Leidraad bij het college

Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen (voorjaar 2007)

Klaas Landsman

Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics
Radboud Universiteit Nijmegen
Toernooiveld 1
6525 ED NIJMEGEN

e-mail: `landsman@math.ru.nl`
website: `http://www.math.ru.nl/~landsman`
tel.: 024-3652874
kamer: HG03.078

Werkcollege:

Walter van Suijlekom `waltervs@math.ru.nl`

Schema (weken 6, 7, 9–14, 16, 17, 19–25):

donderdag 08:45–10:30 **hoorcollege** in HG01.058;

dinsdag 12:45–14:30 **werkcollege** in HG03.082

Literatuur:

R. Abraham & J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (Addison–Wesley, 1985).

Vladimir I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations* (Springer, 2004).

Vladimir I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (Springer, 2006).

K.E. Gustafson, *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods* (Dover, 1999).

Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction* (Wiley, 1992).

1 Eerste orde PDV

1.1 Vector-velden en homogene lineaire eerste orde PDV's

Een homogene lineaire eerste orde PDV in $\mathbb{R}^n$ heeft de vorm

$$L_v(x)u(x) = 0, \tag{1}$$

waarbij $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de gezochte functie is (bij voorkeur glad, i.e. C^∞), $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een vector-veld op $\mathbb{R}^n$ met componenten $(v^1(x), \ldots, v^n(x))$, eveneens bij voorkeur glad, en ten slotte

$$L_v(x) := \sum_{k=1}^{n} v^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{2}$$

We schrijven de PDV (1) meestal als

$$L_v u = 0. \tag{3}$$

Neem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vast. Een *integraalkromme* ofwel de *stroom* van het vector-veld v door x_0 is een interval $I_{x_0} = (-\varepsilon, \varepsilon)$ voor een zekere $\varepsilon > 0$ en een differentieerbare afbeelding $c : I_{x_0} \to \mathbb{R}^n$ die voldoet aan

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= v(c(t)); && (4) \\ c(0) &= x_0 && (5) \end{aligned}$$

voor alle $t \in I_{x_0}$. Het vector-veld v raakt dus aan c in ieder punt waarin deze kromme gedefinieerd is. Vaak kan $\varepsilon = \infty$ worden gekozen, maar niet altijd (zie opgaven). Als v glad is, bestaat een dergelijke kromme voor iedere x_0 en is dan glad en uniek; zie Abraham & Marsden, Theorem 2.1.2, p. 62. Bovendien is het zo dat verschillen waarden van $\varepsilon > 0$ met elkaar consistente oplossingen geven: als $c_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ en $c_2 : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ beide oplossingen van (4) en (5) zijn met $\delta < \varepsilon$, geldt $c_1(t) = c_2(t)$ voor alle $t \in (-\delta, \delta)$ (hoe kan het ook anders). Het is gebruikelijk om $\varphi_t(x_0)$ te schrijven voor $c(t)$ met beginwaarde (5), en dan volgt de eigenschap (ga na)

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x) \tag{6}$$

voor alle s en t waarvoor de oplossingen gedefinieerd zijn.

De uniciteit van deze oplossing en de eigenschap (6) leiden ertoe dat twee integraalkrommen elkaar nooit kunnen snijden (ze kunnen wel gesloten zijn). Als we het punt x_0 door de hele $\mathbb{R}^n$ laten lopen, zien we dat $\mathbb{R}^n$ wordt opgedeeld in integraalkrommen van het gegeven vector-veld. Technisch gesproken definieert v een zogenaamde (mogelijk singuliere) *foliatie* van $\mathbb{R}^n$. Een foliatie kan worden gezien als een speciaal geval van een equivalentierelatie: twee punten zijn equivalent als ze op dezelfde kromme liggen. Deze "krommen" kunnen overigens ook dimensie 0 hebben: als bijvoorbeeld $v(x) = 0$ voor alle x, dan zijn de integraalkrommen van de vorm $c(t) = x_0$ voor alle t en zijn ze dus punten. In het algemeen kunnen de dimensies 0 en 1 door elkaar voorkomen (bedenk een voorbeeld!).

De allereenvoudigste PDV is

$$\frac{\partial}{\partial x^1} u(x^1, x^2) = 0. \tag{7}$$

De oplossing is

$$u(x^1, x^2) = f(x^2), \tag{8}$$

waar f een willekeurige functie is. Deze PDV is van de vorm (1), met $v(x) = (1, 0)$ (dus onafhankelijk van x). De integraalkrommen van v zijn de horizontale lijnen y = constant, ofwel $\varphi_t(x^1, x^2) = (x^1 + t, x^2)$. We zien dat de oplossing de eigenschap heeft dat u constant is langs iedere integraalkromme van v. Dit is een algemeen feit.

Stelling 1 *Een functie u is een oplossing van* (1) *desda als u constant is langs iedere integraalkromme van v.*

Dit volgt onmiddellijk uit de kettingregel voor differentiatie en (4):

$$\frac{d}{dt}u(c(t)) = \sum_k \dot{c}^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k} = L_v(c(t))u(c(t)). \tag{9}$$

1.2 Praktische oplosmethode

Een echte wiskundige zou zeggen dat Stelling 1 alles zegt over (1). Maar een ingenieur of fysicus wil graag een concrete oplossing zien. Dat kan voor $n = 2$ soms met de methode die Strauss geeft; we schrijven (x, y) i.p.v. (x^1, x^2), zodat (1) luidt:

$$v^1(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + v^2(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \tag{10}$$

Dit gaat als volgt.

1. Los op de GDV
$$y'(x) = \frac{v^2(x,y)}{v^1(x,y)}. \tag{11}$$
Deze oplossing bevat een integratieconstante C, waarvan de waarde bepaalt op welke integraalcurve (x, y) ligt.

2. Schrijf de aldus gevonden relatie tussen y en x als $h(x, y) = C$.

3. De oplossing van (1) is nu
$$u(x,y) = f(h(x,y)), \tag{12}$$
met f willekeurig.

Stel namelijk dat $(x(t), y(t))$ een integraalkromme van v is. Dan is met de kettingregel

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v^2(x(t),y(t))}{v^1(x(t),y(t))}.$$

Omgekeerd is de grafiek van de functie $x \mapsto y(x)$, waarbij $y(x)$ voldoet aan (11), een integraalkromme van v. De conditie $h(x, y) = C$ geldt dus desda $y = y(x)$ en dat is zo desda het paar (x, y) een gegeven integraalkromme van v doorloopt. Als nu (12) geldt, is u constant (te weten gelijk aan $f(C)$) op iedere integraalkromme. Volgens Stelling 1 is u dan een oplossing van de PDV (1).

Deze laatste bewering is expliciet na te rekenen. Als $c(t) = (x(t), y(t))$ een oplossing van (4) met (5) is, is geldt zoals uitgelegd $h(x(t), y(t)) = C$, waarbij $C = h(x(0), y(0))$. Differentiatie naar t en inzet van (4) geeft

$$\frac{d}{dt}h(x(t),y(t)) = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dt} = v^1\frac{\partial h}{\partial x} + v^2\frac{\partial h}{\partial y} \equiv \frac{dC}{dt} = 0.$$

Met (12) geeft dit

$$L_v u = v^1\frac{\partial u}{\partial x} + v^2\frac{\partial u}{\partial y} = f'(h)\left(v^1\frac{\partial h}{\partial x} + v^2\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0.$$

Deze methode werkt uiteraard alleen als (11) expliciet op te lossen is en vervolgens het algebraïsche probleem om h te bepalen eveneens te doen is.

Het eenvoudigste voorbeeld waarin dit allemaal lukt is

$$a\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

Dan is (11) de vergelijking $y'(x) = b/a$ met oplossing $y = bx/a + k$ en dus $h(x, y) = ay - bx = ak \equiv C$. We vinden dus

$$u(x,y) = f(ay - bx) \tag{14}$$

als oplossing van (13).

Niet veel ingewikkelder is de PDV

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Nu is (11) de vergelijking $y'(x) = y$ met oplossing $y = C\exp(x)$, en dus $h(x,y) = \exp(-x)y$. De oplossing van (15) is dus

$$u(x,y) = f(e^{-x}y). \tag{16}$$

1.3 Voorbeelden uit de fysica

De klassieke mechanica levert een fraaie illustratie van de begrippen vector-veld en de bijbehorende PDV (1). We nemen $n = 2k$ even en beschouwen $\mathbb{R}^{2k}$ als de faseruimte van een fysisch systeem. We noemen de coordinaten $x = (q,p)$ met $q = (q^1, \ldots, q^k$ en $p = (p_1, \ldots, p_k)$. Een voorbeeld is een deeltje dat zich in $\mathbb{R}^k$ beweegt, maar ook kun je denken aan N deeltjes in dimensie d, zodat $k = Nd$. In het formalisme van Hamilton gaan we uit van de Hamiltoniaan $h : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}$, waarvan we voor het gemak aannemen dat deze C^∞ is (al is dit in veel voorbeelden niet het geval). Bij een deeltje dat met massa m in een potentiaal V beweegt is de Hamiltoniaan zoals bekend

$$h(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \tag{17}$$

waarbij $p^2 := \sum_{j=1}^k p_j^2$. De beweging $t \mapsto (q(t), p(t))$ wordt gegeven door de oplossing van de Hamilton-vergelijkingen

$$\frac{dq^l(t)}{dt} = \frac{\partial h(q(t),p(t))}{\partial p_l}; \tag{18}$$

$$\frac{dp_l(t)}{dt} = -\frac{\partial h(q(t),p(t))}{\partial q^l}. \tag{19}$$

Voor de Hamiltoniaan (17) geeft dit de tweede wet van Newton in de vorm $\dot{q} = p/m$ en $\dot{p} = -\partial V/\partial q$, i.e. $F = ma$ met $F = -\partial V/\partial q$ en $a = \ddot{q}$.

Dit betekent echter dat de beweging niets anders is dan een integraalkromme van het vector-veld

$$v_h := \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial p_l} \\ -\frac{\partial h}{\partial q^l} \end{pmatrix}! \tag{20}$$

In dat geval zijn (18) en (19) namelijk samen te voegen tot (4) met $c(t) = (q(t), p(t))$ en $v = v_h$.

De merkwaardige vorm van het vector-veld (20) valt beter op zijn plaats als het formalisme wordt opgezet vanuit het Poisson-haakje

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \tag{21}$$

Abstract gesproken is het Poisson-haakje een antisymmetrische bilineaire afbeelding van $C^\infty(\mathbb{R}^{2k}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ naar $C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ (gezien als reële vector-ruimte) die voldoet aan de Jacobi-identiteit (ga na)

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} = 0, \tag{22}$$

en tevens aan de Leibniz-regel (ga na)

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g. \tag{23}$$

Met behulp van dit haakje definieren we voor iedere $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ een vector-veld v_h door middel van

$$L_{v_h}u := \{h,u\}. \tag{24}$$

Vergelijken we dit met (2), dan zien we dat v_h precies hetzelfde is als (20). Niet alleen v_h, ook de bewegingsvergelijkingen (18) en (19) kunnen worden herschreven in termen van het Poisson-haakje. Als we de coordinaten q^l en p_l namelijk als functies op $\mathbb{R}^{2k}$ opvatten, en deze functies samenvoegen tot $x = (q, p)$, dan zijn (18) en (19) samen te schrijven als

$$\dot{x}^l = \{h, x^l\}. \tag{25}$$

Ga na dat dit klopt door voor x^l achtereenvolgens q^l en p_l te nemen.

Ten slotte speelt ook de PDV (1) een rol in de fysica: met $v = v_h$ is het de conditie voor een behouden grootheid u. Als namelijk (1) geldt, is u volgens Stelling 1 constant langs de integraalkrommen van v_h, en daarmee langs de baan van het deeltje.

Opmerkelijk genoeg is ook de bewegingsvergelijking van de kwantummechanica, i.e. de Schrödinger-vergelijking, een speciaal geval van dit formalisme. Voor het gemak nemen we aan dat de Hlibert-ruimte H eindig-dimensionaal is (en daarmee van de vorm $H = \mathbb{C}^k$). De Hamiltoniaan $\hat{h}$ is een hermitische lineaire afbeelding $H \to H$ (i.e. $(\varphi, \hat{h}\psi) = (\hat{h}\varphi, \psi)$ voor alle $\varphi, \psi \in H$. De Schrödinger-vergelijking (met $\hbar = 1$) luidt

$$\hat{h}\psi(t) = i\frac{d\psi(t)}{dt}. \tag{26}$$

We beweren nu dat deze vergelijking van de vorm (4) is voor een vector-veld v_h op $\mathbb{C}^k$. Als we $\mathbb{C}^k$ identificeren met $\mathbb{R}^{2k}$, bijvoorbeeld door de standaard-basis in $\mathbb{C}^k$ te kiezen, waarin $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^k)$ met $\psi^l \in \mathbb{C}$ en

$$\psi^l = \frac{q^l + ip^l}{\sqrt{2}}, \tag{27}$$

dan is v_h gegeven door (20) ofwel (24) met de 'klassieke' Hamiltoniaan

$$h(\psi, \overline{\psi}) := (\psi, h\psi). \tag{28}$$

De uitwerking van deze opmerking is een opgave.

1.4 Het Cauchy-probleem

We kijken nog eens naar (7) en (8). We nemen nu de lijn

$$C = \{x^1 = 0\} \tag{29}$$

en eisen dat de oplossing u van (7) een gegeven waarde $u_0 = u_{|C}$ heeft op C. Dan volgt onmiddellijk dat $f(x^2) = u_0(0, x^2)$ voor alle x^2. De oplossing is daarmee uniek, te weten $u(x^1, x^2) = u_0(0, x^2)$.

In hogere dimensie gaat het net zo: als we (7) opleggen in $\mathbb{R}^n$, zodat $u = u(x^1, \ldots, x^n)$, dan is de algemene oplossing $u(x^1, \ldots, x^n) = f(x^2, \ldots, x^n)$. De verzameling C gegeven door (29) is nu een oppervlak van dimensie $n - 1$ in $\mathbb{R}^n$. De eis dat $u = u_0$ op C legt f en daarmee u geheel vast als $u(x^1, \ldots, x^n) = u_0(0, x^2, \ldots, x^n)$.

De verzameling C in $\mathbb{R}^n$ is een voorbeeld van een *Cauchy-oppervlak* voor de gegeven PDV (7). Idealiter heeft een Cauchy-oppervlak $C \subset \mathbb{R}^n$ de functie dat het de oplossing van een PDV uniek vastlegt door de eis dat u op C een gegeven waarde u_0 heeft. In het voorbeeld gebeurt dat ook, maar in het algemeen geldt slechts lokale uniciteit. Bovendien kan niet zomaar ieder oppervlak van dimensie $n - 1$ worden gekozen.

Neem bijvoorbeeld, voor (7) in $n = 2$, de lijn $C = \{x^2 = 0\}$ en schrijf $u_0 = u_{|C}$ voor. Dat is dom! Er zijn twee mogelijkheden. Als u_0 niet constant is, dan is er helemaal geen oplossing, want een oplossing moet constant zijn langs C. Als daarentegen u_0 wel constant is, dan is er weliswaar een oplossing, maar die is nog steeds niet vastgelegd door $u_{|C}$: we weten nu slechts dat $f(x^2 = 0) = u_0(x^1, 0)$. Om dit soort situaties te vermijden eisen we dat v nergens raakt aan C.

Een subtieler verschijnsel (in $n = 2$) is dat de lijn C een integraalkromme van v meer dan een keer snijdt. Ook in dat geval kunnen we $u_0 = u_{|C}$ niet vrij kiezen, omdat volgens (3) de functie u constant moet zijn langs de gegeven integraalkromme, terwijl de waarde van u_0 op de snijpunten niet hetzelfde hoeft te zijn. Om dit probleem te vermijden geeft de volgende stelling slechts een lokale uitspraak.

Stelling 2 *Stel dat $C \subset \mathbb{R}^n$ een oppervlak van dimensie $n-1$ is en stel dat $x_0 \in C$ een punt is waar v niet aan C raakt.*

Dan heeft de PDV (3) met gegeven randwaarde $u_{|C} = u_0$ een unieke oplossing in een omgeving van x_0.

De eis dat $v(x_0)$ niet aan C raakt betekent dat het opspansel van $v(x_0)$ en $T_{x_0}C$ (i.e. de ruimte van alle raakvectoren aan C in x_0) gelijk is aan $\mathbb{R}^n$. Een oppervlak C in R^n van dimensie $n-1$ kan worden beschouwd als de oplossingsverzameling van de vergelijking $F(x) = 0$, waar $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de eigenschap heeft dat $F'(x) \neq 0$ voor alle $x \in C$ (i.e. $F(x) = 0$). Hier is $F'(x) \equiv \nabla F(x)$ de n-vector met componenten $(\partial F(x)/\partial x^1, \ldots \partial F(x)/\partial x^n)$. De eis dat v in x_0 niet raakt aan C luidt dan

$$(v(x_0), \nabla F(x_0)) \neq 0, \tag{30}$$

waarbij $(\cdot, \cdot)$ het gebruikelijke inproduct is (de gradient $\nabla F(x_0)$ staat namelijk loodrecht op C, en omdat C dimensie $n-1$ heeft zou $(v(x_0), \nabla F(x_0)) = 0$ betekenen dat $v(x_0)$ wel raakt aan C).

Bewijsschets. Het idee is heel simpel. Er is een omgeving $\mathcal{O}$ van x_0 in C waarin v niet aan C raakt. In deze omgeving doorsnijden de integraalkrommen van v het Cauchy-oppervlak C zonder dat er ook maar een klein segment van enige integraalkromme in $\mathcal{O}$ ligt. Als we de waarde u_0 van u voorschrijven op $\mathcal{O}$, kunnen we u uitbreiden tot een open gebied in $\mathbb{R}^n$ door te eisen dat u op de hele integraalcurve $(x(t))$ door $y \in \mathcal{O}$ de waarde $u(x(t)) := u_0(y)$ heeft. Volgens Stelling 1 geeft dit een oplossing van (3), die duidelijk uniek is vastgelegd door u_0.

Het technische bewijs van de stelling gaat door middel van een serie coordinatentransformaties die de situatie vereenvoudigen tot die in het voorbeeld boven, met één verschil: in plaats van de vector $v = (1, 0, \ldots, 0)$ komt er $v = (w(x), 0, \ldots, 0)$, met $w(x) \neq 0$ in de bewuste omgeving van x_0. Dit vector-veld heeft echter precies dezelfde integraalkrommen modulo de parametrisatie, zodat het argument voor uniciteit van de oplossing nog steeds geldt. Het geven van de details van het bewijs is een serie opgaven!

De eerste twee coordinatentransformaties brengen v lokaal wel degelijk in de vorm $(1, 0, \ldots, 0)$. We geven een coordinatentransformatie aan met $x \mapsto g(x)$, waarbij $g : U \to V$ glad is met gladde inverse en U (en dus V) open in $\mathbb{R}^n$. We passen eerst een affiene transformatie toe die x_0 in $(0, \ldots, 0)$ overbrengt en de vector $v(x_0)$ in $(1, 0, \ldots, 0)$. (Let op: $v(x_0) \neq 0$, omdat v anders aan C raakt.) Vervolgens nemen we

$$g(x^1, \ldots, x^n) := \varphi_{x^1}(0, x^2, \ldots, x^n); \tag{31}$$

zie de notatie boven (6). Dit betekent dat g de oplossing is van de GDV

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x^1} = v(g(x)) \tag{32}$$

met beginvoorwaarde

$$g(0, x^2, \ldots, x^n) = (0, x^2, \ldots, x^n). \tag{33}$$

Deze functie is glad als v dat is. Laat zien dat geldt $g_*(1, 0, \ldots, 0) = v$. Voor de inverse geldt dus

$$g_*^{-1} v = (1, 0, \ldots, 0). \tag{34}$$

Ga dan na dat aan de voorwaarde van de inverse functiestelling voldaan is en toon aan dat g lokaal inverteerbaar is. We noemen de omgeving van $x_0 = 0$ waar g inderdaad inverteerbaar is U_1.

Voor het gemak noemen we het Cauchy-oppervlak na deze eerste twee transformaties nog steeds C. Nu moeten we $C = \{x | F(x) = 0\}$ nog in de vorm (29) brengen door een coordinatentransformatie h die voldoet aan

$$h_*(1, 0, \ldots, 0) = (w(x), 0, \ldots, 0), \tag{35}$$

met $w(x) \neq 0$. Het getransformeerde Cauchy-oppervlak is $h^*C = \{x | F(h(x)) = 0\}$. We moeten h dus zo maken dat naast (35) ook geldt $F(h(x)) = x^1$. Maak gebruik van de eigenschap (30), die in dit geval luidt

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} \neq 0, \tag{36}$$

en de impliciete functiestelling om dit voor elkaar te krijgen. Q.E.D.

1.5 Nóg een praktische oplosmethode

We geven nu een systematische en concrete methode aan om (3) op te lossen na keuze van een Cauchy-oppervlak C en een beginwaarde u_0. Dit gaat in de volgende stappen.

1. Parametriseer C (lokaal) met $n-1$ parameters $s = (s_1, \ldots, s_{n-1})$ als

$$C = \{x(s) \equiv (x^1(s), \ldots, x^n(s)) \mid s \in \mathcal{O}\}, \tag{37}$$

waar $0 \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ open en samenhangend is. Voorbeeld: (29) voor $n = 2$ is

$$C = \{x^1(s) = 0, x^2(s) = s\}. \tag{38}$$

2. Los voor ieder punt $x_0 \in C$ de gewone differentiaalvergelijkingen (4) met beginvoorwaarde (5) op; met andere woorden, bepaal de integraalcurven van v die C snijden. We schrijven $x(s,t) = (x^1(s,t), \ldots, x^n(s,t))$ voor de oplossing op tijd t met beginwaarde

$$x(s,0) \equiv (x^1(s,0), \ldots, x^n(s,0)) = (x^1(s), \ldots, x^n(s)) \in C.$$

Vanwege de aanname dat v niet aan C raakt, ligt de curve $t \mapsto (x^1(s,t), \ldots, x^n(s,t))$ voor vaste s niet in C en verkrijgen we een open omgeving van C in $\mathbb{R}^n$ als we ons beperken tot waarden van t waarvoor de integraalcurven allemaal bestaan en bovendien de volgende eigenschap hebben:

$$\det\left(\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(s_1, \ldots, s_{n-1}, t)}\right) \neq 0. \tag{39}$$

Hier is (voor nu en later):

$$\left(\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(s_1, \ldots, s_{n-1}, t)}\right) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial t} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

We kunnen in ieder geval lokaal aan (39) voldoen vanwege de conditie dat v niet aan C raakt.

3. Druk lokaal s, t uit in $x^1, \ldots, x^n$ door de in stap 2 gevonden uitdrukking $x^1 = x^1(s,t), \ldots, x^n = x^n(s,t)$ te inverteren; dit kan lokaal vanwege de inverse functiestelling. Dit geeft $s = s(x^1, \ldots, x^n)$ en $t = t(x^1, \ldots, x^n)$.

4. De oplossing u van (3) met beginwaarde u_0 (gedefinieerd in de punten $x(s, t = 0)$) is nu

$$u(x) = u_0(x(s(x), t = 0)). \tag{41}$$

Let op: $x(s(x), t(x)) = x$! Dit volgt uit Stelling 1, maar je kunt het ook direct nagaan: voor iedere functie $f = f(x(s,t))$ geldt per definitie van de t-afhankelijkheid dat (vgl. (9))

$$\sum_k v^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} u(x) = \frac{d}{dt} u(x(t))_{|t=0} = 0,$$

omdat (41) niet van t afhangt.

In het ultraeenvoudige geval (7) in $n = 2$ met Cauchy-oppervlak (29) geeft dit alles $x^1(s,t) = t$, $x^2(s,t) = s$, en dus (opnieuw)

$$u(x) = u(x^1, x^2) = u_0(0, x^2). \tag{42}$$

Reproduceer zelf (14) als oplossing van (13) en (16) als oplossing van (15)(opgave).

1.6 Quasilineaire eerste orde PDV

Een PDV van de vorm

$$\sum_{k=1}^{n} v^k(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x^k} = w(x,u(x)) \tag{43}$$

heet *quasilineair*; de vergelijking is bijna lineair in de eerste afgeleiden van u. Het grote verschil met (1) ligt in het feit dat de functies v^k nu ook van u af mogen hangen. Bovendien is het rechterlid niet (noodzakelijk) nul. We schrijven (43) ook als

$$L_v u = w, \tag{44}$$

met dien verstande dat $v = v(x,u)$ en $w = w(x,u)$. Een voorbeeld is de *Euler-vergelijking*

$$u\frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0. \tag{45}$$

Met $(x^1, x^2) = (x,t)$ en t geïnterpreteerd als de tijd beschrijft deze vergelijking de beweging van een ideale vloeistof in dimensie 1.

We kunnen (43) door middel van een elegante truc overbrengen in de vorm (1), aangevuld met een extra voorwaarde (constraint). We breiden $\mathbb{R}^n$ daartoe uit met een extra dimensie tot $J^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n+1}$. We beschouwen de functies $v^1, \ldots, v^{n+1} := w$ dan als een vector-veld (genaamd v) in $\mathbb{R}^{n+1}$, gedefinieerd door

$$v^k(x^1,\ldots,x^n,x^{n+1}) := v^k(x^1,\ldots,x^n,u = x^{n+1}), \tag{46}$$

voor $k = 1, n+1$. De PDV (43) is dan equivalent met de volgende twee vergelijkingen in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$L_v\varphi = 0; \tag{47}$$

$$\varphi = 0, \tag{48}$$

onder de conditie

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{n+1}} \neq 0 \tag{49}$$

in de punten x waarvoor geldt $\varphi(x) = 0$, waarbij $x = (x^1, \ldots, x^{n+1})$. Hier is de eerste vergelijking gewoon van de vorm (3), maar dan in één dimensie hoger!

Als we namelijk beginnen bij (43), met oplossing $u(x^1, \ldots, x^n)$, kunnen we nemen

$$\varphi(x) = u(x^1,\ldots,x^n) - x^{n+1}. \tag{50}$$

Als dan (48) geldt, zodat $x^{n+1} = u(x^1, \ldots, x^n)$, geeft (47) precies (43) terug. Omgekeerd: als (48) geldt met (49), kunnen we volgens de impliciete functiestelling (lokaal) schrijven

$$x^{n+1} = u(x^1,\ldots,x^n) \tag{51}$$

voor een zekere functie u. We hebben dan

$$\varphi(x^1,\ldots,x^n,u(x^1,\ldots,x^n)) = 0. \tag{52}$$

Daaruit volgt voor $k = 1, \ldots, n$ dat in de punten $x = (x^1, \ldots, x^n, u(x^1, \ldots, x^n))$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^k} + \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{n+1}}\frac{\partial u(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^k} = 0. \tag{53}$$

In de punten $x = (x^1, \ldots, x^n, u(x^1, \ldots, x^n))$ geldt dus

$$L_v\varphi(x) = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{n+1}}(L_v u - w), \tag{54}$$

met dien verstande dat nu $v = (v^1, \ldots, v^n)$. Invullen in (47) geeft dankzij (49) dus precies (44).

Zo kunnen we (44) oplossen met de eerder gegeven methode (zie sectie 1.5):

1. Kies een Cauchy-oppervlak $C^{(n-1)}$ in $\mathbb{R}^n$ dat voldoet aan de de voorwaarde dat de projectie (vanuit $\mathbb{R}^{n+1}$ naar $\mathbb{R}^n$) van de integraalcurven van v er niet aan raakt. Breid dit uit tot een oppervlak $C^{(n)}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ gedefinieerd door
$$C^{(n)} := \{(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \mid (x^1, \ldots, x^n) \in C^{(n-1)}\}. \tag{55}$$
2. Neem als beginwaarde een u_0 op $C^{(n-1)}$ en vervolgens
$$\varphi_0(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) = u_0(x^1, \ldots, x^n) - x^{n+1}. \tag{56}$$
3. Bepaal de integraalkrommen van v in $\mathbb{R}^{n+1}$ die $C^{(n)}$ snijden;
4. Breid φ_0 uit tot een oplossing φ door φ constant te nemen langs de integraalkrommen van v die $C^{(n)}$ snijden;
5. Los (48) op voor x^{n+1} en lees een oplossing u van (44) af uit (51).

Om dit te doen slagen moet (49) gelden, en dit is het geval in punten waar $w(x) \neq 0$.

Een alternatieve procedure komt uit het volgende fraaie inzicht.

Stelling 3 *Een functie $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is een oplossing van* (44) *desda de grafiek*
$$\Gamma(u) := \{(x^1, \ldots, x^n, u(x^1, \ldots, x^n))\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{57}$$
van u geheel bestaat uit integraalkrommen van v (met andere woorden, als een integraalkromme van v de grafiek $\Gamma(u)$ snijdt dan ligt deze geheel in $\Gamma(u)$).

Dit is direct aan te tonen: een integraalkromme $x(t)$ ligt in $\Gamma(u)$ als geldt $x^{n+1}(t) = u(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ voor alle t; differentiatie naar t geeft precies (44). Maar de stelling is ook eenvoudig af te leiden uit (47) en (48). Stel dat u de oplossing is die wordt bepaald door een oplossing φ zoals boven geschetst. Volgens (51) geldt dat $x(t)$ in $\Gamma(u)$ ligt als $\varphi(x(t)) = 0$. Als dit voor $t = 0$ geldt (i.e. de integraalkromme snijdt $\Gamma(u)$), dan moet dit echter volgens (47) voor alle t gelden, want dat is precies de inhoud van (47) (zie Stelling 1).

We kunnen de oplossingsmethode boven dan ook zonder tussenkomst van φ formuleren:

1. Kies een Cauchy-oppervlak $C^{(n-1)}$ in $\mathbb{R}^n$ en een functie $u_0 : C^{(n-1)} \to \mathbb{R}$ als boven;
2. Maak daaruit een oppervlak $\tilde{C}^{(n-1)}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ d.m.v.
$$\tilde{C}^{(n-1)} := \{(x, u_0(x)) \mid x \in C^{(n-1)}\}. \tag{58}$$
3. Bepaal de integraalkrommen van v in $\mathbb{R}^{n+1}$ die $\tilde{C}^{(n-1)}$ snijden; dit geeft een oppervlak $\tilde{C}^{(n)}$van dimensie n in $\mathbb{R}^{n+1}$.
4. Bepaal de functie u waarvoor $\tilde{C}^{(n)} = \Gamma(u)$. Deze functie is volgens Stelling (3) een oplossing van (43).

In de praktijk gaat de laatste stap net als in sectie 1.5. Parametriseer het Cauchy-oppervlak $C^{(n-1)}$ door $s = (s_1, \ldots, s_{n-1})$, zie (37). Dit geeft
$$\tilde{C}^{(n-1)} = \{(x(s), u_0(x(s))) \mid s \in \mathcal{O}\}. \tag{59}$$
Uitbreiding met de integraalkrommen van v geeft
$$\tilde{C}^{(n)} = \{(x(s,t), z(s,t)) \mid s \in \mathcal{O}\}, \tag{60}$$
waarbij voor vaste s de curve $t \mapsto (x(s,t), z(s,t))$ de oplossing is van
$$\frac{d}{dt}(x^k(s,t)) = v^k(x(s,t), z(s,t)); \tag{61}$$
$$\frac{d}{dt}(z(s,t)) = w(x(s,t), z(s,t)), \tag{62}$$

met beginconditie

$$
\begin{aligned}
x^k(s,0) &= x^k(s); & (63)\\
z(s,0) &= u_0(x(s)). & (64)
\end{aligned}
$$

Druk vervolgens (s,t) uit in x, zoals in sectie 1.5. Volgens Stelling 3 is dan

$$u(x) := z(s(x), t(x)) \tag{65}$$

de gezochte oplossing met gegeven beginvoorwaarde u_0 op C.

Stelling 2 geldt ook in dit geval (met een soortgelijk bewijs een dimensie hoger):

Stelling 4 *Stel dat $C^{(n-1)} \subset \mathbb{R}^n$ een oppervlak van dimensie $n-1$ is, kies $u_0 : C^{(n-1)} \to \mathbb{R}$, en stel dat dat $x_0 \in C^{(n-1)}$ een punt is waar $v(x_0, u_0(x_0))$ (als vector in $\mathbb{R}^n$) niet aan $C^{(n-1)}$ raakt.*

Dan heeft de PDV (43) met gegeven randwaarde $u_{|C^{(n-1)}} = u_0$ een unieke oplossing in een omgeving van x_0.

1.7 Algemene eerste orde PDV

Ook algemene eerste orde PDV kunnen met behulp van integraalkrommen van bepaalde vector-velden worden opgelost. Integraalkrommen van vector-velden die "kanoniek" aan een PDV kunnen worden gerelateerd heten de *karakteristieken* van de PDV. De karakteristieken van (3) zijn de integraalkrommen van v in $\mathbb{R}^n$. De karakteristieken van (43) c.q. (44) zijn de integraalkrommen van $v = (v^1, \ldots, v^n, w)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. We hebben gezien hoe de PDV in principe kan worden opgelost zodra met de karakteristieken kent. We gaan nu bekijken wat de karakteristieken van een willekeurige eerste orde PDV zijn en hoe de PDV op grond daarvan in principe kan worden opgelost.

We voeren eerst enige gebruikelijke notatie in: we schrijven

$$
\begin{aligned}
u_{x^k} &:= \frac{\partial u}{\partial x^k}; & (66)\\
u_x &:= (u_{x^1}, \ldots, u_{x^n}). & (67)
\end{aligned}
$$

De algemene PDV van orde 1 is van de vorm

$$F(x, u_x, u) = 0. \tag{68}$$

Hier is $F : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ bij voorkeur glad, maar in ieder geval vaak genoeg differentieerbaar om alle afgeleiden die gaan optreden zinvol te maken. Stoere wiskundigen schrijven ook wel $J^1(\mathbb{R}^n)$ voor $\mathbb{R}^{2n+1}$ (de zogenaamde bundel van 1-jets over $\mathbb{R}^n$). Meetkundig is een eerste orde PDV dus niets anders dan een $2n$-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^{2n+1}$. We breiden de notatie uit tot

$$
\begin{aligned}
F_{x^k} &:= \frac{\partial F}{\partial x^k}; & (69)\\
F_x &:= (F_{x^1}, \ldots, F_{x^n}); & (70)\\
F_{p_k} &:= \frac{\partial F}{\partial p_k}; & (71)\\
F_p &:= (F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}); & (72)\\
F_y &:= \frac{\partial F}{\partial y} & (73)
\end{aligned}
$$

We noemen de coordinaten in $\mathbb{R}^{2n+1}$ (x, p, y) met $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ en $y \in \mathbb{R}$. Een differentieerbare functie $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieert een n-dimensionaal oppervlak genaamd $\Gamma_1(u)$ in $\mathbb{R}^{2n+1}$, de zogenaamde *1-grafiek* van u, door middel van

$$\Gamma_1(u) := \{(x, p = u_x(x), y = u(x))\}. \tag{74}$$

Dit is een uitbreiding van de 'gewone' grafiek $\Gamma(u) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, zie (57). We zien onmiddellijk uit deze definitie:

Als een functie u een oplossing is van $F(x, u_x, u) = 0$, dan ligt $\Gamma_1(u)$ in het oppervlak $F = 0$.

Dit inzicht is zo triviaal dat het onmogelijk toereikend kan zijn om de PDV ook daadwerkelijk op te lossen, temeer daar de dimensie van $F = 0$ $(2n)$ twee keer die van $\Gamma_1(u)$ is (n). Allerminst triviaal is de volgende definitie.

Definitie 1.1 *De karakteristieken $(x(t), p(t), y(t))$ van de PDV $F(x, u_x, u) = 0$ zijn de integraalkrommen in $\mathbb{R}^{2n+1}$ van het vector-veld*

$$v_F := (F_p, -F_x - pF_y, pF_p). \tag{75}$$

Of uitgeschreven

$$v_F = (F_{p_1}, \ldots, F_{p_n}, -F_{x^1} - p_1 F_y, \ldots, -F_{x^n} - p_n F_y, \sum_{k=1}^{n} p_k F_{p_k}), \tag{76}$$

zodat

$$\dot{x}^k = F_{p_k}; \tag{77}$$
$$\dot{p}_k = -F_{x^k} - p_k F_y; \tag{78}$$
$$\dot{y} = \sum_{k=1}^{n} p_k F_{p_k}. \tag{79}$$

Het is belangrijk om even zelf uit te zoeken wat het verband is tussen deze karakteristieken en die van (3) en (44), in het geval dat (68) deze speciale vorm heeft (zie opgaven). Je zult daaruit zien dat de karakteristieken in Definitie 1.1 daar dan een generalisatie van zijn.

Ook is het nuttig om het geval dat F niet van y afhangt te bekijken; in dat geval hangt de PDV $F(x, u_x, u) = 0$ dus niet expliciet af van u (maar wel van u_x, anders is het geen PDV!). We zien dan dat v_F gelijk is aan (20) plus een component in de y-richting. Deze laatste ontkoppelt echter van de vergelijking voor de karakteristieken in de (x, p) ruimte $\mathbb{R}^{2n}$, zodat deze zonder toedoen van y kunnen worden opgelost. Definitie 1.1 vereenvoudigt dan als volgt:

Definitie 1.2 *De karakteristieken $(x(t), p(t))$ van de PDV $F(x, u_x) = 0$ zijn de integraalkrommen in $\mathbb{R}^{2n}$ van het vector-veld*

$$v_F^a := (F_p, -F_x), \tag{80}$$

zodat

$$\dot{x}^k = F_{p_k}; \tag{81}$$
$$\dot{p}_k = -F_{x^k}. \tag{82}$$

Met de notatie $F(x, p) = h(q, p)$ voldoen deze karakteristieken in $\mathbb{R}^{2n}$ dus precies aan de Hamilton-vergelijkingen (18) en (19).

In het algemeen ligt een karakteristiek van de PDV geheel in het oppervlak $F = 0$ als deze dit oppervlak snijdt: als $F(x(0), p(0), y(0)) = 0$ geldt ook $F(x(t), p(t), y(t)) = 0$ voor alle t, omdat

$$\frac{d}{dt} F(x(t), p(t), y(t)) = F_x \dot{x} + F_p \dot{p} + F_y \dot{y} = 0,$$

wat volgt zodra je (77) - (79) invult. De functie F is dus constant langs een karakteristiek, en als de functie 0 is blijft zij ook 0. Precies hetzelfde geldt in $\mathbb{R}^{2n}$ m.b.t. Definitie 1.2; in dat geval is de uitspraak dat F constant is langs een karakteristiek niets anders dan de wet van behoud van energie uit de klassieke mechanica (onder de identificatie van F met de Hamiltoniaan).

De werkelijke rechtvaardiging van Definitie 1.1 is een verscherping van deze uitspraak.

Stelling 5 *De 1-grafiek $\Gamma_1(u)$ van een oplossing van $F(x,u_x,u)=0$, met $F_p\neq 0$, wordt opgespannen door karakteristieken van de PDV zoals bepaald volgens Definitie 1.1. Met andere woorden: als u een oplossing is, dan ligt een karakteristiek die $\Gamma_1(u)$ kruist ook geheel in $\Gamma_1(u)$. Omgekeerd is een oppervlak van dimensie n in $\mathbb{R}^{2n+1}$ dat geheel bestaat uit karakteristieken de 1-grafiek van een oplossing. (Als de oplossing slechts lokaal is gedefinieerd, geldt deze uitspraak ook lokaal, zodat i.h.a. slechts een segment van een karakteristiek in $\Gamma_1(u)$ ligt.)*

Voor de PDV $F(x,u_x)=0$ geldt een soortgelijke uitspraak, waarin voorkomt de "geamputeerde" 1-grafiek $\Gamma_1^a(u)\subset\mathbb{R}^{2n}$ van u, gedefinieerd door

$$\Gamma_1^a(u):=\{(x,p=u_x(x))\}. \tag{83}$$

Ook dit is een uitbreiding van de 'gewone' grafiek $\Gamma(u)\subset\mathbb{R}^{n+1}$, zie (57). Het analogon van de vorige stelling is dan:

Stelling 6 *De geamputeerde 1-grafiek $\Gamma_1^a(u)$ van een oplossing van $F(x,u_x)=0$, met $F_p\neq 0$, wordt opgespannen door karakteristieken van de PDV. Met andere woorden: als u een oplossing is, dan ligt een karakteristiek die $\Gamma_1^a(u)$ kruist ook geheel in $\Gamma_1^a(u)$. Omgekeerd is een oppervlak van dimensie n in $\mathbb{R}^{2n}$ dat geheel bestaat uit karakteristieken de 1-grafiek van een oplossing zoals bepaald volgens Definitie 1.2. (Als de oplossing slechts lokaal is gedefinieerd, geldt deze uitspraak ook lokaal, zodat i.h.a. slechts een segment van een karakteristiek in $\Gamma_1^a(u)$ ligt.)*

De aanname $F_p\neq 0$ is duidelijk: anders is (68) helemaal geen PDV. Deze stellingen geven een concrete methode om de PDV (68) op te lossen. Tussen haakjes staat het eenvoudigere geval waar F niet van u afhangt.

1. Kies een Cauchy-oppervlak $C^{(n-1)}$ in $\mathbb{R}^n$ dat voldoet aan de de voorwaarde dat de projectie vanuit $\mathbb{R}^{2n+1}$ ($\mathbb{R}^{2n}$) naar $\mathbb{R}^n$ van de integraalcurven van v_F (v_F^a) er niet aan raakt. Voorbeeld: als $F_{p_1}\neq 0$ kan $C^{(n-1)}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x^1=0\}$ worden gekozen.
2. Parametriseer $C^{(n-1)}$ (lokaal) met $n-1$ parameters $s=(s_1,\ldots,s_{n-1})$ als
$$C^{(n-1)}=\{x(s)\equiv(x^1(s),\ldots,x^n(s))\mid s\in\mathcal{O}\}, \tag{84}$$
waar $0\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^{n-1}$ open en samenhangend is. Voorbeeld: (38).
3. Kies als beginwaarde een functie $u_0:C^{(n-1)}\to\mathbb{R}$.
4. Construeer daaruit als volgt een oppervlak $\tilde{C}^{(n-1)}$ in $\mathbb{R}^{2n+1}$:
$$\tilde{C}^{(n-1)}:=\left\{(x,p,u_0(x))\mid x\in C^{(n-1)},\sum_{k=1}^n\left(p_k-\frac{\partial u_0(x)}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k(s)}{\partial s_i}=0\,\forall i,F(x,p,u_0(x))=0\right\}. \tag{85}$$
Omdat $i-1,\ldots,n-1$ geeft de eerste conditie voor gegeven $x=x(s)$ een aantal van $n-1$ vergelijkingen voor de n variabelen $p_1,\ldots,p_n$; samen met $F=0$ zijn dit dus n vergelijkingen voor n onbekenden. Voor gegeven $x(s)$ noemen we de oplossing $p(s)$, zodat
$$\tilde{C}^{(n-1)}=\{(x(s),p(s),u_0(x(s)))\mid s\in\mathcal{O}\}. \tag{86}$$
Voorbeeld: in het geval (38) in $n=1$ komt er $p_2=\partial u_0/\partial x^2$ en wordt vervolgens p_1 vastgelegd door $F=0$ (zie de eikonal equation onder voor een concrete illustratie).[1] De conditie $F=0$ wordt dan nog opgelegd om in de context van Stellingen 5 en 6 te komen.
In $\mathbb{R}^{2n}$ komt er uiteraard
$$\begin{aligned}\tilde{C}^{(n-1)} &:= \left\{(x,p)\mid x\in C^{(n-1)},\sum_{k=1}^n\left(p_k-\frac{\partial u_0(x)}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k(s)}{\partial s_i}=0\,\forall i,F(x,p)=0\right\}\\ &= \{(x(s),p(s))\mid s\in\mathcal{O}\}.\end{aligned} \tag{87}$$

[1] Meetkundig gesproken vormen de grootheden $\partial x^k(s)/\partial s_i$ voor $i-1,\ldots,n-1$ raakvectoren aan het oppervlak $C^{(n-1)}$, en drukken de condities $\sum_{k=1}^n\left(p_k-\frac{\partial u_0(x)}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k(s)}{\partial s_i}=0$ uit dat langs $C^{(n-1)}$ moet gelden $p=du_0$ (of $p=\nabla u_0$ voor wie niet van differentiaalvormen houdt).

5. Bepaal de integraalkrommen van v_F in $\mathbb{R}^{2n+1}$ (v_F^a in $\mathbb{R}^{2n}$) die $\tilde{C}^{(n-1)}$ snijden; dit geeft een oppervlak $\tilde{C}^{(n)}$van dimensie n in $\mathbb{R}^{2n+1}$ ($\mathbb{R}^{2n}$).

6. Bepaal de functie u waarvoor (lokaal) $\tilde{C}^{(n)} = \Gamma_1(u)$ ($\tilde{C}^{(n)} = \Gamma_1^a(u)$). Deze functie is volgens Stelling (3) een oplossing van (43).

In de praktijk gaat de laatste stap net als in secties 1.5 en 1.6. Voor het gemak leggen we dit uit voor $\mathbb{R}^{2n}$. Uitbreiding van $\tilde{C}^{(n-1)}$ met de integraalkrommen van v_F^a geeft

$$\tilde{C}^{(n)} = \{(x(s,t), p(s,t)) \mid s \in \mathcal{O}\}, \tag{88}$$

waarbij voor vaste s de curve $t \mapsto (x(s,t), p(s,t))$ de oplossing is van

$$\frac{d}{dt}(x^k(s,t)) = F_{p_k}(x(s,t), z(s,t)); \tag{89}$$

$$\frac{d}{dt}(p_k(s,t)) = -F_{x^k}(x(s,t), z(s,t)), \tag{90}$$

met beginconditie

$$x^k(s,0) = x^k(s); \tag{91}$$

$$p_k(s,0) = p_k(s). \tag{92}$$

Druk vervolgens (s,t) uit in x, zoals in sectie 1.5. Volgens Stelling 6 is dan een $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x^k} = p_k(s(x), t(x)) \tag{93}$$

met gegeven beginvoorwaarde u_0 op C. Dat deze functie een oplossing is van $F(x, u_x)$ is onmiddellijk duidelijk, want de curven $t \mapsto (x(s,t), p(s,t))$ liggen vanwege de wet van behoud van energie geheel in het oppervlak $F = 0$.

Bewijsschets. We bewijzen Stelling 5 en laten het eenvoudigere bewijs van Stelling 6 als opgave over aan de lezer. We beginnen met drie lemma's. Het bewijs van het eerste is een opgave.

Lemma 1 *Stel dat een vector $v = (v^x, v^p, v^y)$ in $\mathbb{R}^{2n+1}$ raakt aan $\Gamma_1(u)$. Dan geldt*

$$(\nabla F, v) \equiv (F_x, v^x) + (F_p, v^p) + F_y v^y = (F_x + F_p u_{xx} + F_y u_x) v^x. \tag{94}$$

Hierbij wordt niet *aangenomen dat u een oplossing is van* (68).

Als we nu *wel* aannemen dat u een oplossing is van (68), dan weten we dat $\Gamma_1(u)$ in het oppervlak $F = 0$ ligt. Als dan v raakt aan $\Gamma_1(u)$, dan raakt v ook aan het oppervlak $F = 0$. In dat geval moet gelden dat $(\nabla F, v) = 0$ (waarom?),[2] zodat Lemma 1 impliceert:

Lemma 2 *Als u een oplossing is van* (68)*, dan geldt*

$$F_x + F_p u_{xx} + F_y u_x = 0. \tag{95}$$

Het laatste lemma komt uit de differentiaalmeetkunde en ligt zo voor de hand dat we het zonder bewijs geven.

Lemma 3 *Stel dat een vector-veld in ieder punt van een oppervlak raakt aan dat oppervlak. Dan liggen de integraalkrommen van dit vector-veld die het oppervlak snijden geheel in het oppervlak.*

[2] Zie Calculus 3&4, of, als je iets weet van differentiaalmeetkunde: er geldt $(\nabla F, v) = \langle dF, v\rangle = v(F)$, i.e. de actie van het vector-veld v op de functie F. Als v raakt aan het oppervlak $F = 0$ geldt uiteraard $v(F) = 0$, omdat F per definitie de constante waarde 0 aanneemt op dit oppervlak!

We bewijzen nu de ene implicatie van Stelling 5: als u een oplossing is, dan ligt een karakteristiek die $\Gamma_1(u)$ kruist ook geheel in $\Gamma_1(u)$.Volgens Lemma 3 is het voldoende om te laten zien dat de raakvector $(\dot{x}, \dot{p}, \dot{y})$ aan een karakteristiek (i.e. een oplossing $(x(t), p(t), y(t))$ van (77) - (79)) die door $z \in \Gamma_1(u)$ loopt, in dat punt z raakt aan $\Gamma_1(u)$. Wat betekent dit? Dat $p(t) = u_x(x(t))$ en $y(t) = u(x(t))$. Differentiatie naar t geeft $\dot{p} = u_{xx}\dot{x}$ en $\dot{y} = u_x\dot{x}$. Omdat ook (77) - (79) gelden, moeten we dus laten zien dat voor $z = (x, p, y) \in \Gamma_1(u)$ geldt dat

$$-F_x - pF_y = u_{xx}F_p; \tag{96}$$

$$pF_p = u_xF_p. \tag{97}$$

Nu betekent $z \in \Gamma_1(u)$ echter dat $z = (x, u_x(x), u(x))$, i.e. $p = u_x$ en $y = u(x)$. Met (95) geeft dit direct (96) en (97).

De omgekeerde implicatie is een opgave. Q.E.D.

1.8 De eikonale vergelijking

Een beroemde niet-lineaire eerste orde PDV waarop de theorie uit de vorige sectie van toepassing is, is de zogenaamde *eikonal equation*

$$\|\nabla u\|^2 = 1 \tag{98}$$

voor $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zoals altijd; de vergelijking kan echter ook op een willekeurige Riemannse varieteit M worden opgeschreven. Als g de metriek op M is met componenten g_{jk} en inverse $(g^{-1})_{jk} \equiv g^{jk}$ luidt (98)

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^j} \frac{\partial u(x)}{\partial x^k} = 1. \tag{99}$$

In $\mathbb{R}^n$ met de gebruikelijke vlakke metriek $g_{jk} = \delta_{jk}$ is dit

$$\sum_k \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x^k} \right)^2 = 1. \tag{100}$$

In $n = 2$ schrijven we, met $u = u(x, y)$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = 1. \tag{101}$$

In het algemeen is (99) van de vorm $F(x, u_x) = 0$, met

$$F(x, p) = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x) p_j p_k - 1. \tag{102}$$

Voor (101) geeft dit

$$F(x, y, p_x, p_y) = p_x^2 + p_y^2 - 1, \tag{103}$$

waarbij F dus niet van (x, y) afhangt (i.t.t. het algemene geval).

Wat betekent deze vergelijking? Zonder bewijs geven we een stelling uit de Riemannse meetkunde, waarin je lokaal kunt denken aan $\mathbb{R}^{2n}$, zoals in de vorige sectie, maar de karakteristieken globaal in de zogenaamde coraakbundel T^*M zijn gedefinieerd.

Lemma 4 *Een karakteristiek $t \mapsto (x(t), p(t))$ van F (i.e. een oplossing van (81) en (82)) projecteert op een geodeet $x(t)$ in M (of lokaal $\mathbb{R}^n$) met snelheid (raakvector)*

$$\dot{x}^k(t) = \sum_l g^{kl}(x(t)) p_l(t). \tag{104}$$

In $\mathbb{R}^n$ met vlakke metriek is dit eenvoudig na te gaan. De vergelijkingen (81) en (82)) luiden

$$\dot{x}^k = p_k; \tag{105}$$
$$\dot{p}_k = 0, \tag{106}$$

zodat

$$x^k(t) = x^k(0) + p_k t; \tag{107}$$
$$p_k(t) = p_k(0). \tag{108}$$

En inderdaad zijn de geodeten in $\mathbb{R}^n$ rechte lijnen.

Neem (voor een willekeurige functie u) het oppervlak $u(x) = c$ in $\mathbb{R}^n$ of M; in $\mathbb{R}^2$ is dit een lijn. Kies een punt x_0 op dit oppervlak, i.e. $u(x_0) = c$. Beschouw de geodeet $t \mapsto x(t)$ die x_0 verlaat met snelheid $\dot{x}$. Met $u(t) := u(x(t))$ geldt dan

$$u(t) = u(x_0) + \int_0^t ds\, \frac{du(s)}{ds} = u(x_0) + \int_0^t ds \sum_k \frac{\partial u(x(s))}{\partial x^k} \frac{dx^k(s)}{ds}. \tag{109}$$

Kies nu

$$\dot{x}(0) = \nabla u(x_0), \tag{110}$$

ofwel $\dot{x}^k = g^{kl}(x)\partial_l u(x_0)$. Stel dat u een oplossing is van (99). Volgens Stelling 6 ligt dan de karakteristiek $t \mapsto (x(t), p(t))$ door het punt $(x_0, du(x_0))$ (of iets uitvoeriger $(x^k(0) = x_0^k, p_k(0) = \partial_k u(x_0))$) in $\Gamma_1^a(u)$, zodat (zie (83)) $p_k(t) = \partial_k u(x(t))$. Volgens Lemma 4 projecteert deze karakteristiek op de geodeet met snelheid

$$\dot{x}^k(t) = \sum_l g^{kl}(x(t))\partial_k u(x(t)). \tag{111}$$

Voor $t = 0$ is dit (110), zodat we hebben bewezen:

> *Langs de geodeet door x_0 met snelheid (raakvector)* (110) *voor $t = 0$ geldt* (111).

Invullen van (111) in (109) geeft

$$u(t) = u(x_0) + \int_0^t ds \sum_{j,k=1}^n g^{jk}(x(s)) \frac{\partial u(x(s))}{\partial x^j} \frac{\partial u(x(s))}{\partial x^k} = u(x_0) + \int_0^t ds\, 1 = u(0) + t. \tag{112}$$

Met andere woorden:

> *Als u een oplossing is van* (99)*, dan is kortste afstand tussen de oppervlakken $u = c_1$ en $u = c_2$ gelijk aan $|c_1 - c_2|$.*

Hierbij is de kortste afstand tussen twee punten per definitie de lengte van de (kortste) geodeet die deze punten verbindt; lokaal is een dergelijke geodeet uniek (globaal niet, denk aan de grootcirkels op de bol). Dit kunnen we ook anders formuleren:

> *Kies een Cauchy-oppervlak $C^{(n-1)} \subset M$ met beginwaarde $u = 0$. Voor een gegeven punt x is $u(x)$ de afstand tussen x en $C^{(n-1)}$.*

Fysische gesproken vormen de karakteristieken van de PDV (99) lichtstralen en de oppervlakken $u = c$ de golffronten daarvan.

We laten nu de oplosmethode in de vorige sectie zien an de hand van de eikonale vergelijking (101) in $n = 2$ met vlakke metriek. We volgen de stappen zoals opgesomd na Stelling 6.

1. We kiezen als Cauchy-oppervlak $x = 0$ in $\mathbb{R}^2$.
2. We parametriseren $C^{(1)}$ met (38).

3. We kiezen $u_0 = 0$.

4. We bepalen $\tilde{C}^{(1)} \subset \mathbb{R}^4$ als

$$\tilde{C}^{(1)} = \{(x, y, p_x, p_y) \mid x = 0, p_y = 0, p_x^2 = 1.\} \tag{113}$$

Dit geeft twee mogelijkheden om $\tilde{C}^{(2)}$ samenhangend te kiezen: $p_x = \pm 1$. We kiezen $p_x = 1$. Dit geeft (vgl. (86))

$$\tilde{C}^{(1)} = \{(0, s, 1, 0)\}. \tag{114}$$

5. We hebben de karakteristieken als bepaald: zie (107) en (108). Dit geeft

$$\begin{aligned} x(s,t) &= t; & (115)\\ y(s,t) &= s; & (116)\\ p_x(s,t) &= 1; & (117)\\ p_y(s,t) &= 0, & (118) \end{aligned}$$

zodat

$$\tilde{C}^{(2)} = \{(t, s, 1, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}. \tag{119}$$

6. De coordinatentransformatie van (s,t) naar (x,y) is triviaal. Dit geeft $p_x(x,y) = 1$ en $p_y(x,y) = 0$. We kunnen u dan vinden uit (93) met gegeven $u(0,y) = 0$. De vergelijkingen (93) luiden

$$\begin{aligned} u_x &= 1; & (120)\\ u_y &= 0. & (121) \end{aligned}$$

Dit geeft uiteindelijk

$$u(x,y) = x. \tag{122}$$

Deze functie lost (101) inderdaad op en bevestigt bovendien de interpretatie van de algemene oplossing: de afstand tussen $u = x = c_1$ en $u = x = c_2$ is inderdaad $|c_1 - c_2|$ (de geodeet loopt parallel aan de x-as), en de afstand tussen de lijn $x = 0$ en (x,y) is $u(x,y) = x$.

Opgaven

1. Los expliciet $u = u(x,y)$ op uit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Bepaal de integraalkrommen van het onderliggende vectorveld $v(x,y) = (1, 2xy^2)$.

3. Bereken de integraalkrommen van het vectorveld $v(x) = 1 + x^2$ in $\mathbb{R}$ en laat zien dat deze niet voor alle $t \in \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn (antwoord in college gegeven, nu nog narekenen!).

4. Een vectorveld v op $\mathbb{R}^n$ definieert een lineaire operator L_v op de vector-ruimte $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ d.m.v.

$$L_v(u) = \sum_{k=1}^{n} v^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} u.$$

   (a) Laat zien dat

$$L_v(fg) = L_v(f)g + fL_v(g). \tag{123}$$

(b) Een *derivatie* op de commutatieve algebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is een lineaire afbeelding $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die voldoet aan

$$\varphi(fg) = \varphi(f)g + f\varphi(g). \tag{124}$$

De operator L_v is dus een derivatie. Laat nu zien dat voor iedere derivatie φ op $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ een vectorveld v bestaat zodat $\varphi = L_v$.

Hint: neem $v^k = \varphi(x^k)$ en laat zien dat $\psi f = 0$ met $\psi f = (\varphi - L_v)f$ voor alle (gladde) functies f. Doe dit door eerst te laten zien dat ψ een derivatie is die alle polynomen van orde 1 annihileert. Toon dan aan dat f kan worden geschreven als

$$f(x) = f(0) + \sum_k b_k(x)x^k,$$

voor geschikte functies b^k. Laat zien dat uit het voorgaande volgt dat $(\psi f)(0) = 0$. Aangezien ieder punt door een coordinatentransformatie on 0 kan worden omgezet, volgt nu algemeen $(\psi f)(x) = 0$.

5. We gaan nu de volgende stelling bewijzen. *Stel v is een C^∞ vectorveld op $\mathbb{R}^n$ en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ en een unieke C^1 afbeelding $c : I_{x_0} \equiv (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ zodat*

$$\dot{c}(t) = v(c(t)) \tag{125}$$

voor alle $t \in I_{x_0}$ en $c(0) = x_0$. Deze stelling geeft dus bestaan en uniciteit van integraalkrommen van een glad vectorveld.

Kies $r > 0$ en noteer $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \le r\}$. Definieer K en M door de Lipschitz conditie $\|v(x) - v(y)\| \le K\|x - y\|$ voor alle $x, y \in B_r(x_0)$ en $M := \sup\{\|v(x)\|, x \in B_r(x_0)\}$. Neem nu $\varepsilon = r/M$ en definieer door middel van inductie een rij krommen $c_n : I_{x_0} \to \mathbb{R}^n$ door

$$c_{n+1}(t) := x_0 + \int_0^t ds\, v(c_n(s)) \tag{126}$$

met beginwaarde $c_0(t) = x_0\ \forall t \in I_{x_0}$.

(a) Laat zien dat $c_n(t) \in B_r(x_0)\ \forall t \in I_{x_0}$.

(b) Laat zien dat

$$\|c_{n+1}(t) - c_n(t)\| \le \frac{MK^n}{(n+1)!}|t|^{n+1}.$$

(c) Laat hieruit zien dat de rij $(c_n(t))$ in $\mathbb{R}^n$ voor vaste t convergeert naar $c(t)$. Dit geeft de gezochte functie c.

(d) Laat zien dat c voldoet aan de integraalvergelijking

$$c(t) = x_0 + \int_0^t ds\, v(c(s)), \tag{127}$$

en daarmee aan (125) en de beginvoorwaarde.

(e) Toon ten slotte aan dat de oplossing uniek is. Hint: stel dat er een andere oplossing d is. Laat met inductie zien dat

$$\|d(t) - c_n(t)\| \le \frac{MK^n}{(n+1)!}|t|^{n+1}.$$

6. Controleer de Jacobi-identiteit (22) en de Leibniz-regel (23) voor het Poisson-haakje (21).

7. Bewijs dat de Schrödinger-vergelijking (26) van de vorm (4) is zoals uitgelegd in de tekst. Dit is het makkelijkst in coordinaten. Laat eerst zien dat (21) met (27) te schrijven is als

$$\{f, g\} = i \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial \psi^l} \frac{\partial g}{\partial \overline{\psi}^l} - \frac{\partial g}{\partial \psi^l} \frac{\partial f}{\partial \overline{\psi}^l}. \tag{128}$$

Hier beschouwen we ψ^l en $\overline{\psi}^l$ als onafhankelijke coordinaten op $\mathbb{C}^k$. Schrijf dan (26), (28) en het vector-veld v_h in termen van deze coordinaten.

8. Bekijk in $n = 2$ het vector-veld $v(x, y) = (1, y)$ en vind expliciet de coordinatentransformatie f die zorgt voor $f_* v = (1, 0)$.

9. Vind een lokale coordinatentransformatie h op $\mathbb{R}^2$ die de functie $F(x, y) = \sin(x) - y$ transformeert in $F(h(x, y)) = x$ en tegelijk het vector-veld $(1, 0)$ transformeert in $(w(x, y), 0)$.

10. Geef de details van het bewijs van Stelling 2. Schrijf eerst duidelijk de inverse functiestelling en de impliciete functiestelling op.

11. Los $u = u(x, y)$ op uit

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{129}$$

met het Cauchy-oppervlak $C = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ en $u_0(y) = \sin y$.

12. Los $u = u(x, y)$ op uit

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = y \tag{130}$$

met het Cauchy-oppervlak $C = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ en $u_0(y) = \sin y$.

13. Neem de Euler-vergelijking (45). Hier is dus $n = 2$.

    (a) Los de vergelijking op volgens het stramien na Stelling 4 met $C^{(1)}$ gegeven door $x^2 = 0$ (i.e. $t = 0$ als $(x^1, x^2) = (x, t)$), met willekeurige beginwaarde u_0.

    (b) Laat voor $u_0(s) = \exp(-s^2)$ zien dat de oplossing niet globaal bestaat. Wat gebeurt er meetkundig?

    (c) Bereken de karakteristieken in $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^5$. Zie je de fysische interpretatie?

14. Geef aan wat de karakteristieken van (68) uit Definitie 1.1 te maken hebben met de karakteristieken van (3) en (43), in het geval dat F de bewuste speciale vorm heeft.

15. Bewijs Lemma 1.

16. Bewijs Stelling 5 in de andere richting.

17. Reproduceer (14) als oplossing van (13) en (16) als oplossing van (15) met behulp van de methode in sectie 1.5.

18. Bewijs Stelling 6 volgens het stramien van het bewijs van Stelling 5.

19. Laat zien dat de vergelijking $F(x, u_x, u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$ kan worden geschreven als $\tilde{F}(\varphi, \varphi_x) = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Hint: aap de truc uit sectie 1.6 na.

20. Los met behulp van het algoritme in de tekst de eikonale vergelijking (101) op met een andere beginwaarde (bijv. $u_0(y) = \exp(-y^2)$).

2 Tweede orde lineaire PDV

We beginnen nu met het boek van Gustafson.

2.1 Het Dirichlet-probleem

Lees §1.1 t/m 1.5.1 door, daar ging min of meer het college van 19 april over. Het zogenaamde Dirichlet-probleem is het belangrijkste voorbeeld van een elliptische tweede-orde lineaire PDV.

Huiswerk voor 24 april

Kies tussen 4 en 5 (of haal een wit voetje door ze allebei te maken).

1. Opgave 1.2.1 op p. 13 van Gustafson.
2. Opgave 1.4.2 op p. 21 van Gustafson.
3. Leid de op p. 144 gegeven algemene oplossing van het Dirichlet-probleem op het vierkant af m.b.v. de methode van scheiding van variabelen.
4. Leid de op p. 185 (onderaan) gegeven algemene oplossing van het Dirichlet-probleem op de eenheidscirkel af - i.e. de Poisson formule - m.b.v. de methode van scheiding van variabelen (in poolcoördinaten) - i.e. geef een duidelijke en op zichzelf staande versie van de afleiding in het boek en vul de details in.
5. Voorbeeld van het Dirichlet probleem op een onbegrensd gebied, nl. het bovenhalfvlak. Neem $n = 2$ en $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Dan is $\partial\Omega$ de x-as en is de randwaarde een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Laat zien dat de oplossing van het Dirichlet-probleem op het bovenhalfvlak formeel wordt gegeven door

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{g(z)}{(x - z)^2 + y^2}. \tag{131}$$

   Met andere woorden:

   (a) Laat zien dat $\Delta u = 0$ in Ω;

   (b) Laat zien dat $\lim_{y\to 0} u(x, y) = g(z)$.

   Ook deze formule heet de Poisson formule. Hint: kijk in een goed boek over complexe variabelen.

Oplossing Dirichlet-probleem mb.v. het maximum-principe

Op 26 april hebben we het Maximum Principle behandeld zoals in Gustafson, p. 16 en 112. Dit heet meestal het *zwakke* maximum-principe; het impliceert uniciteit van de oplossing van het Dirichlet-probleem voor een open begrensd gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ met continue rand $\partial\Omega$: dit probleem is een functie u te vinden z.d.d.

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega; \tag{132}$$

$$u = f \text{ op } \partial\Omega, \tag{133}$$

voor een gegeven f. Als f en de rand continu zijn, eist men dat $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(N.B. geen enkele stelling neemt aan dat de rand slechts één component heeft).

Het *sterke* maximum-principe zegt dat als $\Delta u \geq 0$ in Ω en u haar maximum op $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ in Ω aanneemt, u constant is. Deze sterke versie is nodig in een technische stap van het lange bewijs van het bestaan van een oplossing van het Dirichlet-probleem. De unieke oplossing van dit probleem blijkt te zijn:

$$u(x) = \sup\{v(x), v \in \underline{S}_f\}, \tag{134}$$

waarbij $\underline{S}_f$ de ruimte van *subharmonische functies* $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ is; dit betekent dat $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta v \geq 0$ in Ω en $v \leq f$ op $\partial\Omega$. Analoog heb je de ruimte $\overline{S}_f$ van *superharmonische functies* $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$; dit houdt in dat $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta w \leq 0$ in Ω en $w \geq f$ op $\partial\Omega$. Het sup in (134) bestaat omdat $v \leq w$ voor alle $v \in \underline{S}_f$ en $w \in \overline{S}_f$ (zie opgave).

Huiswerk voor week 19

1. Bewijs het (zwakke) maximum-principe zoals in Gustafson voor een elliptische operator

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{135}$$

   N.B. Een algemene elliptische operator heeft nog een derde term $c(x)$. Onder welke voorwaarden op c is het (zwakke) maximum-principe nog steeds waar?

2. (a) Leid uit het zwakke maximum-principe af dat als $\Delta u_1 \leq \Delta u_2$ in Ω en $u_1 \geq u_2$ op $\partial\Omega$, dan geldt $u_1 \geq u_2$ in Ω.

   (b) Toon daaruit aan dat $v \leq u$ voor $v \in \underline{S}_f$ en u een oplossing van het Dirichlet-probleem (133).

   (c) Toon tevens aan dat $v \leq w$ voor $v \in \underline{S}_f$ en $w \in \overline{S}_f$.

3. Neem $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$. Toon aan dat de functie

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{n\mathrm{Vol}(B_1)R} \int_{\partial B_R} dS(y)\, \frac{f(y)}{\|x - y\|^n} \tag{136}$$

   een oplossing is van het Dirichlet-probleem (133) voor $\Omega = B_R$:

   (a) Laat zien dat $\Delta u(x) = 0$ voor $x \in B_R$;

   (b) Laat zien dat $\lim_{x \to z} u(x) = f(z)$ voor $z \in \partial B_R$.

   Om (b) te doen moet je het volgende weten. Stel dat een oplossing u van $\Delta u = 0$ invariant is onder rotaties in $\mathbb{R}^n$. Als u continu is in 0, dan is u constant. Neem nu het speciale geval $f = 1$ in (136). Dan volgt uit (a) dat $u \equiv u_1$ voldoet aan $\Delta u_1 = 0$. Toon aan dat deze u_1 invariant is onder rotaties. Leid daaruit af de identiteit

$$\frac{R^2 - \|x\|^2}{n\mathrm{Vol}(B_1)R} \int_{\partial B_R} dS(y)\, \frac{1}{\|x - y\|^n} = 1. \tag{137}$$

   Je kunt dan dus schrijven

$$u(x) - f(z) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{n\mathrm{Vol}(B_1)R} \int_{\partial B_R} dS(y)\, \frac{f(y) - f(z)}{\|x - y\|^n} \tag{138}$$

   Neem nu op een verstandige wijze de limiet $x \to z$.

Oplossing Dirichlet-probleem mb.v. het variatie-principe

Een inleiding tot deze aanpak staat in Gustafson, §1.5.3 (p. 34) en §1.9.5 (p. 116). Wat nu volgt is een voortzetting van de (karige) theorie die hij geeft. In de uiteindelijke versie van deze oplossing, ontstaat na een interventie van Hilbert in 1900 die aan veel verwarring een einde maakte, komt het variatie-principe helemaal niet meer voor! Al het geknoei zoals beschreven in Gustafson is nu vervangen door argumenten rond Hilbert-ruimten.

Essentieel is de formule van Green:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w = -\int_\Omega w\Delta u + \int_{\partial\Omega} w\partial_{\mathbf{n}} u, \tag{139}$$

waarin $\partial_{\mathbf{n}} u(x) := \sum_{k=1}^n \mathbf{n}_k(x)\partial_k u(x)$ met $\mathbf{n}(x)$ de naar buiten wijzende normaal op $\partial\Omega$ in $x \in \partial\Omega$. Voor gladde functies is dit standaard Calculus (onder de aanname dat alle termen in (139) eindig zijn). De formule is echter ook waar voor $w \in C_c^\infty(\Omega)$ en $u \in H^2(\Omega)$, zie beneden.

We voeren nu twee Hilbert-ruimten in die de basis van de theorie vormen. De eerste, $H^2(\Omega)$, is de completering van de ruimte $C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R})/\mathbb{R}$ (waarbij we dus een functie modulo een constante functie nemen - waarom?) in de norm

$$\|f\|_2^2 := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u. \tag{140}$$

Deze norm komt van het inproduct

$$(u, v)_2 := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \tag{141}$$

zodat $H^2(\Omega)$ een Hilbert-ruimte is. De tweede belangrijke Hilbert-ruimte is $H_0^2(\Omega)$, de completering van $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})/\mathbb{R}$ in de norm (140). Dit is uiteraard een gesloten deelruimte van $H^2(\Omega)$. Aangezien $f \in C_c^\infty(\Omega)$ impliceert dat $f = 0$ op $\partial\Omega$ kun je $H_0^2(\Omega)$ beschouwen als de ruimte van functies in $H^2(\Omega)$ met randwaarde nul (zij het in een gegeneraliseerde zin). Als $f \in H_0^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ dan is $f(x) = 0$ voor alle $x \in \partial\Omega$.

Daarnaast is er de Hilbert-ruimte $L^2(\Omega)$, de completering van $C_c^\infty(\Omega)$ in de gebruikelijke norm $\|f\|_0^2 := \int_\Omega |f|^2$. De twee normen in kwestie hangen als volgt samen: er bestaat een constante $d > 0$ zodat

$$\|f\|_0 \leq d\|f\|_2. \tag{142}$$

Voor $u \in H^2(\Omega)$ hoeven tweede afgeleiden niet te bestaan. We zeggen niettemin dat $\Delta u = 0$ *in zwakke zin* als geldt $(u, \Delta w)_2 = 0$ voor alle $w \in C_c^\infty(\Omega)$. Als u zelf C^2 is, geeft (139) de relatie

$$-\int_\Omega w\Delta u + \int_{\partial\Omega} w\partial_{\mathbf{n}} u = -\int_\Omega u\Delta w + \int_{\partial\Omega} u\partial_{\mathbf{n}} w.$$

Omdat $w = \partial_{\mathbf{n}} w = 0$ op $\partial\Omega$ voor $w \in C_c^\infty(\Omega)$ staat hier $\int_\Omega w\Delta u = \int_\Omega u\Delta w$; als $\Delta u = 0$ zwak geldt dus per definitie $\int_\Omega w\Delta u = 0$, voor alle $w \in C_c^\infty(\Omega)$, hetgeen impliceert dat $\Delta u(x) = 0$ voor "bijna alle" $x \in \Omega$, maar als u continu is geeft dat gewoon $\Delta u = 0$ in de gebruikelijke oftewel "sterke" zin. Een zwakke oplossing van de Laplace-vergelijking die toevallig twee keer differentieerbaar is, is automatisch een sterke oplossing. Een veel dieper (en moeilijker) resultaat van Hermann Weyl is:

Stelling 7 *Als $\Delta u = 0$ in zwakke zin voor $u \in H^2(\Omega)$, geldt $u \in C^\infty(\Omega)$ (en daarmee dus $\Delta u = 0$ in sterke zin).*

Voor het bewijs zie Opgave 3 beneden. Een ander technisch resultaat dat bijdraagt tot de oplossing en hier zonder bewijs gegeven wordt is:

Lemma 5 *Stel dat $\partial\Omega$ C^1 is (i.e. de functies die dit oppervlak lokaal karakteriseren zijn C^1)en dat $f \in C^1(\partial\Omega)$. Dan is er een element $\tilde{f} \in C^1(\overline{\Omega}) \subset H^2(\Omega)$ met de gegeven randwaarde f.*

Het belangrijkste feit van de onderhavige aanpak is het volgende lemma.

Lemma 6 *Het orthogonale complement $H_0^2(\Omega)^\perp$ van $H_0^2(\Omega)$ bestaat uit zwakke (en dus sterke) oplossingen u van $\Delta u = 0$.*

Per definitie is $u \in H_0^2(\Omega)^\perp$ als $(u, w)_2 = 0$ voor alle $w \in H_0^2(\Omega)$. Een eenvoudig approximatie-argument geeft dat het voldoende is als $(u, w)_2 = 0$ voor alle $w \in C_c^\infty(\Omega)$. In dat geval geeft (139) onmiddellijk $\Delta u = 0$. Dit argument werkt ook in de omgekeerde richting. Q.E.D.

Stel nu dat $\tilde{f}$ is als in Lemma 5 bij gegeven randwaarde f. Omdat $H^2(\Omega) = H_0^2(\Omega) \oplus H_0^2(\Omega)^\perp$ heeft $\tilde{f}$ een unieke orthogonale decompositie $\tilde{f} = \tilde{f}^\parallel + \tilde{f}^\perp$, where $\tilde{f}^\parallel \in H_0^2(\Omega)$ and $\tilde{f}^\perp \in H_0^2(\Omega)^\perp$; zie bijvoorbeeld Proposition III.6 in *2006 Lecture Notes on Hilbert Spaces and Quantum Mechanics.* Uit Lemma 6 volgt dat $u := \tilde{f}^\perp$ voldoet aan $\Delta u = 0$ in Ω, en tevens dat $u - \tilde{f} \in H_0^2(\Omega)$. Dit suggereert dat $u - \tilde{f} = 0$ op $\partial\Omega$, maar we weten niet dat $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Een moeizaam technisch argument geeft dat dit het geval is. Dan volgt $u - til f$ op de rand $\partial\Omega$, maar omdat $\tilde{f} = f$ op de rand volgt uiteindelijk $u = f$ op $\partial\Omega$. Conclusie: het Dirichlet-probleem is opgelost! De oplossing u is niets anders dan de projectie van de uitbreiding $\tilde{f}$ van de randwaarde f tot Ω op het orthogonale complement van $H_0^2(\Omega)$.

Deze oplossing is uniek: als u_1 en u_2 beide voldoen aan $\Delta u_i = 0$ en $u_i - \tilde{f} \in H_0^2(\Omega)$ - en daarmee aan de randvoorwaarde - dan voldoet $u := u_1 - u_2$ eveneens aan $\Delta u = 0$ en bovendien aan $u \in H_2^0(\Omega)$. Lemma 6 geeft dan $u \in H_2^0(\Omega) \cap H_2^0(\Omega)^\perp = 0$, dus $u = 0$ en $u_1 = u_2$.

Het verband met het variatieprincipe is ten slotte als volgt (zie ook Gustafson voor de heuristische theorie). De Dirichlet-functionaal is (vgl. (140))

$$D(u) := \|u\|_2^2. \tag{143}$$

De claim is dat de oplossing u van het Dirichlet-probleem deze functionaal minimaliseert onder alle elementen $v \in H^2(\Omega)$ die aan de randvoorwaarde voldoen, i.e. voldoen aan $v - \tilde{f} \in H_0^2(\Omega)$. Met $w := v - u$ geldt $w \in H_0^2(\Omega)$, zodat volgt

$$D(v) = D(u + w) = (u + w, u + w)_2 = D(u) + D(w) \geq D(u);$$

er geldt op grond van Lemma 6 immers dat $(u, w)_2 = 0$.

Indien met uitgaat van D is de bijbehorende Euler–Lagrange vergelijking precies $\Delta u = 0$; het probleem is dan om aan te tonen dat daar een oplossing van bestaat onder de gegeven randvoorwaarde. Dat kan met behulp van de Hilbert-ruimte aanpak die boven is gegeven; maar als men zo te werk gaat, speelt het variatieprincipe in feite geen enkele rol meer (behalve ter motivatie van de norm (140)).

Opgaven voor 24 mei

1. Bewijs de Cauchy-Schwartz ongelijkheid voor het inproduct (141).
2. (a) Bewijs (142) en vind de kleinste d waarvoor het geldt.
   (b) Bewijs vervolgens dat $H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$; je moet dan dus nog aantonen dat $f = 0$ in $L^2(\Omega)$ impliceert $f = 0$ in $H^2(\Omega)$.
3. Bewijs Stelling 7 voor $n = 1$ en $n = 2$. Hint: zie de bijgevoegde pp. 555-557 van P. Lax, *Functional Analysis.* Zijn bewijs geldt voor $n > 2$. Pas dit aan voor $n = 1$ en $n = 2$. N.B. Waar Lax het heeft over distributies spreken wij (in dit geval) over elementen van $H^2(\Omega)$.

2.2 Scheiding van variabelen en zelfgeadjungeerde uitbreidingen van symmetrische operatoren

Deze methode staat door het hele boek van Gustafson heen uitgelegd, zie met name §§2.1-2.3. De methode heeft alleen een kans van slagen als het domein Ω waarop de PDV is gedefinieerd een rand heeft die 'meedoet' met de scheiding van variabelen in de PDV zelf. Als dit lukt eindigt men met een Sturm-Liouville probleem, zie §2.4. Om dit rigoreus te behandelen moeten we iets weten over zelfgeadjungeerde uitbreidingen van symmetrische operatoren. Zie Problem 1.9.7 op p. 126-128 voor een eerste kennismaking met deze problematiek. Het volgende gaat ervan uit dat de lezer vertrouwd is met het college Hilbert-ruimten en kwantummechanica.

In Definition III.4 van de syllabus vinden we dat een onbegrensde operator $a : D(a) \to H$ een geadjungeerde $a^* : D(a^*) \to H$ heeft, met domein $D(a^*)$ gegeven door alle $f \in H$ waarvoor de functionaal $g \mapsto \varphi_f(g) := (f, ag)$, met $g \in D(a)$, begrensd is, i.e. $|(f, ag) \leq C\|g\|$. In dat geval bestaat er een $h \in H$ zodat $(f, ag) = (h, g)$ en zetten we $a^*f := h$, zodat $(f, ag) = (a^*f, g)$, formeel zoals in het begrensde geval, maar met de beperkingen $f \in D(a^*)$ en $g \in D(a)$. De operator a heet *symmetrisch* als $D(a) \subset D(a^*)$ en $a^*_{|D(a)} = a$. Mits $D(a) \subset D(a^*)$ is de tweede voorwaarde eenvoudig te controleren door te bepalen of

$$(f, ag) = (af, g) \tag{144}$$

voor alle $f, g \in D(a)$. De operator a heet *zelfgeadjungeerd* als $a^* = a$, hetgeen uiteenvalt in de twee condities

$$D(a) = D(a^*) \tag{145}$$

en (144).

Om deze theorie op differentiaaloperatoren toe te passen voeren we de *zwakke afgeleide* in van een functie $f \in L^2(\alpha, \beta)$ met $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. We bekijken de lineaire operator $p : g \mapsto -ig'$ op $D(p) = C_c^\infty(\alpha, \beta)$. Dan bestaat $D(p^*)$ uit de functies $f \in L^2(\alpha, \beta)$ waarvoor een $h \in L^2$ bestaat zodat $(f, g') = -(h, g)$ voor alle $g \in C_c^\infty(\alpha, \beta)$. Dan zeggen we dat $f' := h$ de zwakke afgeleide is van f. Als f differentieerbaar is in de gewone zin valt de zwakke afgeleide samen met de gebruikelijke. Hetzelfde geldt voor hogere afgeleiden; zo definieren we $p^2 = -d^2/dx^2$ op $D(p^2) = D(p) = C_c^\infty(\alpha, \beta)$ en zien dat de operatoren p en p^2 symmetrisch zijn.

We willen graag zelfgeadjungeerde operatoren, omdat daarop de spectraalstelling van toepassing is. Als he spectrum discreet is, volgt daaruit dat de eigenfuncties een volledig stelsel vormen, wat weer tot de meest algemene oplossing van een PDV kan leiden. John von Neumann heeft de mensheid geleerd hoe je (vaak) een zelfgeadjungeerde operator uit een symmetrische operator kunt maken. Deze theorie staat behandeld (zij het zonder toepassingen) in de oude syllabus van *Hilbert Space and Quantum Mechanics*. Daar zijn ook bewijzen te vinden van de volgende uitspraken.

De *deficiency indices* van een symmetrische operator a zijn gedefinieerd als

$$n_\pm(a) := \dim(\ker(a^* \mp i)); \tag{146}$$

met andere woorden, $n_\pm(a)$ is het aantal lineair onafhankelijke oplossingen van $a^*f = \pm if$ voor $f \in D(a^*)$. Dit is meestal makkelijk te bepalen, zoals de opgaven laten zien.

Opgaven voor 31 mei

1. Bepaal de deficiency indices voor $-id/dx$ en $-d^2/dx^2$, beide gedefinieerd op het domein $D(-id/dx) = D(-d^2/dx^2) = C_c^\infty(\alpha, \beta) \subset H = L^2(\alpha, \beta)$, met:

   (a) $\alpha = -\infty$ en $\beta = \infty$;

   (b) $\alpha = 0$ en $\beta = \infty$;

   (c) $\alpha = 0$ en $\beta = 1$.

2. Stel dat er een antilineaire operator $J : H \to H$ bestaat met $J(D(a)) \subset D(a)$, $J^2 = 1$ en $Jaf = aJf$ voor alle $f \in D(a)$. Bewijs dat als a symmetrisch is, dan geldt $n_+(a) = n_-(a)$. Bekijk de vorige opgaven in dit licht.

3. Neem nogmaals $a = -id/dx$ op $L^2(0,1)$ maar nu op het domein

$$D(-id/dx) = \{f \in C^\infty(0,1) \mid f(0) = e^{i\theta} f(1)\},$$

waarbij $f(0) := \lim_{x\downarrow 0} f(x)$ etc. Wat zijn de deficiency indices?

4. Stel dat $D(a^*)$ dicht ligt in H (dit is bijvoorbeeld het geval als a symmetrisch is). Bewijs dat $R(a \pm i)^\perp = \ker(a^* \mp i)$.

Met behulp van de deficiency indices bepalen we nu of een gegeven symmetrische operator $a \subset a^*$ een zelfgeadjungeerde uitbreiding heeft, i.e. of er een operator $b : D(b) \to H$ is met

$$a \subset a^- \subset b \subset a^*$$

zdd $b^* = b$. (Hier is a^- de afsluiting van a, met domein $D(a^-)$ bestaande uit alle $f \in H$ waarvoor een rij (f_n) in $D(a)$ bestaat zdd $f_n \to f$ *en* $af_n \to g$ voor een $g \in H$; dan werkt a^- op $f \in D(a^-)$ als $a^- := \lim_n af_n$).

Stelling 8 *Stel dat a symmetrisch is.*

1. *Als $n_+(a) = n_-(a) = 0$, dan is a^- zelfgeadjungeerd.*

2. *Als $n_+(a) \neq n_-(a)$ bestaat er geen zelfgeadjungeerde uitbreiding van a.*

3. *Als $n_+(a) = n_-(a)$ correspondeert iedere zelfgeadjungeerde uitbreiding $b = a_u$ van a met een unitaire operator $u : \ker(a^* - i) \to \ker(a^* + i)$. Het domein van a_u is*

$$D(a_u) = \{f + g + ug \mid f \in D(a^-), g \in \ker(a^* - i)\}, \tag{147}$$

en de werking van a_u op een vector van dit domein is

$$a_u(f + g + ug) := a^- f + i(1 - u)g. \tag{148}$$

Er geldt dan $a_u^* = a_u$.

Merk op dat het eerste deel van de stelling een speciaal geval is van het laatste.

Opgaven voor 7 juni

1. Neem $a = -id/dx$ op $D(a) = C_c^\infty(0,1) \subset H := L^2(0,1)$. Dan bestaat $D(a^*)$ uit alle $f \in H$ met $f' \in H$ (zwakke afgeleide). Dergelijke functies blijken continu te zijn, zodat de randwaarden $f(0) := \lim_{x\downarrow 0}$ en $f(1) := \lim_{x\uparrow 1}$ bestaan. We noemen $D(a^*)$ verder $AC[0,1]$ (voor Absoluut Continue functies, deze naamgeving doet er verder niet toe). Het domein $D(a^-)$ blijkt te bestaat uit alle $f \in AC[0,1]$ met $f(0) = f(1) = 0$.

   We bekijken nu de uitbreiding b van a^- met $D(b)$ bestaande uit alle $f \in AC[0,1]$ met $f(0) = 0$. Wat is b^*? Is b zelfgeadjungeerd?

2. Bepaal in de situatie van de vorige opgave alle zelfgeadjungeerde uitbreidingen van a. Laat m.b.v. Stelling 8 zien dat iedere $\theta \in [0, 2\pi)$ een zelfgeadjungeerde uitbreiding a_θ geeft met domein $D(a_\theta)$ bestaande uit alle $f \in AC[0,1]$ met $f(1) = \exp(i\theta)f(0)$.