is buitengewoon subtiel omdat vele valkuilen vermeden moeten worden. Zo lijkt de decimaalexpansie van π aan de ene kant toevallig omdat alle cijfers er even vaak en evenwichtig verspreid in voorkomen, maar weten we aan de andere kant uit ons eerste jaar op de universiteit dat deze expansie berekenbaar (en daarmee voorspelbaar) is. Na lang zoeken is door Kolmogorov en anderen een definitie voorgesteld die er ruw gezegd op neerkomt dat een (eindige) reeks toevallig is als er geen (op een universele Turing machine te draaien) computerprogramma bestaat dat die reeks genereert en korter is dan die reeks [25, 26]. Met andere woorden, een toevalsreeks is niet te comprimeren zonder verlies aan informatie. Ofschoon de eigenschap van randomness in de meeste gevallen onbeslisbaar blijkt te zijn, kan bewezen worden dat het bovengenoemde experiment inderdaad altijd een toevalsreeks in deze zin oplevert [27]. Het probleem is dat het werpen van een eerlijke munt ook een toevalsreeks in de zin van Kolmogorov geeft!

Om het verschil tussen klassieke en kwantummechanische experimenten numeriek te kunnen vaststellen moeten we kijken naar correlaties tussen verschillende meetuitkomsten, zoals voor het eerst ingezien door Einstein (met zijn medewerkers Podolsky en Rosen) en later uitgewerkt door John Bell. Dit leidt ons tot de wondere wereld van de Bell-ongelijkheden [22], waarvan het meest eenvoudige voorbeeld aan scholieren uit te leggen is [28] en als volgt luidt. Stel dat Alice steeds variabelen A_1 of A_2 meet en Bob tegelijk variabelen B_1 of B_2, alle met mogelijke uitkomsten ± 1. Stel tevens dat:

1. Het toeval in de meetuitkomsten het gevolg is van onwetendheid (zodat deze uitkomsten volgens de zogenaamde *Dutch Book* stelling uit de Bayesiaanse theorie [23] door een klassieke kansverdeling gemodelleerd kunnen worden);

2. De uitkomsten van de experimenten van Alice niet afhangen van de variabelen die Bob meet en evenmin van de uitkomsten van de experimenten van Bob, en vice versa.

Dan geldt de Bell-ongelijkheid $P(A_1 \neq B_1) \leq P(A_1 \neq B_2) + P(A_2 \neq B_1) + P(A_2 \neq B_2)$, waarbij $P(A_i \neq B_j)$ staat voor de kans (in de frequentie-interpretatie) dat meting van A_i door Alice (in een gegeven ronde) een ander resultaat geeft dan meting van B_j door Bob, mochten deze gelijktijdig gemeten zijn. Aangezien deze ongelijkheid zowel door de voorspellingen van de kwantumtheorie als door het experiment worden geschonden, is minstens één van deze twee aannamen onjuist. Welke? Volgelingen van de mysticus David Bohm geven de tweede aanname en daarmee de localiteit van de natuur(kunde) à la Einstein op in de hoop daarmee het determinisme te kunnen redden. De meeste fysici willen echter niet graag weten wanneer ze doodgaan!

Referenties

[1] N. Bohr, Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (P.A. Schlipp, Ed.), pp. 201–241 (Open Court, La Salle, 1949).

[2] A. Pais, *Subtle is the Lord: The Science and Life of Albert Einstein* (Oxford University Press, 1982).

[3] G. 't Hooft, Kwantummechanica is slechts dwaalspoor, nwt **76** no. 1 (januari 2008), 77. Ook te lezen op `www.nwtonline.nl`.

[4] Een bekend citaat van Bohr is bijvoorbeeld: "There is no quantum world. There is only an abstract quantum-physical description. It is wrong to think that the task of physics is to find out how nature is. Physics concerns what we can say about nature." Zie N.D. Mermin, What's wrong with this quantum world?, *Physics Today* **57** (2), 10 (2004).

[5] N.P. Landsman, Between classical and quantum, in *Handbook of the Philosophy of Science Vol. 2: Philosophy of Physics, Part A*, pp. 417-553 (North-Holland, Amsterdam, 2007).

[6] J. von Plato, *Creating Modern Probability: Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective* (Cambridge University Press,1994).

[7] E.M.R.A. Engel, *A Road to Randomness in Physical Systems*, Lecture Notes in Statistics **71** (Springer-Verlag, Berlin, 1992).

[8] G.G. Emch & C. Liu, *The Logic of Thermostatistical Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 2002).

[9] Isaac Newton, *The Principia*, A new translation by I.B. Cohen & A. Whitman (Univ. of California Press, Berkeley, 1999). De geciteerde uitspraken staan in het *General Scholium*, dat Newton in de tweede editie van 1713 toevoegde.

[10] Sterker nog, voor iedere constante $k > 0$ zijn $x(t) = 0$ voor $t < k$ en $x(t) = \pm(t-k)^3$ voor $t \geq k$ oplossingen.

[11] A. Shnirelman, Weak solutions of incompressible Euler equations, in *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, Vol. II*, pp. 87–116 (North-Holland, Amsterdam, 2003).

[12] Een oplossing die zowel in de toekomst als het verleden incompleet is (i.e. slechts voor een compact tijdsinterval gedefinieerd is), is bij lineaire vergelijkingen tevens een bron van niet-uniciteit. Dit is bijvoorbeeld zo bij het boven besproken geval van de Euler-vergelijking.

[13] S.W. Hawking & G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973).

[14] C.J.S. Clarke, *The Analysis of Space-Time Singularities* (Cambridge University Press, 1993).

[15] Z. Xia, The existence of noncollision singularities in Newtonian systems, *Ann. Math.* **135**, 411–468 (1992). In 1895 bewees Painlevé dat dergelijke singulariteiten voor $n \leq 3$ niet op kunnen treden. Painlevé en Poincaré waren vermoedelijk de eersten die de mogelijkheid van incomplete beweging door het bereiken van oneindig in eindige tijd inzagen.

[16] H. Sohr, *The Navier-Stokes Equations* (Birkhäuser Verlag, Basel, 2001).

[17] A. Majda & A. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow* (Cambridge University Press, 2002).

[18] Zie `www.claymath.org/millennium/`.

[19] Dit is een gevolg van de stelling van Stone, zie bijvoorbeeld M. Reed & B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol I: Functional Analysis* (Academic Press, New York, 1972). Om zo iets te krijgen als incomplete beweging zou men naar Hamiltonianen moeten kijken die niet zelfgeadjungeerd zijn, hetgeen ons echter buiten de gebruikelijke kwantumtheorie zou plaatsen.

[20] K. Landsman, Kwantummechanica verbiedt oerknal, nwt **76** no. 1 (januari 2008), 75. Ook te lezen op `www.nwtonline.nl`. Met geheel andere argumenten wijst Stephen Hawking al decennia op de onmogelijkheid van de oerknal in de kwantumkosmologie. Roger Penrose heeft hier in voordrachten met titels als "Before the Big Bang: an outrageous solution to a profound cosmological puzzle" de afgelopen jaren een concrete invulling aan gegeven.

[21] W. Heisenberg, *Physics and Philosophy: The Revolution in Modern Science* (Allen & Unwin, London, 1958).

[22] J. Bub. *Interpreting the Quantum World* (Cambridge University Press, 1999).

[23] D. Gillies, *Philosophical Theories of Probability* (Cambridge University Press, 2000).

[24] L. Bovens & S. Hartmann, *Bayesian Epistemology* (Oxford University Press, 2003).

[25] M. Li & P.M.B. Vitányi, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications, 3d ed.* (Springer, Heidelberg, 2008).

[26] K. Svozil, *Randomness and Undecidability in Physics* (World Scientific, River Edge, NJ, 1993).

[27] S. Gutmann, Using classical probability to guarantee properties of infinite quantum sequences, *Phys. Rev.* **A 52**, 3560–3562 (1995).

[28] M. Dekkers & K. Landsman, *Bestaat Toeval?* `www.math.ru.nl/~landsman/bestaattoeval.pdf`.