Klaas Landsman
IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
landsman@math.ru.nl

Onderzoek

Zwarte gaten en het werk van Roger Penrose

Dit is een uitgewerkte versie van de voordracht die Klaas Landsman gegeven heeft op het KWG Wintersymposium 2022 over zwarte gaten (15 januari 2022). Roger Penrose won in 2020 als eerste wiskundige ooit de (halve) Nobelprijs voor Natuurkunde voor zijn stelling uit 1965 over het noodzakelijk optreden van singulariteiten in zwarte gaten en daarmee staat hij in dit artikel centraal (al lijdt zijn stelling, zoals zal blijken, onder een mismatch tussen de wiskunde en de toepassing).

Wie of wat is fascinerender, Roger Penrose of zwarte gaten? Van de eerste lijkt het bestaan zeker (al is hij inmiddels 90) en van de tweede inmiddels ook, dankzij zowel Penrose als de twee winnaars van de andere helft van de Nobelprijs van 2020 (te weten Andrea Ghez en Reinhard Genzel voor hun empirische argumenten voor het bestaan van een superzwaar zwart gat in het centrum van onze Melkweg [27,37]). Ook de foto hieronder uit 2019 van het nog veel zwaardere zwarte gat in het verderop gelegen stelsel M87 door de *Event Horizon Telescope* [35] draagt bij aan dit geloof, al was het doel van de foto niet zozeer om het bestaan van zwarte gaten aan te tonen: dat werd al aangenomen in de reconstructie van het beeld uit de data.

Foto: EHT Collaboration

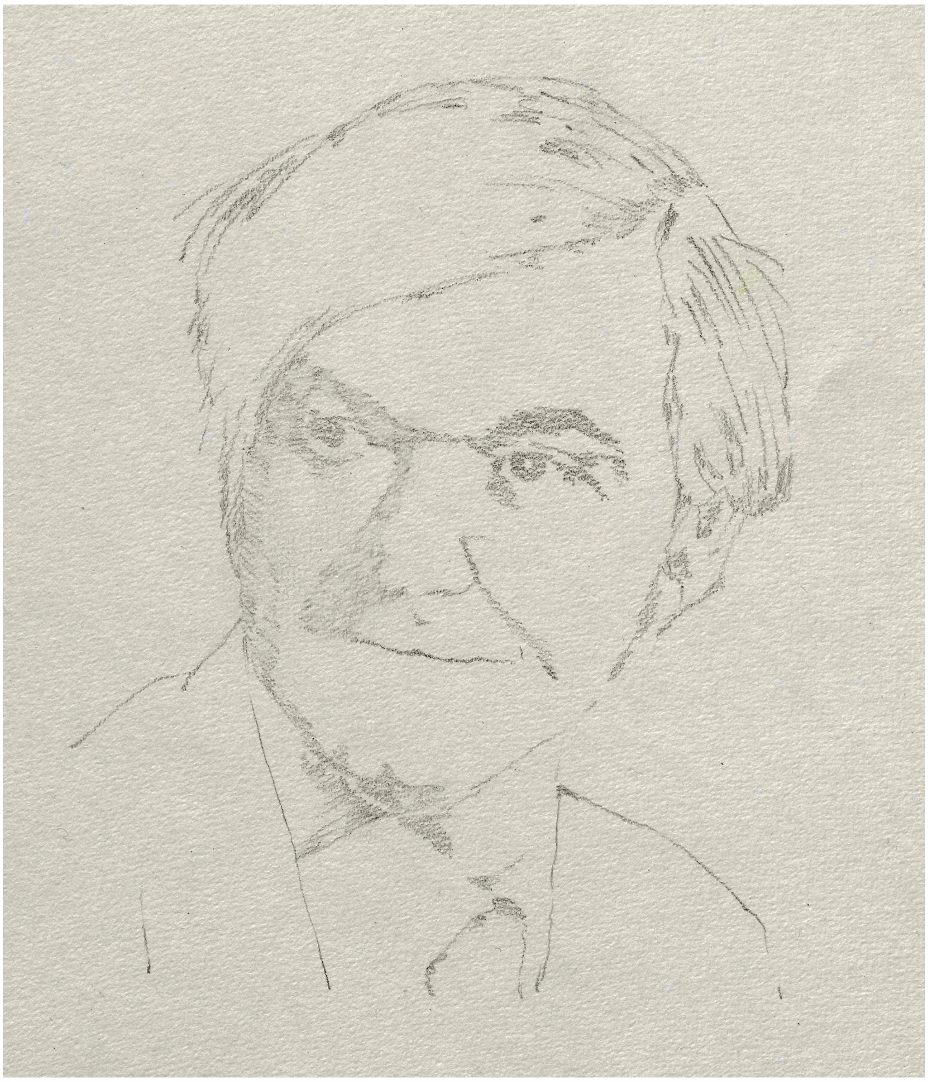
Zwarte gat in het sterrenstelsel M87

Wie is Roger Penrose?

Roger Penrose werd in 1931 geboren in een briljante familie van academici en kunstenaars. Zijn vader Lionel was geneticus en psychiater, zijn oom Roland een vermaard kunstschilder. Zijn broer Jonathan was de beste Britse schaker ooit (uit mijn jeugd herinner ik me de meesterlijke partij Penrose–Tal uit 1960). Zijn broer Oliver en zus Shirley waren beiden hoogleraar, in respectievelijk statistische fysica, en genetica; het houdt niet op. Meer dan de zeven vinkjes dus, maar hou je maar eens staande in zo'n familie! Naast zijn baanbrekende werk aan de algemene relativiteitstheorie (ART) en in het bijzonder aan zwarte gaten, was hij de grondlegger van de wiskundige theorie van quasi-periodieke vlakvullingen (*Penrose tilings*), van verschillende diagramtechnieken in algebraïsche meetkunde en representatietheorie, en ten slotte van twistortheorie, een geünificeerde theorie van ruimte-tijd, massaloze deeltjes, en conforme en complexe meetkunde die het in de natuurkunde niet gehaald heeft maar in Oxford (waar Penrose van 1973 tot 1999 *Rouse Ball Professor of Mathematics* was) grote invloed had op wiskundigen als Atiyah, Donaldson en Hitchin.

Bij het grote publiek is Penrose vooral bekend wegens zijn boeken over het verband tussen bewustzijn, logica, kwantumtheorie, en zwaartekracht, culminerend in [20]. Zijn aanpak (waarbij hij alle grote problemen van de fundamentele wetenschap op één hoop gooit) en zijn conclusies (dat het brein geen computer kan zijn en evenmin door bestaande wetenschap beschreven kan worden, en dat de zwaartekracht het meetprobleem van de kwantummechanica oplost) zijn omstreden, maar mogelijk niet kansloos; zie bijvoorbeeld [11] voor een goede, neutrale analyse van de eerste kwestie. Interessant is dat Penrose als student al met dergelijke zaken bezig was (en niet met gravitatie en zwarte gaten); zowel het geschreven interview met Lightman [13] als het gefilmde interview met Hodges (de Turing-biograaf, die oorspronkelijk een student van Penrose was) [31] geven een mooi overzicht van de loopbaan en het denken van Penrose. Op een andere manier geldt dit ook voor zijn boek *The Road to Reality* [19] (1127 pagina's!), alsmede voor het *Festschrift* [9].

Ten slotte is de interactie tussen Penrose en Escher vermeldenswaard. Deze begon toen Penrose in 1954 tijdens de ICM in Amsterdam, waar hij als student aan deelnam, een tentoonstelling van Escher in het Stedelijk Museum bezocht (Penrose herinnert zich nog dat hij daar met de tram heen ging). Dit inspireerde hem tot een artikel met zijn vader [24] waarin hij een aantal later bekend geworden 'onmogelijke figuren' tekent, zoals de driehoek van Penrose [36]. Dit stuurde hij naar Escher, die mede hierdoor geïnspireerd in 1961 zijn litho *Waterval* maakte [34] en Penrose vervolgens in 1962 bij hem thuis in Baarn uitnodigde. Omgekeerd beïnvloedde Escher ook Penrose: het idee van een Penrose-diagram (zie onder) is om door middel van een conforme (quasi-)compactificatie en dus met behoud van hoeken 'oneindig' naar binnen te trekken. Al kende Penrose dit idee natuurlijk al uit de wiskunde, als visueel ingesteld denker waren de *Cirkellimiet* houtsneden van Escher (die op zijn beurt weer door Coxeter was beïnvloed [33]), hierbij eveneens een grote inspiratie. Zie ook de documentaire [16].

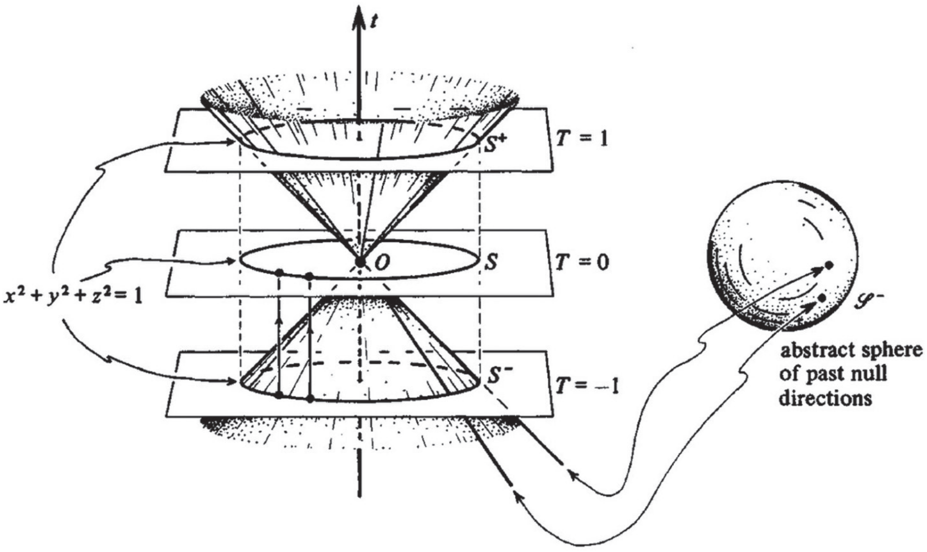


Tekening: Edith de Jong, gebaseerd op de foto van Penrose in *Gravitation* [15, p.936]

Roger Penrose in 1970

Wat is algemene relativiteitstheorie?

Aangezien zwarte gaten meestal worden bestudeerd in de context van de ART en ook Penrose deze theorie altijd als uitgangspunt nam (en zeer verrijkte), moet daar eerst iets over worden gezegd. De ART is een theorie van ruimte en tijd en *en passant* tevens van de zwaartekracht, die door Einstein in november 1915 na een lange en moeizame zoektocht werd opgesteld [10]. Hilbert, die gedurende dat jaar in een race met Einstein was verwikkeld om de juiste vergelijkingen voor de theorie te vinden en wist waar hij het over had, beschouwde de ART als 'een van de grootste wetenschappelijke prestaties ooit' en als de 'voltooiing van het project dat Pythagoras was begonnen en door Newton was voortgezet'. Wiskundig gesproken is



Lichtkegel (in Minkowski-ruimte-tijd) en de hemelbol, getekend door Penrose zelf [25, Fig. 1–2, p. 9]. Het verband tussen lichtstralen, de Riemann-sfeer (dat wil zeggen de bol met de gebruikelijke holomorfe en conforme structuur) in de complexe meetkunde, en spinoren in de kwantummechanica is een levenslange fascinatie van Penrose (waar we hier niet nader op in gaan) [25, 26]. Bij vrijwel alle tekeningen van Penrose valt overigens op hoe fraai, instructief, precies, goed doordacht, en soms speels ze zijn, dat laatste zelfs in wetenschappelijk artikelen en boeken.

de ART in eerste instantie een combinatie van twee constructies:

1. De *Riemannse meetkunde* uit 1854, waarin meetkunde in een willekeurige dimensie d wordt beschreven door een metriek $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij}(x)\,dx^i dx^j$, waarbij $(g_{ij})(x)$ een positief definiete $d \times d$-matrix is die van het punt x in de ruimte af mag hangen. De euclidische meetkunde is het speciale geval $d = 2$ of $d = 3$ en dan $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, en ook alle vormen van niet-euclidische meetkunde zijn speciale gevallen van de Riemannse meetkunde.
2. De *Minkowski-meetkunde* uit 1908, waarin de ruimte-tijd van Einsteins speciale relativiteitstheorie uit 1905 wiskundig wordt beschreven door op $\mathbb{R}^4$ eveneens een metriek van bovenstaande vorm te leggen, waarbij de matrix $(g_{ij})(x)$ echter niet meer positief definiet is maar, voor iedere $x \in \mathbb{R}^4$, gelijk is aan $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$.

Einstein combineerde deze ideeën in zijn ART door te postuleren dat de ruimte-tijd een vierdimensionaal continuüm M is, opgetuigd met een metriek g_{ij} die anders dan bij Riemann de signatuur $-{+}{+}{+}$ heeft in plaats van $++++$, en anders dan bij Minkowski niet vlak hoeft te zijn, dat wil zeggen niet gelijk aan $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Deze metriek wordt bepaald door de materie in het heelal via de *Einstein-vergelijkingen*, een stelsel van tien meetkundig fraaie maar analytisch ingewikkelde gekoppelde niet-lineaire PDVs voor de tien onafhankelijke componenten van de symmetrische 4×4-matrix $g_{ij}(x)$. Testdeeltjes (die niet zelf g beïnvloeden) bewegen via geodeten en zo verklaart de ART planeetbanen, afbuiging licht, enzovoort. Zie bijvoorbeeld [1] voor een wiskundige behandeling. Vergeleken met de theorie van Newton is de zwaartekracht bij Einstein geen kracht meer, maar een gevolg van de metrische structuur van de ruimte-tijd.

Globale overwegingen rond M (wij zouden nu zeggen: een differentieerbare of gladde variëteit) had Einstein nog niet of nauwelijks (hij werkte altijd in coördinaten), maar dat gold ook voor zijn wiskundige tijdgenoten als Levi-Civita en diens leermeester Ricci, die een effectieve differentiaalrekening voor de Riemannse meetkunde hadden ontwikkeld die Einstein uitstekend van pas kwam, en zelfs voor Hilbert (die de Einstein-vergelijkingen in 1917 als eerste als PDVs bestudeerde). Ook Riemann, toch een van de grondleggers van het globale en topologische denken, deed daar in zijn meetkunde weinig mee.

Causale structuur van ruimte-tijd

Globaal denken over het paar (M,g) van ruimte-tijd met metriek vinden we vanaf Weyl [32], die in veel opzichten een voorloper van Penrose was. Dit geldt met name voor de nadruk van beiden op de *conforme* en daarmee de *causale* structuur van de ruimte-tijd, waarin *lichtkegels* als mogelijke trajecten van lichtstralen en zwaartekrachtsgolven een allesbepalende rol spelen. Niettemin zijn vrijwel alle belangrijke wiskundige begrippen en resultaten in dit opzicht afkomstig van Penrose, die zich hier vanaf ongeveer 1960 mee bezig hield. Meer in het algemeen was Penrose de eerste die topologische technieken in de ART toepaste; hoe nieuw dat destijds zelfs voor wiskundig (maar dan voornamelijk in de differentiaalmeetkunde) geschoolde theoretisch fysici was, leest men in Thorne [30], wiens boek sowieso een aanrader is als geschiedenis van de ART uit eerste hand.

Om de causale structuur van een ruimte-tijd (M,g) in kaart te brengen voerde Penrose de *causal future* $J^+(S)$ (respectievelijk *causal past* $J^-(S)$) van een deelruimte $S \subset M$ in als de verzameling punten in M die vanuit S bereikt kunnen worden via een naar de toekomst (verleden) gerichte *causale* curve $t \mapsto c(t)$ (met raakvector $\dot{c} = dc/dt$), dat wil zeggen dat $g(\dot{c},\dot{c}) \le 0$ langs de hele curve (merk op dat de metriek g in de ART niet positief definiet is!).

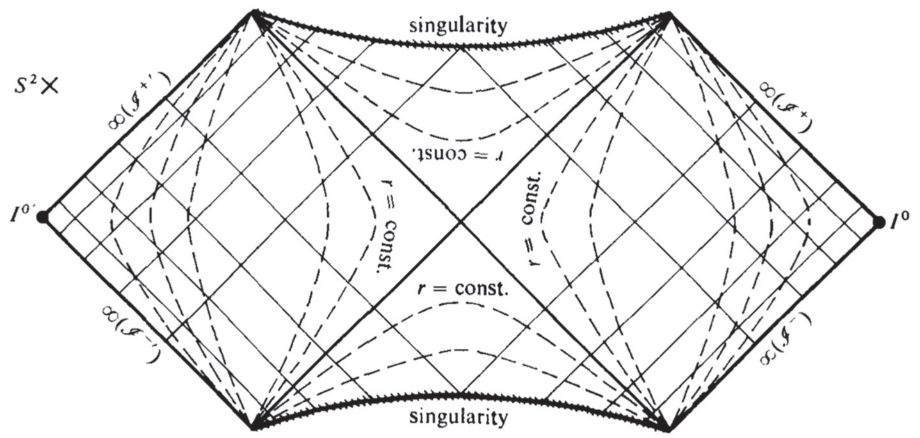
Hieruit ontstaat het cruciale begrip *(future) null infinity* $\mathscr{I}^+$, uit te spreken als 'scri-plus'. Dit is een deel van de rand van een soort conforme compactificatie $i: M \hookrightarrow \hat{M}$ van M, waarbij

$$i(M) = \hat{M} \setminus \partial\hat{M},$$

met $\partial\hat{M}$ de rand van M. Zo'n compactificatie is te vergelijken met bijvoorbeeld het oprollen van het complexe vlak tot de Riemann-sfeer (waarin slechts een enkel compactificatiepunt nodig is); zie [12, §10.1] voor een precieze definitie. Ruw gezegd: als M een metriek g heeft, heeft $\hat{M}$ een metriek $\hat{g} = \Omega^2 g$, waarbij $\Omega: \hat{M} \to [0,\infty)$ positief is op $i(M)$ en nul op de rand $\partial\hat{M}$. Hierdoor doet $\hat{g}$ verre afstanden krimpen en trekt $\hat{M}$ ver gelegen gebieden in M (en zelfs 'oneindig') naar binnen, precies zoals bij Escher [33]. Als deze constructie werkt (zoals voor zogenaamde asymptotisch vlakke metrieken g) kunnen we definiëren

$$\mathscr{I}^{\pm} := \partial\hat{M} \cap J^{\pm}(M),$$

waarbij $J^{\pm}$ wordt berekend in de fictieve ruimte-tijd $(\hat{M},\hat{g})$. Gezien als gebied op 'oneindig' in M is $\mathscr{I}^+$ de locatie waar alle lichtstralen en zwaartekrachtsgolven 'uiteindelijk' (als limiet) terechtkomen, tenzij ze in een zwart gat verdwijnen (zie de volgende paragraaf).



Penrose-diagram van Kruskal-ruimte-tijd [22, Fig. 37, p. 208]

De causale structuur van een ruimte-tijd (M,g) kan via de (quasi-)compactificatie $(\hat{M},\hat{g})$ worden gevisualiseerd in een *Penrose-diagram*; dit is een 2D-plaatje van $\hat{M}$ waarin (ruimteachtige) bollen als punten worden getekend en lichtstralen net als in Minkowski-ruimte-tijd rechte lijnen langs $\pm 45^\circ$ zijn. Het bovenstaande voorbeeld is een door Penrose zelf getekend diagram van een ruimte-tijd met een niet-roterend zwart gat en tevens een wit gat in een soort spiegel-universum. Zie bijvoorbeeld [12, 15, 22]. Dergelijke diagrammen zijn inmiddels niet meer weg te denken uit de ART. Toen Hawking vanwege zijn ziekte (ALS) niet meer zelf kon schrijven en steeds meer was aangewezen op zijn vermogen tot visualisatie, speelden de diagrammen van zijn vriend en collega Penrose zelfs een welhaast levensreddende rol!

Wat is een zwart gat?

Een zwart gat heeft per definitie twee eigenschappen: het is *zwart* en het is een *gat*. De eerste eigenschap is al vanuit de Newtoniaanse gravitatietheorie uit 1687 te verklaren, zoals de Britse geoloog Michell (in 1783) en de Franse wiskundige Laplace (in 1799) al doorhadden: voor een bol met straal r en massa m is de ontsnappingssnelheid groter dan de lichtsnelheid c als $r < 2Gm/c^2$, waardoor met name licht dan niet weg kan en het object onzichtbaar is (de kritieke straal $r = 2Gm/c^2$ is, voor kenners, precies de Schwarzschild-radius van een statisch zwart gat in de ART). Dit krijgt extra lading in Einsteins speciale relativiteitstheorie, volgens welke niets sneller kan bewegen dan het licht, en dus ook niets van de bol kan ontsnappen. Een zwart object (niet te verwarren met een zwarte straler, die wel degelijk straling uitzendt maar dat buiten het zichtbare bereik doet) is dus voldoende zwaar en tegelijk voldoende klein om geen licht, en daarmee ook niets anders, te laten ontsnappen. De *horizon* is dan, voorlopig nog in woorden, de muur van deze gevangenis, oftewel de rand het gebied rond het object waaruit niets meer kan ontsnappen.

Dankzij de boven aangeduide topologische technieken van Penrose kon hij (en later Hawking) dit idee ook in de ART definiëren [6, 17]:

Definitie 1.

1. Een ruimte-tijd (M,g) met conforme (quasi-)compactificatie $(\hat{M},\hat{g})$ bevat een *zwart object* als het binnengebied
$$Z \coloneqq M \setminus J^-(\mathscr{I}^+)$$
daarvan niet leeg is, oftewel als het buitengebied
$$B \coloneqq J^-(\mathscr{I}^+) \cap M$$
niet gelijk is aan M (met $J^\pm$ berekend in de conforme (quasi-)compactificatie $(\hat{M},\hat{g})$).
2. Als dat zo is, is de *horizon* van het zwarte object de rand ∂Z van het gebied Z dat het object bevat/is.

Het idee is dus dat licht uit het buitengebied B nog kan ontsnappen, en uit het binnengebied Z niet. De horizon ∂Z hoort bij het zwarte object Z; lichtstralen staan daar letterlijk stil, als het ware vastgeketend tussen hun neiging om weg te vliegen en de werking van de zwaartekracht die ze naar binnen trekt.

Het idee van een *gat* is lastiger. Intuïtief is dat een *singulariteit in de ruimte-tijd*, maar dit kan van alles betekenen, zoals een punt *in* de ruimte-tijd waar de materiedichtheid oneindig is, en daarmee via de Einstein-vergelijkingen ook de kromming, of een punt dat juist *ontbreekt* in de ruimte-tijd. Of iets anders.

Het eerste idee is onmogelijk, omdat de ART altijd werkt met gladde of tenminste continue meetkundige structuren, en een punt waarin de kromming oneindig is daarom niet in M kan liggen (daar komt het probleem bij, welke maat van kromming men zou moeten hanteren — anders dan in $d = 2$ waar men de kromming van Gauss heeft, zijn er in $d = 4$ vele invarianten van de Riemann-krommingstensor). Het tweede idee lijkt ook al met zichzelf in tegenspraak en zelfs genieën en ART-pioniers als Einstein, Hilbert en Weyl wisten zich eigenlijk geen raad met singulariteiten (in de Schwarzschild-oplossing uit 1916 [1, 12, 15] werden zowel $r = 0$ als $r = 2m$ als onfysische, respectievelijk onbereikbare singulariteiten gezien, zonder een duidelijk idee wat dit dan inhield, hetgeen tevens aantoont dat nog verwarring bestond over pure coördinaat-singulariteiten van de metriek [5]).

Niettemin kan men deze beide problematische ideeën combineren! Historisch gezien was Misner [14] vermoedelijk de eerste die dit deed, maar Penrose [18] hanteerde impliciet dezelfde definitie:

Definitie 2. Een *singulariteit* in een ruimte-tijd (M,g) is een onvolledige (dat wil zeggen: niet verder dan zijn definitiegebied continu voort te zetten) causale geodeet in M.

Als we een causale geodeet zien als een mogelijk traject van een waarnemer of lichtstraal in vrije val, dan is het idee dat dit traject plotseling ophoudt omdat het arme wezen in 'het gat' valt. Vooral Hawking was (als promovendus) zeer gecharmeerd van dit idee en maakte de definitie expliciet in zijn fameuze *Adams Prize Essay* uit 1966 [7]. Later schreef hij daar over:

> "Timelike geodesic incompleteness has an immediate physical significance in that it presents the possibility that there could be freely moving observers or particles whose histories did not exist after (or before) a finite interval of proper time. This would appear to be an even more objectionable feature than infinite curvature and so it seems appropriate to regard such a space as singular. (...) The advantage of taking timelike and/or null incompleteness as being indicative

of the presence of a singularity is [also] that on this basis one can establish a number of theorems about their occurrence.” [8, p. 258]

Het laatste doet denken aan de opmerking (van bijvoorbeeld Glimm): “A good definition should be the hypothesis of a theorem!”

Nu kunnen we een zwart gat in de ART wiskundig definiëren:

Definitie 3. Een *zwart gat* is (in het kader van de ART) een zwart object Z met een singulariteit binnen diens horizon ∂Z.

Met dat laatste bedoelen we dat als de bewuste geodeet een curve $\gamma : (a,b) \to M$ is en de onvolledigheid zeg bij b optreedt, er een $\varepsilon > 0$ bestaat zodat tenminste $\gamma([b-\varepsilon, b))$ in Z ligt.

De singulariteitenstelling van Penrose

Penrose won de Nobelprijs voor de volgende stelling [18]:

Stelling. *Stel dat* (*ruw gezegd*):

1. *De metriek van ruimte-tijd middels de Einstein-vergelijkingen ‘uniek’ wordt bepaald door beginvoorwaarden op een niet-compacte deelruimte*.
2. *De ruimte-tijd positieve kromming heeft*.
3. *Er een gebied is waarin licht zeer sterk afbuigt*.

Dan bestaat in deze ruimte-tijd minstens één onvolledige causale geodeet (*en wel een lichtstraal oftewel nul-geodeet*).

Daarmee is deze ruimte-tijd per definitie singulier, zodat dit de *singulariteitenstelling van Penrose* heet. Vanwege de nog te bespreken problemen zou het echter beter de *onvolledigheidsstelling van Penrose* kunnen heten, al was het maar vanwege diens bewondering voor Gödel [20]! Uiteraard gaf Penrose de aannamen in wiskundig precieze vorm; zie [8, 12, 18, 28, 29].

Alle singulariteitenstellingen in de ART berusten op aannamen van deze vorm, die als volgt kunnen worden geabstraheerd:

1. Een *causaliteitsaanname* (waarbij Penrose in feite het bestaan van een niet-compact Cauchy-oppervlak in de ruimte-tijd eist, en ‘uniek’ tussen scare quotes staat omdat de oplossing slechts uniek is op isometrie na).
2. Een *dynamische* aanname op de kromming van de ruimte-tijd, uitgedrukt via de covariante Ricci-tensor.
3. Een *statische* aanname oftewel randconditie op de kromming, die ergens voldoende positief moet zijn.

Positieve kromming betekent via de Einstein-vergelijkingen immers aantrekkende zwaartekracht, die vervolgens via aanname 2 alsmaar sterker wordt en ieder voldoende geconcentreerd blok materie uiteindelijke doet instorten. In de stelling van Penrose uit 1965 gebeurt dit vooruit in de tijd, terwijl het in die van Hawking uit 1966 over de noodzaak van een singulariteit in de oerknal [7], geënt op [18], terug in de tijd geschiedt.

Aangezien de astrofysica aantoont dat aannamen 2 en 3 in bepaalde gebieden van ons heelal gelden en aanname 1 onschuldig lijkt, overtuigde de stelling van Penrose vele theoretici van het bestaan van zwarte gaten. In het bijzonder werd het (voor)oordeel van Einstein en anderen dat zwarte gaten slechts wiskundig zouden bestaan als gevolg van onfysische idealisaties (zoals bolsymmetrie in de Schwarzschild-oplossing) sindsdien terzijde geschoven (we zullen zien of dit terecht was!).

De invloed van de stelling uit 1965 op het theoretisch onderzoek in de ART was zeer groot [30]; alle latere singulariteitenstellingen in de ART, zoals die van Hawking (zie boven) zijn er alvast op gemodelleerd. Plotseling moest iedereen de technieken van Penrose leren om de discussies überhaupt te kunnen volgen [8, 23, 32], en ook nu nog is vrijwel al het wiskundig georiënteerde onderzoek in de ART daarop gebaseerd.

Problemen met de stelling van Penrose

Ondanks het eclatante historische succes van zijn stelling moet Penrose zelf als eerste hebben geweten dat er problemen mee waren; afgezien van zijn werk aan twistortheorie is een groot deel van zijn werk aan de ART na 1965 zelfs te duiden als een serie pogingen deze op te lossen (voorals-nog met matig succes).

> *De stelling impliceert noch het bestaan van een zwart object, noch dat van een gat, laat staan dat van een zwart gat!*

Wat het eerste punt betreft kan het de lezer niet ontgaan zijn dat de stelling *niets* zegt over een horizon. Niets uit Penrose’s bloedeigen Definitie 1 boven komt in zijn stelling voor.

Wat het tweede betreft: het probleem met Definitie 2 is dat een onvolledige geodeet niet noodzakelijk wijst op een singulariteit van de kromming of materiedichtheid, zoals de (astro)fysica wil. De geodeet kan ook om andere redenen ophouden, bijvoorbeeld omdat de ruimte-tijd uitgebreid kan worden.

Penrose merkt ook al in [18] op dat dit geval bij de toepassing van zijn stelling moet worden uitgesloten, maar zegt niet hoe.

Hier komt nog bij dat de eerste aanname in de stelling voor geen enkel zwart gat geldt dat in het universum voorkomt (en voor zover bekend wordt beschreven door de uniform roterende Kerr-metriek). Als het Nobelprijs-comité dit had geweten...

Om uit zijn stelling het bestaan van zwarte gaten te concluderen zijn Penrose’s *cosmic censorship*-vermoedens nodig. Het eerste daarvan, dat bekend staat als *weak cosmic censorship* [17], postuleert simpelweg dat iedere singulariteit zich achter een horizon bevindt (iets wat hij natuurlijk heel graag al direct in 1965 had bewezen). Ironisch genoeg is dit vermoeden slechts bewezen onder de aanname van bolsymmetrie [2], precies de onfysische idealisatie die Einstein en anderen ertoe bracht om het bestaan van de Schwarzschild-oplossing als zijnde indicatief voor het bestaan van zwarte gaten niet serieus te nemen.

Om zowel het tweede probleem als dat met aanname 1 te omzeilen voerde Penrose het *strong cosmic censorship conjecture* in [21], dat ruwweg inhoudt dat iedere fysisch realistische ruimte-tijd aan aanname 1 voldoet (mogelijk met een compact Cauchy-oppervlak) en niet uitgebreid kan worden. Zie [3, 4, 5, 12]. Het door Penrose zelf voorgestelde fysische mechanisme achter dit eveneens nog onbewezen vermoeden is de ultraviolet-instabiliteit van de *Cauchy-horizon*, een door Hawking ingevoerd begrip dat detecteert vanaf welke grens het beginwaardeprobleem voor de Einstein-vergelijkingen in een gegeven ruimte-tijd zijn voorspellend vermogen verliest. Algemener moeten de fysische inzichten van Penrose geroemd worden; zo is hij een van de grondleggers van de thermodynamica van zwarte gaten (zie [12, §10.12]).

Maar dit verhaal toont vooral aan dat een stelling als die van Penrose groter is dan haar schepper, hetgeen een compliment voor de laatste is. Penrose is en blijft de vader van het wiskundig onderzoek in de ART (en Yvonne Choquet-Bruhat de moeder [1]).

Referenties

1 Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and the Einstein Equations,* Oxford University Press, 2009.

2 D. Christodoulou, The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field, *Annals of Mathematics* 149 (1999), 183–217.

3 M. Dafermos, The cosmic censorship conjectures in general relativity (ICTP School on Geometry and Gravity).
Lecture 1: https://youtu.be/Lg1Cetf7V9I
Lecture 2: https://youtu.be/SoRhBSt_mNo

4 M. Dafermos, The mathematical analysis of black holes in general relativity, *Proceedings of the ICM, 2014,* https://www.dpmms.cam.ac.uk/~md384/ICMarticleMihalis.pdf.

5 J. Earman, *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks: Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*, Oxford University Press, 1995.

6 S.W. Hawking, Black holes in general relativity, *Communications in Mathematical Physics* 25 (1972), 152–166.

7 S.W. Hawking, Singularities and the geometry of spacetime (Adams Prize Essay), reprinted in *European Journal of Physics H* 39 (2014), 413–503.

8 S.W. Hawking en G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.

9 S.A. Huggett e.a., *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, Oxford University Press, 1998.

10 M. Janssen en J. Renn, *How Einstein Found His Field Equations: Sources and Interpretation*, Springer, 2022.

11 P. Koellner, On the question of whether the mind can be mechanized, I: From Gödel to Penrose, II. Penrose's new argument, *The Journal of Philosophy* 115 (2018), 337–360, 453–484.

12 K. Landsman, *Foundations of General Relativity: From Einstein to Black Holes*, Radboud University Press, 2021, Open Access from https://radbouduniversitypress.nl/site/books/m/10.54195/EFVF4478/

13 A. Lightman, *AIP Oral History Interviews: Roger Penrose*, 1989, https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/34322.

14 C.W. Misner, The flatter regions of Newman, Unti, and Tamburino's generalized Schwarzschild space, *Journal of Mathematical Physics* 4 (1963), 924–937.

15 C.W. Misner, K.S. Thorne en J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.

16 R. Penrose, *The Art of the Impossible: MC Escher and Me – Secret Knowledge*.
https://youtu.be/f7kW8xd8p4s (part 1)
https://youtu.be/1CYrGpd8k5w (part 2)

17 R. Penrose, Gravitational collapse: The role of general relativity, *Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speziale I* 252 (1969), herdrukt in *General Relativity and Gravitation* 34 (2002), 1141–1165.

18 R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, *Physical Review Letters* 14 (1965), 57–59.

19 R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, 2004.

20 R. Penrose, *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*, Oxford University Press, 1994.

21 R. Penrose, Singularities and time-asymmetry, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, S.W. Hawking en W. Israel, eds., Cambridge University Press, 1979, pp. 581–638.

22 R. Penrose, Structure of space-time, *Batelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, C. DeWitt en J.A. Wheeler, eds., W.A. Benjamin, 1968, 121–235.

23 R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, SIAM, 1972.

24 L.S. Penrose en R. Penrose, Impossible objects: A special type of visual illusion, *British Journal of Psychology* 49 (1958), 31–33.

25 R. Penrose en W. Rindler, *Spinors and Space-Time. Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press, 1984.

26 R. Penrose en W. Rindler, *Spinors and Space-Time. Vol. 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, Cambridge University Press, 1986.

27 R.H. Sanders, *Revealing the Heart of the Galaxy: The Milky Way and its Black Hole*, Cambridge University Press, 2014.

28 J.M.M. Senovilla, Singularity theorems and their consequences, *General Relativity and Gravitation* 30 (1998), 701–848, corrected version: arXiv:1801.04912.

29 J.M.M. Senovilla en D. Garfinkle, The 1965 Penrose singularity theorem (2015), arXiv: 1410.5226.

30 K.S. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, W.W. Norton & Company, 1994.

31 University of Oxford, *Extra Time: Roger Penrose in Conversation with Andrew Hodges*, 2014.
https://youtu.be/zN5eLsI_Tuo (part 1)
https://youtu.be/FFWbpHmll1g (part 2)

32 H. Weyl, *Raum – Zeit – Materie: Vorlesungen über Allgemeine Relativitätstheorie*, Springer, 1918.

33 https://www.escherinhetpaleis.nl/escher-vandaag/cirkellimiet-iv-hemel-hel

34 https://www.escherinhetpaleis.nl/escher-vandaag/waterval

35 https://eventhorizontelescope.org

36 https://nl.wikipedia.org/wiki/Penrose-driehoek

37 https://nl.wikipedia.org/wiki/Sagittarius_A*