Propositielogica

Onderdeel van het college Logica (2017)

Klaas Landsman

"They who are acquainted with the present state of the theory of Symbolic Algebra, are aware of the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination."
(George Boole, *Mathematical Analysis of Logic*, Preface)

De eerste stap in de axiomatische opbouw van welk gebied van de wiskunde ook is de ontwikkeling van een geschikte *logische taal*. Dat is op vele manieren geprobeerd, en we volgen in dit college de *mainstream*: eerste-orde logica (oorspronkelijk ontwikkeld door Frege en anderen, en later door Hilbert en zijn leerlingen gekozen als de basis van de wiskunde). Die zou in principe direct in volle glorie ingevoerd kunnen worden (zoals in de syllabus van Moerdijk en van Oosten), maar uit didactische overwegingen bespreken we in dit hoofdstuk eerst een op zichzelf staand fragment daarvan, de *propositielogica*. Net als bij alle andere vormen van logica is het bij de propositielogica de bedoeling om aan te geven wat:

- de notatie is (i.e. welke symbolen in de taal voorkomen);
- de regels zijn om welgedefiniëerde *formules* (wff's) en vervolgens *uitspraken* samen te stellen; in de propositielogica vallen deze samen (in eerste-orde logica zijn uitspraken speciale formules).
- de axioma's zijn (die als uitgangsspunten van bewijzen dienen);
- de deductieregels zijn (die formuleren hoe een correct bewijs verloopt);
- de regels zijn die bepalen of een bepaalde uitspraak (on)waar is.

De eerste vier punten heten de *syntax* en het laatste heet de *semantiek* van de axiomatisering. We maken hier dus al een principieel verschil tussen *bewijsbaarheid* en *waarheid*. Het eerste is een puur syntactisch begrip, te vergelijken met het correct volgen van de regels van het schaakspel om zo een partij te spelen. Het tweede heeft te maken met de interpretatie van het formalisme in de werkelijkheid. In de wiskunde van Euclides tot ongeveer 1900 werd dit verschil (behalve wellicht door enige logici) niet gemaakt en werd ook gedacht dat de begrippen waarheid en bewijsbaarheid hetzelfde waren.

We zullen zien dat de waarheid van een uitspraak geen absoluut begrip is, maar is gedefinieerd ten opzichte van een bepaalde interpretatie van de uitspraak. In de propositielogica is een dergelijke interpretatie zeer eenvoudig, zie onder; in de eerste-orde logica wordt het al ingewikkelder (Modeltheorie). Een uitspraak in de propositielogica die onder alle interpretaties waar is heet een *tautologie*. Een uitspraak heet een *stelling* of heet *bewijsbaar* als deze in een eindig aantal stappen uit axioma's kan worden afgeleid met behulp van bepaalde deductieregels. Een tautologie is dus totaal anders gedefinieerd dan een stelling, en toch zullen we zien dat een uitspraak een tautologie is desda zij bewijsbaar is.

1.1 Notatie

De *notatie* van de propositielogica bestaat uit twee groepen symbolen:

1. De *zuiver logische symbolen* zijn $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ (en eventueel $\perp$ en/of $\top$). Dit zijn de bekende afkortingen voor resp. *niet, en, of, impliceert* (en evt. de altijd onware en de altijd ware propositie). Maar let op! De hier gegeven betekenis van de zuiver logische symbolen is in principe niet nodig, omdat deze *betekenis* volgt uit de later op te stellen axioma's voor het *gebruik* van de symbolen.
2. Voor het gemak gebruiken we ook haakjes (,), maar we laten de regels daarvoor weg, want eigenlijk zijn ze overbodig als we afspreken dat $\neg$ sterker bindt dan $\vee$ and $\wedge$, die op hun beurt weer sterker binden dan $\to$: bijvoorbeeld $\neg\alpha \vee \delta \to \beta \wedge \gamma$ staat voor $((\neg\alpha) \vee \delta) \to (\beta \wedge \gamma)$.
3. De *niet-logische symbolen* van een theorie in de propositielogica zijn vastgelegd in de *signatuur* $S = \{p_1, p_2, \ldots\}$, ook wel geschreven als $\{p, q, r, \ldots\}$; dit kan een eindige of een aftelbare verzameling zijn. Deze symbolen staan voor zogenaamde *atomaire of* elementaire *proposities*, die het eenvoudigste voorbeeld zijn van uitspraken (zie volgende punt). Syntactisch zijn dit slechts symbolen, maar semantisch kun je ze binnen of buiten de wiskunde interpreteren zoals je wilt, zoals bijvoorbeeld: p_1 betekent "$7 + 5 = 12$" en p_2 staat voor "het regent" (en het is november).

De *uitspraken* of wff's (i.e. welgedefiniëerde formules) van de propositielogica, genaamd $\alpha, \beta, \ldots$, of φ, ψ etc., zijn alle uitdrukkingen in de bovenstaande symbolen die als volgt tot stand komen:

i) Ieder niet-logisch symbool $p \in S$ is een uitspraak (eventueel zijn $\perp$ en/of $\top$ ook uitspraken).

ii) Als α en β uitspraken zijn, dan zijn $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha$, en $\alpha \to \beta$ dat ook.

iii) Iedere uitdrukking die door eindig vaak de voorgaande stappen toe te passen is een uitspraak.

iv) Er zijn geen andere uitspraken dan de in **iii)** verkregen uitdrukkingen.

Dit is een *iteratief* voorschrift: als je regel **ii)** toepast op regel **i)** kom je bijvoorbeeld op $\alpha = p_1 \vee p_2$ en $\beta = \neg p_3$, en daaruit mag je vervolgens m.b.v. regel **iii)** $\alpha \to \beta$, oftewel $p_1 \vee p_2 \to \neg p_3$ maken, enzovoort. Let op: we gebruiken het (niet-logische) symbool = hier informeel om een uitspraak een naam te geven. De notatie $\alpha = p_1 \vee p_2$ betekent dus: de uitdrukking $p_1 \vee p_2$ heet α, of wordt afgekort als α. Als logisch symbool treedt = pas op in de eerste-orde logica (zie volgende hoofdstuk).

We noteren de verzameling uitspraken (i.e. wff's) over een signatuur S als $BT(S)$; hier staat BT voor 'Boolean Terms'. Deze terminologie (ter ere van George Boole) zal later nader worden uitgelegd.

1.2 Semantiek en waarheid

We onderbreken nu de opbouw van de syntax en gaan verder met de *semantiek* van de propositielogica.

Definitie 1.1 *Een* valuatie *op $BT(S)$ is een afbeelding $V : BT(S) \to \{0, 1\}$ die voldoet aan:*

$$V(\neg\alpha) = V(\alpha)'; \tag{1.1}$$
$$V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \wedge' V(\beta); \tag{1.2}$$
$$V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \vee' V(\beta); \tag{1.3}$$
$$V(\alpha \to \beta) = V(\alpha) \to' V(\beta), \tag{1.4}$$

en evt. $V(\perp) = 0$ en $V(\top) = 1$, waarbij de operaties $'$, $\wedge'$, $\vee'$ and $\to'$ op de verzameling $\{0, 1\}$ in de tabel onder zijn gedefinieerd. Een dergelijke afbeelding heet ook een homomorfisme *tussen $BT(S)$ en $\{0, 1\}$.*

a	a'
0	1
1	0

a	b	$a \wedge' b$	$a \vee' b$	$a \to' b$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Je herkent hier de waarheidstabellen uit *Inleiding in de Wiskunde*. Het punt is nu dat de (on)waarheid van een uitspraak $\varphi \in BT(S)$ volledig wordt bepaald door de (on)waarheid van de atomaire proposities die in φ voorkomen en de bovenstaande waarheidstabel. Formeel wordt dit idee als volgt uitgedrukt:

Stelling 1.1 *Iedere functie $v : S \to \{0,1\}$ kan uniek worden uitgebreid tot een valuatie (of homomorfisme) $V : BT(S) \to \{0,1\}$ (dat dus per definitie voldoet aan $V(p) = v(p)$ voor alle $p \in S \subset BT(S)$).*

Het bewijs van deze stelling volgt eenvoudig door inductie op het aantal symbolen in een uitspraak $\varphi \in BT(S)$: als dit aantal één is, zodat $\varphi = p$, dan is $V(p) = v(p)$. Als dit aantal $n > 1$ is, is φ volgens de formatieregels voor uitspraken van de vorm $\neg\alpha$, in welk geval $V(\varphi) = V(\alpha)'$, of van de vorm $\alpha \wedge \beta$ (etc.), in welk geval $V(\varphi) = V(\alpha) \wedge' V(\beta)$ (etc.). In beide gevallen is α of β korter dan φ en is $V(\alpha)$, en in het tweede geval $V(\beta)$, volgens de inductiehypothese uniek bepaald door v. Deze constructie van V uit v garandeert dat V een homomorfisme is en omgekeerd maakt deze eis V uniek (gegeven v). Q.E.D.

We zeggen dat φ *waar* is, *gegeven* v, als $V(\varphi) = 1$, en *onwaar* als $V(\varphi) = 0$.

Een voorbeeld drukt meer uit dan het bovenstaande bewijs. Stel $\varphi = \neg p \vee q$. Dan:

$$V(\varphi) = V(\neg p \vee q) = V(\neg p) \vee' V(q) = V(p)' \vee' V(q) = v(p)' \vee' v(q).$$

We kunnen de (on)waarheid van φ als functie van $v(p)$ and $v(q)$ dus bepalen door in de bovenstaande waarheidstabel te kijken onder $\vee'$ en voor a en b resp. $v(p)'$ en $v(q)$ in te vullen. Dit geeft:

$v(p)$	$v(q)$	$V(\varphi)$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Nu geven we een voorbeeld waarin slechts de implicatie $\to$ voorkomt. We willen weten of de uitspraak

$$\varphi = (p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)) \tag{1.5}$$

waar is, gegeven $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, en $v(p_3) = 1$ (ga eerst na dat de uitspraak (1.5) volgens de twee regels **i)** en **ii)** boven kan worden gemaakt!). Uiteraard geldt volgens Definitie 1.1:

$$V(\varphi) = (v(p_1) \to' (v(p_2) \to' v(p_3))) \to' ((v(p_1) \to' v(p_2)) \to' (v(p_1) \to' v(p_3))). \tag{1.6}$$

We berekenen nu $V(\varphi)$. Met bijv. "tweede rij" in de grote waarheidstabel boven bedoelen we nu de tweede rij met nullen en enen (dus de derde rij van de tabel als geheel). De "rechtertabel" is die voor $\to'$.

Stap 1: Rechtertabel met $a = v(p_2) = 0$ en $b = v(p_3) = 1$: uit de tweede rij volgt $v(p_2) \to' v(p_3) = 1$.
Stap 2: Rechtertabel met $a = v(p_1) = 1$ en $b = v(p_2) \to' v(p_3) = 1$; vierde rij geeft dan

$$v(p_1) \to' (v(p_2) \to' v(p_3)) = 1. \tag{1.7}$$

Stap 3: Analoog vinden we $v(p_1) \to' v(p_2) = 0$ (derde rij) en $v(p_1) \to' v(p_3) = 1$, en daaruit

$$(v(p_1) \to' v(p_2)) \to' (v(p_1) \to' v(p_3)) = 1. \tag{1.8}$$

Stap 4: Ten slotte geeft de vierde rij met $a = v(p_1) \to' (v(p_2) \to' v(p_3)) = 1$ en $b = (v(p_1) \to' v(p_2)) \to' (v(p_1) \to' v(p_3)) = 1$ het antwoord: $V(\varphi) = 1$, oftwel de uitspraak φ is, gegeven v, waar!

Hier is iets bijzonders aan de hand, dat niet voor iedere uitspraak geldt: de φ in (1.5) is *altijd* (i.e., voor alle keuzes van $v(p_1)$, $v(p_2)$, en $v(p_3)$) waar! Dit kun je eenvoudig op dezelfde manier nagaan. Sterker nog, als $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ willekeurige uitspraken zijn (dus niet noodzakelijk atomaire proposities), dan is ook

$$\varphi = (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_3)) \to ((\alpha_1 \to \alpha_2) \to (\alpha_1 \to \alpha_3)) \tag{1.9}$$

altijd waar. Ook dit volgt weer op dezelfde manier, waarbij je in de bovenstaande afleiding $v(p_i)$ steeds vervangt door $V(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Definitie 1.2 *Een uitspraak φ die voor alle mogelijke waarheidstoekenningen v aan de atomaire proposities $p_1, p_2, \ldots$ die er in voorkomen waar is, heet een* tautologie*, notatie:* $\vDash \varphi$.

Zo is $\alpha \to \alpha$ een tautologie, hoe α ook is opgebouwd uit de $p_1, p_2, \ldots$. Dit volgt direct uit de waarheidstabel voor $\to'$ door te kiezen $a = b = V(\alpha)$. Zowel bij $a = b = 0$ als bij $a = b = 1$ staat $a \to' b = 1$, zodat voor iedere α geldt dat

$$V(\alpha \to \alpha) = 1. \tag{1.10}$$

Als we een nieuw logisch symbool $\leftrightarrow$ invoeren door $\alpha \leftrightarrow \beta$ te definiëren als afkorting voor

$$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha), \tag{1.11}$$

dan volgt met hetzelfde argument als boven:

Stelling 1.2 *De uitspraak $\alpha \leftrightarrow \beta$ is een tautologie desda voor iedere gegeven waarde van de atomaire proposities in α en β zijn α en β ofwel tegelijk waar, ofwel tegelijk onwaar zijn.*

Hier is alvast een flink aantal tautologieën, waarvan die met $\leftrightarrow$ uiteraard ook waar zijn met $\to$ in plaats van $\leftrightarrow$, en bovendien met $\leftarrow$ in plaats van $\leftrightarrow$, in de zin dat $\alpha \leftarrow \beta$ betekent $\beta \to \alpha$.

$$\vDash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \to \neg\beta); \tag{1.12}$$
$$\vDash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta); \tag{1.13}$$
$$\vDash \alpha \vee \beta \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta); \tag{1.14}$$
$$\vDash \alpha \vee \beta \leftrightarrow \neg\alpha \to \beta; \tag{1.15}$$
$$\vDash \alpha \to \beta \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta; \tag{1.16}$$
$$\vDash \alpha \to \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta); \tag{1.17}$$
$$\vDash \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha; \tag{1.18}$$
$$\vDash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha); \tag{1.19}$$
$$\vDash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta); \tag{1.20}$$
$$\vDash \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)); \tag{1.21}$$
$$\vDash (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta); \tag{1.22}$$

Als $\top$ en $\bot$ als atomaire proposities meedoen in de syntax, dan komen hier nog bij:

$$\vDash \alpha \vee \neg\alpha \leftrightarrow \top; \tag{1.23}$$
$$\vDash \alpha \wedge \neg\alpha \leftrightarrow \bot. \tag{1.24}$$

De volgende uitbreiding van de notatie $\vDash$ is heel belangrijk. Voor $\alpha, \beta \in BT(S)$ schrijven we $\alpha \vDash \beta$ (voor *semantische implicatie*) als geldt: voor iedere valuatie $V : BT(S) \to \{0,1\}$ waarvoor $V(\alpha) = 1$, geldt ook $V(\beta) = 1$. Dit verzwakt dus de notatie $\vDash \beta$, die immers inhield dat $V(\beta) = 1$ voor iedere valuatie V überhaupt. Als zowel $\alpha \vDash \beta$ als $\beta \vDash \alpha$, dan schrijven we $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \beta$ en noemen we α en β *semantisch equivalent*. Dit is dus het geval als $V(\alpha) = 1$ desda $V(\beta) = 1$. Dit impliceert echter $V(\alpha) = 0$ desda $V(\beta) = 0$ (triviaal bewijs uit het ongerijmde), zodat $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \beta$ desda $V(\alpha) = V(\beta)$ voor alle valuaties V. Dit is direct na te rekenen, bijvoorbeeld voor (1.12) geldt $V(\alpha \wedge \beta) = V(\neg(\alpha \to \neg\beta))$ desda $a \wedge' b = (a \to b')'$ voor alle $a, b \in \{0,1\}$, hetgeen makkelijk te controleren is. Tevens volgt uit Stelling 1.2 dat $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \beta$ desda $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta$. De bovenstaande lijst tautologieën kan dus worden herschreven als $\alpha \wedge \beta \mathrel{|{=}|} \neg(\alpha \to \neg\beta)$ etc.

Algemener: stel dat $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ een lijst uitsprakaken is (over de gegeven signatuur S, dus $\alpha_i \in BT(S)$). De notatie $\Sigma \vDash \varphi$ betekent dan: voor iedere valuatie $V : BT(S) \to \{0,1\}$ waarvoor $V(\alpha_i) = 1$ voor alle $i = 1, \ldots, n$ (i.e. voor alle $\alpha_i \in \Sigma$) geldt $V(\varphi) = 1$. Een dergelijke valuatie is een soort 'model' van de 'theorie' Σ, en $\Sigma \vDash \varphi$ betekent dan dat φ waar is in alle modellen van Σ.

Tot slot (van dit stukje over semantiek) geven we een andere manier om naar valuaties V te kijken, die door zowel informatici als elektrotechnici wordt gehanteerd. Stel dat een uitspraak φ atomaire proposities p_1 t/m p_n bevat. We noteren de verzameling van alle functies $v_n : \{1, \ldots, n\} \to \{0,1\}$ als $\underline{2}^{\underline{n}}$. Iedere valuatie $v : S \to \{0,1\}$ kan worden beperkt tot $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset S$ en geeft dan zo'n functie v_n door middel van $v_n(k) = v(p_k)$ voor $k = 1, \ldots, n$. Dan bepaalt φ een functie $V_\varphi : \underline{2}^{\underline{n}} \to \{0,1\}$ door middel van $V_\varphi(v_n) = V_n(\varphi)$, waarbij V_n de unieke uitbreiding is van v (beperkt tot $\{p_1, \ldots, p_n\}$) tot $BT(\{p_1, \ldots, p_n\})$. De waarde $V_\varphi(v_n)$ is dan de binaire output van een schakeling met lampjes of bits 1 t/m n. Per definitie geldt $V_\alpha = V_\beta$ desda $\alpha |{=}| \beta$.

1.3 Syntax en bewijsbaarheid

We gaan nu terug naar de syntax van de propositielogica: wat zijn de axioma's en deductieregels? Bij deze vraag moeten we even stilstaan bij de bedoeling van de theorie. Zoals gebruikelijk noemen we een bewezen uitspraak φ een *stelling*, notatie: $\vdash \varphi$. Een bewijs van een stelling bestaat uit eindig aantal stappen, waarin telkens de deductieregels op de vorige stap(pen) worden toegepast. De eerste stap bestaat officieel uit het opschrijven van de axioma's die in het bewijs worden gebruikt. Welke uitspraken stellingen zijn is dus een puur syntactische kwestie, die niet afhangt van hun interpretatie. Juist daaraan ontleent de wiskunde volgens Hilbert haar zekerheid: de interpretatie en eventuele waarheid van uitspraken (regent het?) hangt af van de waan van de dag, maar de bewijsbaarheid niet. Daarom mag de eventuele bewijsbaarheid van een uitspraak niet afhangen van de (on)waarheid van de atomaire proposities die erin voorkomen. Tegelijk wil niemand dat stellingen die onder een bepaalde waarheidstoekenning aan de p_i onwaar zijn, bewezen kunnen worden: het kunnen bewijzen van onware stellingen zou rampzalig zijn voor de reputatie van de wiskunde! Een stelling moet dus altijd waar zijn, oftewel:

Een bewijsbare uitspraak in de propositielogica moet een tautologie zijn.

De kunst is nu om de axioma's en deductieregels zo te kiezen dat zo veel mogelijk tautologieën bewezen kunnen worden. Dit doel kan in de klassieke propositielogica op optimale wijze worden bereikt: bij de juiste keuze kunnen zelfs *alle* tautologieën worden bewezen (zie Stelling 1.3 verderop). Je kunt enigszins heen en weer schuiven tussen axioma's en deductieregels, maar wij kiezen kort en krachtig:

- De enige deductieregel is de *modus ponens*: voor alle uitspraken α en β geldt dat als α en $\alpha \to \beta$ bewezen zijn, dan β bewezen is. Kort: uit $\alpha \to \beta$ en α volgt β. Nog korter: $\alpha \to \beta, \alpha \vdash \beta$.
- De *axioma's* kunnen op vele manieren worden gegeven. Allereerst herinneren we ons dat (1.12) en (1.15) tautologieën zijn, zodat het gebruik van de symbolen $\vee$ en $\wedge$ in principe overbodig is: als je wilt kun je $\alpha \wedge \beta$ als afkorting beschouwen van $\neg(\alpha \to \neg\beta)$, en $\alpha \vee \beta$ als afkorting van $(\neg\alpha) \to \beta$. Alternatief kun je wel werken met alle vier de symbolen $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \to$ en de tautologieën (1.12) en (1.15) toevoegen als axioma's of als deductieregels. Een mogelijke keuze van de resterende axioma's voor $\neg$ en $\to$, afkomstig van de logicus Alonzo Church (1903–1995), is dan:

  Axioma 1. $\beta \to (\alpha \to \beta)$;

  Axioma 2. $(\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta))$;

  Axioma 3. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$.

Deze axioma's gelden voor alle uitspraken α, β, γ, δ die volgens de regels **i)** en **ii)** zijn gemaakt. De eerste twee zullen we zo leren kennen. Het derde axioma reguleert het gebruik van de negatie $\neg$ en rechtvaardigt, samen met de *modus ponens*, in het bijzonder het *bewijs uit het ongerijmde*. In zo'n bewijs wil je α bewijzen door een tegenspraak af te leiden uit de aanname niet-α. Stel dat je daaruit zowel β als $\neg\beta$ kunt afleiden, zodat je uitspraken $\neg\alpha \to \beta$ en $\neg\alpha \to \neg\beta$ hebt bewezen. Uit de laatste en Axioma 3 volgt, met de *modus ponens*, $(\neg\alpha \to \beta) \to \alpha$. Uit de eerste en *modus ponens* volgt dan α.

We kunnen nu preciezer zijn over de begrippen stelling en bewijs. Laat $A \subset BT(S)$ de verzameling axioma's zijn; dit zijn er dus niet drie, maar oneindig veel, omdat zoals gezegd voor α, β, γ, δ willekeurige elementen van $BT(S)$. Tevens werken met net als eerder bij de semantiek met een willekeurige eindige deelverzameling $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset BT(S)$ (die leeg mag zijn, in welk geval $\emptyset \vdash \varphi$ staat voor $\vdash \varphi$).

Definitie 1.3 *De notatie $\Sigma \vdash \varphi$ betekent dat er een* bewijs *van φ bestaat uit Σ en A, i.e., een eindige genummerde lijst $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ van uitspraken ($\alpha_i \in BT(S)$), waarbij $\alpha_N = \varphi$, en iedere α_i ofwel een axioma is ($\alpha_i \in A$), ofwel een element van Σ ($\alpha_i \in \Sigma$), ofwel door* modus ponens *kan worden verkregen uit twee eerdere uitspraken op de lijst, i.e. α_j ($j < i$) en $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$ ($k < i$).*

De laatste mogelijkheid houdt automatisch in dat $\Sigma \vdash \alpha_j$ en $\Sigma \vdash \alpha_j \to \alpha_i$ (omdat α_j en $\alpha_j \to \alpha_i$ anders niet op de lijst zouden kunnen staan). Equivalent kunnen we de notatie $\Sigma \vdash \varphi$ dus recursief definiëren als zijnde geldig desda ofwel $\varphi \in A$, ofwel $\varphi \in \Sigma$, ofwel er een uitspraak ψ is met $\Sigma \vdash \psi$ en $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$.

Hoe ziet zo'n bewijs er uit? Als illustratie bewijzen we de voor de hand liggende stelling $\vdash \alpha \to \alpha$ voor willekeurige uitspraken $\alpha \in BT(S)$; we hebben al gezien dat $\alpha \to \alpha$ een tautologie is. Zelfs dit bewijs vereist al enig nadenken en puzzelen! Je hebt alleen axioma's 1 en 2 nodig. De notatie $\psi \rightsquigarrow \varphi$ met betrekking tot een uitspraak waarin ψ voorkomt betekent dat we voor ψ de uitspraak φ substitueren.

1. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$.
2. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$.
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$.
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$.
5. $\alpha \to \alpha$.

Uitleg:

1. Axioma 1 met $\beta \rightsquigarrow \alpha$ en $\alpha \rightsquigarrow (\alpha \to \alpha)$.
2. Axioma 2 met $\beta \rightsquigarrow \alpha$, $\gamma \rightsquigarrow (\alpha \to \alpha)$, $\delta \rightsquigarrow \alpha$.
3. Modus ponens uit 1 en 2.
4. Axioma 1 met $\beta \rightsquigarrow \alpha$ en $\alpha \rightsquigarrow \alpha$.
5. Modus ponens uit 3 en 4.

De hoofdstelling uit de propositielogica luidt:

Stelling 1.3 *Voor iedere signatuur S en theorie $\Sigma \subset BT(S)$ geldt $\Sigma \vdash \varphi$ desda $\Sigma \vDash \varphi$. In het bijzonder (neem $\Sigma = \emptyset$) is een uitspraak een tautologie desda zij bewijsbaar is, i.e., $\vdash \varphi$ desda $\vDash \varphi$.*

Let op! Er is een groot verschil tussen een stelling als deze (en Stelling 1.4 onder), die over propositielogica gaat, en een stelling als $\vdash \alpha \to \alpha$, die binnen de propositielogica geldt.

Stelling 1.3 bestaat in feite uit twee implicaties, die ieder een eigen naam en status hebben:

Lemma 1.1 *1.* Gezondheid (soundness): $\Sigma \vdash \varphi$ *impliceert* $\Sigma \vDash \varphi$.
2. Volledigheid (completeness): $\Sigma \vDash \varphi$ *impliceert* $\Sigma \vdash \varphi$.

Het bewijs van de eerste claim volgt door inductie op de lengte van een bewijs van φ. We moeten bewijzen dat voor alle valuaties V waarvoor geldt $V(\alpha) = 1$ voor alle $\alpha \in \Sigma$, ook $V(\varphi) = 1$. Op de eerste regel van het bewijs van φ staat of een axioma of een element van Σ. De axioma's α zijn tautologieën (zie Opgave 2), zodat ook dan $V(\alpha) = 1$. Iedere latere uitspraak α_i in het bewijs is ofwel een element van $A \cup \Sigma$, of deze wordt voorafgegaan door $\Sigma \vdash \alpha_j$ en $\Sigma \vdash \alpha_j \to \alpha_i$ (zie Definitie 1.3). Daarvoor geldt de inductiehypothese, zodat $\Sigma \vDash \alpha_j$ en $\Sigma \vDash \alpha_j \to \alpha_i$. Voor bovenstaande valuaties V geldt dus $V(\alpha_j) = 1$ en $V(\alpha_j \to \alpha_i) = V(\alpha_j) \to' V(\alpha_i) = 1$. Uit de waarheidstabel voor $\to'$ (met $a = V(\alpha_j)$ en $b = V(\alpha_i)$) blijkt dat de combinatie $a = 1$ en $a \to' b = 1$ impliceert dat $b = 1$, i.e. $V(\alpha_i) = 1$, en dus $\Sigma \vDash \alpha_i$. Dit geldt in het bijzonder voor de laatste regel van het bewijs, dat is $\alpha_N = \varphi$, zodat $\Sigma \vDash \varphi$. Q.E.D.

Het bewijs de andere kant op komt volgende week! Zeer belangrijk is ook de *Deductiestelling*:

Stelling 1.4 *Er geldt $\Sigma \vdash \alpha \to \beta$ desda $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. In het bijzonder geldt $\vdash \alpha \to \beta$ desda $\alpha \vdash \beta$.*

Het bewijs van links naar rechts is eenvoudig: als we een bewijs van $\alpha \to \beta$ uit Σ hebben, en nu ook α als aanname toevoegen, volgt β uit modus ponens; zie Definitie 1.3. De andere kant op is een opgave.

1.4 Opgaven voor Week 4 (inleveren: 3, 4, 5)

1. Laat zien dat $V_\alpha = V_\beta$ desda $\alpha | = | \beta$ (even nadenken over de definities, zonder pen en papier).
2. Laat zien dat de drie axioma's van Church tautologieën zijn (rekenpartij, met pen en papier).
3. Voltooi het bewijs van de Deductiestelling.
4. Laat (met behulp van de Deductiestelling) zien dat:
   (a) uit $\vdash \beta \to (\gamma \to \delta)$ en $\vdash \gamma$ volgt $\vdash \beta \to \delta$.
   (b) uit $\vdash \beta \to \gamma$ en $\vdash \gamma \to \delta$ volgt $\vdash \beta \to \delta$.
5. Geef een formeel bewijs (met uitleg) van de volgende stelling (gebruik de vorige opgave!):

$$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha. \tag{1.25}$$

   N.B. Dit kan in plaats van Axioma 3 worden gebruikt.

1.5 Bewijs van de volledigheidsstelling

We bewijzen nu het moeilijke deel van de hoofdstelling, namelijk *Volledigheid:* $\Sigma \models \varphi$ impliceert $\Sigma \vdash \varphi$. We doen dit in een syntax die als zuiver logische symbolen slechts $\rightarrow$ en $\bot$ bevat. De andere drie (die beneden voor het gemak wel worden gebruikt) zijn dan afkortingen voor:

$$\neg\alpha = (\alpha \rightarrow \bot); \tag{1.26}$$
$$\alpha \vee \beta = \neg\alpha \rightarrow \beta; \tag{1.27}$$
$$\alpha \wedge \beta = \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta), \tag{1.28}$$

waarbij zelfs hier al in de tweede regel $\neg$ door de eerste regel wordt gedefinieerd, in analoog $\vee$ in de derde regel. Eigenlijk zou er dus moeten staan: $\alpha \vee \beta = (\alpha \rightarrow \bot) \rightarrow \beta$, etc. Dit geldt ook voor de drie axioma's van de propositielogica, waarvan de eerste twee letterlijk gelden en in de derde opnieuw $\neg\alpha$ staat voor $\alpha \rightarrow \bot$, etc. De motivatie hiervoor is dat de uitspraken $\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \bot)$, $\alpha \vee \beta \leftrightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$, en $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ tautologieën zijn; de laatste twee zijn resp. (1.14) en (1.15), en de eerste is makkelijk na te gaan uit de waarheidstabellen voor $\neg$ en $\rightarrow$ en uit de regel $V(\bot) = 0$ (zie opgave).

We leiden de volledigheidsstelling af uit het volgende speciale geval:

Lemma 1.2 $\Sigma \models \bot$ *impliceert* $\Sigma \vdash \bot$. *Met andere woorden, als* Σ *consistent is, dan heeft* Σ *een model.*

Laten we eerst deze terminologie uitleggen. Een verzamelingen uitspraken $\Sigma \subset BT(S)$ heet een *theorie*. Een theorie heet *consistent* als $\Sigma \vdash \bot$ *niet* waar is, dus als de altijd onware uitspraak $\bot$ *niet* uit Σ kan worden afgeleid. Dit wordt ook genoteerd als $\Sigma \nvdash \bot$; het is de situatie die je wilt. Dan is een *model* van Σ een valuatie V met $V(\Sigma) = 1$ (zie boven). De bewering $\Sigma \models \bot$ betekent dat iedere valuatie V met $V(\Sigma) = 1$ voldoet aan $V(\bot) = 1$. Maar geen enkele V voldoet aan $V(\bot) = 1$, omdat per definitie $V(\bot) = 0$. De bewering $\Sigma \models \bot$ betekent dus dat er geen enkele valuatie V bestaat met $V(\Sigma) = 1$. De negatie daarvan stelt dat er een valuatie bestaat met $V(\Sigma) = 1$. De contrapositief (i.e. de contrapositief van $A \Rightarrow B$ is de equivalente uitspraak niet-$B \Rightarrow$ niet-A) van $\Sigma \models \bot \Rightarrow \Sigma \vdash \bot$ is dus: als $\Sigma \nvdash \bot$, dan is er een valuatie met $V(\Sigma) = 1$. Dit is precies: als Σ consistent is, dan heeft Σ een model.

We hebben al bewezen dat de propositielogica gezond is, zodat Lemma (1.2) dan geeft:

Stelling 1.5 *Een theorie is consistent desda zij een model heeft.*

Voor we Lemma 1.2 (en daarmee Stelling 1.5) bewijzen, laten we eerst zien hoe *Volledigheid* eruit volgt. Deze afleiding berust o.a. op de volgende (elementaire) *Semantische Deductiestelling*:

Stelling 1.6 $\Sigma \models \alpha \rightarrow \beta$ *desda* $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Dit volgt uit de waarheidstabel voor $\rightarrow'$. Uit de onderste rij in de tabel volgt dat $a \rightarrow' b = 1$ desda $a = 1 \Rightarrow b = 1$ (let op: deze implicatie is altijd waar als $a = 0$ omdat dan het antecedent leeg is, dus zelfs als $a = 0$ en $b = 0$, en natuurlijk helemaal als $a = 0$ en $b = 1$; de implicatie is alleen *niet* waar als $a = 1$ en $b = 0$). In het bijzonder geldt voor alle valuaties V dat $V(\alpha) \rightarrow' V(\beta) = 1$ desda $V(\alpha) = 1 \Rightarrow V(\beta) = 1$. Per definitie van een valuatie geldt tevens $V(\alpha) \rightarrow' V(\beta) = V(\alpha \rightarrow \beta)$, zodat $V(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ desda $V(\alpha) = 1 \Rightarrow V(\beta) = 1$. Dit geldt dus ook voor alle V' waarvoor $V(\Sigma) = 1$ (waarmee we steeds zullen bedoelen dat $V(\sigma) = 1$ voor alle $\sigma \in \Sigma$). Maar dit is precies de uitspraak van de stlling. Q.E.D.

Nu bewijzen we Volledigheid. Stel $\Sigma \models \varphi$; omdat φ en $\neg\neg\varphi$ semantisch equivalent zijn, i.e. $\varphi \models\!\mid \neg\neg\varphi$, geldt $\Sigma \models \varphi$ desda $\Sigma \models \neg\neg\varphi$, dat is hetzelfde als $\Sigma \models \neg\varphi \rightarrow \bot$. Stelling 1.6 zegt dat is zo is desda $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$, hetgeen volgens Lemma 1.2 impliceert $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. De oorspronkelijke (syntactische) Deductiestelling zegt dat dit waar is desda $\Sigma \vdash \neg\varphi \rightarrow \bot$, oftewel $\Sigma \vdash \neg\neg\varphi$. Met $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ volgt uit modus ponens

$$\Sigma \vdash \varphi.$$

Voor het bewijs van Lemma 1.2 is een nog klein maar cruciaal lemma nodig:

Lemma 1.3 *Stel $\Sigma \subset BT(S)$ is een consistente theorie en $\alpha, \beta \in BT(S)$ zijn uitspraken.*

1. *Als $\Sigma \vdash \alpha$, dan is ook $\Sigma \cup \{\alpha\}$ consistent.*
2. *Als $\Sigma \cup \{\beta\}$ inconsistent is, dan is $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ consistent en bovendien geldt $\Sigma \vdash \neg\beta$.*

1. Bewijs uit het ongerijmde (een theorie is immers ofwel consistent ofwel inconsistent): stel $\Sigma \vdash \alpha$ maar $\Sigma \cup \{\alpha\}$ is inconsistent. Dan is er een bewijs van $\perp$ uit $\Sigma \cup \{\alpha\}$. In dat geval is er echter ook al een bewijs van $\perp$ uit Σ, waar de afleiding van α uit Σ als sub-bewijs inzit. Maar dan is Σ inconsistent, in tegenspraak met de aanname Σ consistent is.
2. Stel $\Sigma \cup \{\beta\}$ is inconsistent, dan geldt $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \perp$ desda $\Sigma \vdash (\beta \to \perp)$ (Deductiestelling) desda $\Sigma \vdash \neg\beta$ (definitie van $\neg$). Dan is volgens deel 1 dus $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ consistent. Q.E.D.

Nu bewijzen we eindelijk Lemma 1.2, onder de aanname dat de signatuur $S = \{p_1, p_2, \ldots\}$ aftelbaar is (zo niet, dan lukt het bewijs ook met behulp van het Lemma van Zorn). Dan is ook $BT(S) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ aftelbaar. De volgende procedure werkt wegens Lemma 1.3 en de aanname dat Σ consistent is.

We zetten $\Sigma_0 = \Sigma$. Als α_1 consistent is met Σ_0, dan is $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\alpha_1\}$. Zo niet, dan is $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\neg\alpha_1\}$. Als α_2 consistent is met Σ_1, dan is $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\alpha_2\}$. Zo niet, dan is $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\neg\alpha_2\}$. Enzovoort: we gaan alle α_i af, en krijgen een theorie $\Sigma_\infty = \cup_n \Sigma_n \subset BT(S)$ die Σ bevat. De theorie Σ_∞ is consistent. Stel namelijk dat $\Sigma_\infty \vdash \perp$, dan heeft een bewijs van $\perp$ per definitie eindig veel regels, en kan daarmee ook slechts eindig veel uitspraken $\sigma \in \Sigma_\infty$ gebruiken. Er is dus een n met $\Sigma_n \vdash \perp$, maar dat is onmogelijk omdat iedere $\Sigma_n \subset \Sigma_\infty$ per constructie consistent is. Toevoeging van een willekeurige $\beta \notin \Sigma_\infty$ zou Σ_∞ inconsistent maken, omdat dan $\neg\beta \in \Sigma_\infty$, en de theorie $\Sigma \cup \{\beta, \neg\beta\}$ inconsistent is: we hebben $\neg\beta = (\beta \to \perp)$, zodat modus ponens geeft $\{\beta, \neg\beta\} \vdash \perp$ en dus ook $\Sigma \cup \{\beta, \neg\beta\} \vdash \perp$. We zeggen daarom dat Σ_∞ een *maximale consistente theorie* is, i.e. als Σ'' consistent is en $\Sigma_\infty \subset \Sigma''$, dan volgt $\Sigma_\infty = \Sigma''$.

Lemma 1.4 *Een maximale consistente theorie Σ_m zowel* deductief gesloten *(als $\Sigma_m \vdash \alpha$, dan $\alpha \in \Sigma_m$) als* volledig *(voor iedere uitspraak α geldt $\Sigma_m \vdash \alpha$ of $\alpha \in \Sigma_m$).*

Dit volgt direct uit Lemma 1.3 en zal herhaaldelijk worden gebruikt. We definiëren nu een afbeelding

$$V : BT(S) \to \{0, 1\}; \tag{1.29}$$
$$V(\alpha) = 1 \quad (\alpha \in \Sigma_\infty); \tag{1.30}$$
$$V(\alpha) = 0 \quad (\alpha \notin \Sigma_\infty). \tag{1.31}$$

We beweren dat V een valuatie is. Als dat zo is, dan zijn we klaar, want we hebben dan een valuatie V gevonden met $V(\Sigma) = 1$, i.e., Σ heeft een model. Omdat de syntax maar uit twee symbolen $\perp$ en $\to$ bestaat, hoeven we alleen maar te controleren dat, voor alle $\alpha, \beta \in BT(S)$,

$$V(\perp) = 0; \tag{1.32}$$
$$V(\alpha \to \beta) = V(\alpha) \to' V(\beta). \tag{1.33}$$

De eerste is makkelijk: $V(\perp) = 0$ desda $\perp \notin \Sigma_\infty$, wat zo is, omdat $\perp \in \Sigma_\infty$ inhoudt dat Σ_∞ inconsistent is). De tweede kan worden bewezen door een gevalsonderscheiding:

- $V(\beta) = 1$. In dat geval is $V(\alpha) \to' V(\beta) = 1$ (zie waarheidstabel) voor zowel $V(\alpha) = 0$ als $V(\alpha) = 1$, en moeten we dus laten zien dat $V(\beta) = 1 \to V(\alpha \to \beta) = 1$, oftewel: $\beta \in \Sigma_\infty \Rightarrow (\alpha \to \beta \in \Sigma_\infty)$. Dit klopt: Axioma 1 geeft $\beta \to (\alpha \to \beta)$, hetgeen volgens de Deductiestelling equivalent is met $\beta \vdash \alpha \to \beta$. Als $\beta \in \Sigma_\infty$, dan volgt dus $\Sigma_\infty \vdash \alpha \to \beta$, waaruit Lemma 1.4 geeft dat $(\alpha \to \beta) \in \Sigma_\infty$. Per definitie van V volgt $V(\alpha \to \beta) = 1$.
- $V(\alpha) = 0$ geeft in de waarheidstabel $V(\alpha \to \beta) = 1$, zodat te bewijzen is: $\alpha \notin \Sigma_\infty \Rightarrow \alpha \to \beta \in \Sigma_\infty$. Hier is het volgende resultaat voor nodig (opgave):

$$\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta), \tag{1.34}$$

  oftewel (met de Deductiestelling) $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$. Vanaf dit punt is het bewijs hetzelfde als in het vorige geval: $\alpha \notin \Sigma_\infty \Rightarrow \neg\alpha \in \Sigma_\infty \Rightarrow \Sigma_\infty \vdash \alpha \to \beta$, en dus $\alpha \to \beta \in \Sigma_\infty$ uit Lemma 1.4.
- $V(\alpha) = 1$ en $V(\beta) = 0$ geeft ten slotte $V(\alpha) \to' V(\beta) = 0$, zodat te bewijzen is: $\alpha \in \Sigma_\infty, \beta \notin \Sigma_\infty \Rightarrow \alpha \to \beta \notin \Sigma_\infty$. Dit doen we uit het ongerijmde. modus ponens geeft $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash \beta$, zodat $\alpha \in \Sigma_\infty$ en $\alpha \to \beta \in \Sigma_\infty$ zouden impliceren: $\Sigma_\infty \vdash \beta$, en dus $\beta \in \Sigma_\infty$. Maar we namen aan dat $\beta \notin \Sigma_\infty$, zodat $\neg\beta \in \Sigma_\infty$. Dit maakt Σ_∞ echter inconsistent. Q.E.D.

Dit geeft Stelling 1.3: $\Sigma \vdash \varphi$ desda $\Sigma \vDash \varphi$. Dit heeft alvast twee interessante gevolgen.

Gevolg 1.1 *(*Compactheidsstelling *voor propositielogica). Stel Σ is oneindig. Als voor iedere* eindige *$\Sigma' \subset \Sigma$ een valuatie V' bestaat zodat $V'(\Sigma') = 1$, dan bestaat er ook een valuatie V met $V(\Sigma) = 1$.*

Dit volgt door twee keer Stelling 1.5 toe te passen. De eerste keer (waarbij slechts 'gezondheid' nodig is) levert op dat iedere eindige theorie Σ' consistent is. Dat maakt Σ zelf consistent, omdat een bewijs van φ uit Σ uit eindig veel stappen bestaat en dus ook maar een eindig deel van Σ mag gebruiken. Een tweede toepassing van Stelling 1.5 (waarbij juist volledigheid wordt gebruikt) geeft Σ dan een model. Q.E.D.

Het tweede gevolg van Stelling 1.3, de *Beslisbaarheisstelling*, heeft precies het omgekeerde bewijs:

Gevolg 1.2 *Als Σ eindig is, bestaat een eindig algoritme om te beslissen of $\Sigma \vdash \varphi$ waar is.*

Inderdaad is $\Sigma \vDash \varphi$ beslisbaar, omdat $\Sigma \cup \{\varphi\}$ slechts eindig veel atomaire proposities p_i kan bevatten en dus over een eindige deelverzameling $S' \subset S$ gedefinieerd is. We hoeven dus slechts alle valuaties op $BT(S')$ na te gaan, en dat zijn er eindig veel (nl. $2^{|S'|}$).

Analoog is het probleem van *satisfiability* algoritmisch oplosbaar: bestaat er voor een gegeven uitspraak $\varphi \in BT(S)$ een valuatie V zodat $V(\varphi) = 1$? Dit is het geval desda $\neg\varphi$ *geen* tautologie is, en is dus niet het geval als $\vdash \neg\varphi$, waarmee we terug zijn bij het tweede Gevolg (met $\Sigma = \emptyset$). Qua rekentijd is dit beslisprobleem voor grote uitspraken φ echter erg lastig (i.e. het ligt in de complexiteisklasse NP).

1.6 Opgaven voor Week 5 (inleveren: 5, 6, 7)

1. Laat zien dat $\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \to \bot)$ een tautologie is (m.a.w. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \bot) \wedge ((\alpha \to \bot) \to \neg\alpha)$ is een tautologie, wat het geval is desda zowel $\neg\alpha \to (\alpha \to \bot)$ als $(\alpha \to \bot) \to \neg\alpha$ een tautologie is).
2. Bewijs $\vdash \bot \to \alpha$.
3. Bewijs dat $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$.
4. Stel Σ is oneindig. Bewijs dat als $\Sigma \vDash \varphi$, er een eindige deelverzameling $\Sigma' \subset \Sigma$ is met $\Sigma' \vDash \varphi$.
   N.B. Dit is een niet-triviale uitspraak, omdat in de bewering $\Sigma \vDash \varphi$ de conclusie $V(\varphi) = 1$ volgt uit de aanname dat $V(\sigma) = 1$ voor alle $\sigma \in \Sigma$, terwijl deze conclusie in de bewering $\Sigma' \vDash \varphi$ volgt uit de *a priori* zwakkere aanname dat $V(\sigma) = 1$ slechts voor alle $\sigma \in \Sigma'$.
5. Stel V is een valuatie op $BT(S)$. Laat zien dat $\Sigma = \{\alpha \in BT(S) \mid V(\alpha) = 1\}$ een maximaal consistente theorie is.
6. Bewijs dat voor een maximale consistente theorie Σ_m geldt: voor willekeurige $\alpha \in BT(S)$ is ofwel $\alpha \in \Sigma_m$ ofwel $\neg\alpha \in \Sigma_m$ (precies één van de twee).
   N.B. In het bewijs boven volgde deze eigenschap uit de expliciete constructie van de maximale consistente theorie Σ_∞. Deze algemenere versie is nodig voor de volgende opgave.
7. Bewijs met het Lemma van Zorn dat Lemma 1.2 (en daarmee ook de Volledigheidsstelling voor de propositielogica) voor alle (i.e. niet noodzakelijk aftelbare) theorieën Σ geldt.
   Hint: Laat (met Zorn) zien dat ook nu Σ bevat is in een maximale consistente theorie.

1.7 Natuurlijke deductie

Als alternatief voor het formele bewijzen via Axioma 1 t/m 3 met de modus ponens bespreken we kort de *natuurlijke deductie* van G. Gentzen (1909-1945). In deze aanpak zijn er geen axioma's, en de decuctieregels zijn iets eenvoudiger dan de axioma's van de vorige aanpak. Het nadeel van de natuurlijke deductie (tenminste voor beginners) is dat het werken met het invoeren en vervolgens 'opheffen' van aannamen enige ervaring vereist. De natuurlijke deductie komt terug in de eerste-orde logica. In natuurlijke deductie worden bewijzen opgeschreven door gebruikte resultaten en aannamen naast elkaar boven een streep te zetten, en de daaruit getrokken conclusie onder de streep te zetten. De gang van zaken zal straks hopelijk duidelijk zijn uit de voorbeelden (omdat we al weten wat een formeel bewijs is, houden het nu enigszins informeel, met de opmerking dat bewijzen via natuurlijke deductie precies dezelfde stellingen geeft als de vorige aanpak).

We werken voorlopig alleen met $\to$ en $\perp$, waarbij $\neg\alpha = \alpha \to \perp$. De regels van natuurlijke deductie zijn:

1. $\dfrac{\alpha}{\alpha}$ (i.e. uit α volgt α, dit is een versie van $\vdash \alpha \to \alpha$ oftewel, via de Deductiestelling, $\alpha \vdash \alpha$).
2. $\dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$ genaamd $\to$-*Eliminatie*, een versie van de modus ponens.
3. $$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \cdots \\ \cdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}$$
   genaamd $\to$-*Introductie*, waar α niet een al bewezen uitspraak is, maar als aanname wordt opgeschreven, om, zodra daaruit β is bewezen, weer te worden opgeheven. De puntjes staan dus voor een bewijs van β uit α en de conclusie $\alpha \to \beta$ kan verder in het bewijs steeds gebruikt worden; de aanname α mag echter niet meer worden gebruikt zodra deze door de conclusie $\alpha \to \beta$ is opgeheven! Deze regel is een versie van de Deductiestelling, namelijk $\alpha \vdash \beta$ desda $\vdash \alpha \to \beta$. Dit geldt ook als de aanname α niet nodig is om $\alpha \to \beta$ te bewijzen (en dan ook niet achteraf hoeft te worden opgeheven), zodat we als speciaal geval, dus zonder de toren van $[\alpha]$ tot β, hebben:
   $$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}$$
4. $\dfrac{\perp}{\alpha}$ (i.e. iedere α volgt uit $\perp$, vgl. het ons al bekende $\vdash \perp \to \alpha$; dit heet $\perp$-*Eliminatie*.
5. $$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha]\\ \cdots \\ \cdots \\ \perp\end{matrix}}{\alpha}$$
   genaamd *RAA* oftewel *Reductio Ad Absurdum* (bewijs uit het ongerijmde). Met $\neg\alpha = \alpha \to \perp$ volgt uit regel 3 al $\neg\alpha \to \perp$ oftewel $\neg\neg\alpha$, en RAA maakt het dus mogelijk daaruit α te concluderen. In aanwezigheid van $\to$-Introductie is deze regel dus equivalent met $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$.
6. In het bewijs van een uitspraak φ uit een theorie Σ mag iedere $\sigma \in \Sigma$ overal worden opgeschreven.

Uit de gegeven uitleg volgt dat deze deductieregels volgen uit onze axioma's en modus ponens. Het omgekeerde geldt ook; we zullen de axioma's namelijk via natuurlijke deductie afleiden. We zagen net al dat RAA equivalent is met $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ en leiden nu de omgekeerde implicatie $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$ af:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha] \qquad [\alpha \to \perp]}{\perp}}{(\alpha \to \perp) \to \perp}}{\alpha \to ((\alpha \to \perp) \to \perp)}$$

1. $\to$-Eliminatie op de bovenste rij.
2. $\to$-Introductie op de aanname $[\alpha \to \perp]$ (nu opgeheven) en $\perp$.
3. $\to$-Introductie op de aanname $[\alpha]$ (nu opgeheven) en $(\alpha \to \perp) \to \perp$.

Omdat $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ en $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$ samen equivalent zijn met ons derde axioma (in aanwezigheid van de eerste twee) hebben we nu ons derde axioma al via natuurlijke deductie afgeleid. Het eerste axioma $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ is een eenvoudig voorbeeld van $\to$-Introductie:

$$\begin{array}{c} [\beta] \\ \hline \alpha \to \beta \\ \hline \beta \to (\alpha \to \beta) \end{array}$$

1. $\to$-Introductie (zonder $[\alpha]$) uit de aanname $[\beta]$.
2. $\to$-Introductie op $[\beta]$ (nu opgeheven) en de tweede rij.

Ten slotte rest ons nog Axioma 2, i.e. $\vdash (\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta))$. Here we go:

$$\begin{array}{lcr} [\beta] & & [\beta \to \gamma] \\ \hline \gamma & & [\beta \to (\gamma \to \delta)] \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\gamma \to \delta} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\delta} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\beta \to \delta} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{(\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta)} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{(\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta))} \end{array}$$

1. $\to$-Eliminatie op $[\beta]$ en $[\beta \to \gamma]$.
2. $\to$-Eliminatie op $[\beta]$ en $[\beta \to (\gamma \to \delta)]$.
3. $\to$-Eliminatie op γ en $\gamma \to \delta$.
4. $\to$-Introductie op $[\beta]$ (nu opgeheven) en δ.
5. $\to$-Introductie op $[\beta \to \gamma]$ (nu opgeheven) en $\beta \to \delta$.
6. $\to$-Introductie op $[\beta \to (\gamma \to \delta)]$ (nu opgeheven) en $(\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta)$.

Dan nog een voorbeeld met RAA: we bewijzen $\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

$$\begin{array}{ccc} [\neg\beta] & [\neg\beta \to \neg\alpha] & [\alpha] \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\alpha \to \bot} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\bot} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\beta} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\alpha \to \beta} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)} \end{array}$$

1. $\to$-Eliminatie op $[\neg\beta]$ en $[\neg\beta \to \neg\alpha]$ (N.B. $\neg\alpha = \alpha \to \bot$).
2. $\to$-Eliminatie op $[\alpha]$ en $\bot$.
3. RAA op $[\neg\beta]$ (nu opgeheven) en $\bot$.
4. $\to$-Eliminatie op $[\alpha]$ (nu opgeheven) en β.
5. $\to$-Eliminatie op $[\neg\beta \to \neg\alpha]$ (nu opgeheven) en $\alpha \to \beta$.

Voor de volledigheid geven we ook de regels voor de andere logische symbolen, indien deze onafhankelijk worden gebruikt. Deze regels volgen uit de voorgaande en de definities $\alpha \wedge \beta = \neg(\alpha \to \neg\beta)$, $\alpha \vee \beta = \neg\alpha \to \beta$, en $\neg\alpha = \alpha \to \bot$.

1. $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$ ($\wedge$-*Introductie*) , $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ en $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$ ($\wedge$-*Eliminatie*);
2. $\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ en $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$ ($\vee$-*Introductie*), $\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\alpha}{\beta}$ ($\vee$-*Eliminatie*);
3. $\begin{array}{c} [\alpha] \\ \cdots \\ \cdots \\ \bot \\ \hline \neg\alpha \end{array}$ ($\neg$-*Introductie*);
4. $\dfrac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot}$ ($\neg$-*Eliminatie*).

1.8 Propositielogica en Boolse algebras

Er is een intiem verband tussen propositielogica en zogenaamde Boolse algebras, die ook in de informatica een sleutelrol spelen. De moderne (algebraïsche) logica begon hier zelfs mee. We brengen in herinnering dat een *poset* (i.e. *partially ordered set*) een verzameling P is met een binaire relatie $\leq$ zodanig dat $x \leq x$, $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \to (x \leq z)$, en $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \to (x = y)$.

Definitie 1.4 *1. Een* tralie *is een poset* $(P, \leq)$ *waarin voor iedere twee elementen* $x, y \in P$*, bestaat:*

- *een element* $x \vee y$*, genaamd het* supremum *(*$\sup$*) van* x *en* y*, dat voldoet aan:*

$$x \leq x \vee y; \tag{1.35}$$
$$y \leq x \vee y, \tag{1.36}$$

  en als $x \leq z$ *en* $y \leq z$ *voor een zekere* z*, dan* $x \vee y \leq z$ *(met andere woorden, uit* $x \leq z \leq x \vee y$ *en* $y \leq z \leq x \vee y$ *volgt* $z = x \vee y$*).*
- *een element* $x \wedge y$*, genaamd het* infimum *(*$\inf$*) van* x *and* y*, dat voldoet aan:*

$$x \wedge y \leq x; \tag{1.37}$$
$$x \wedge y \leq y, \tag{1.38}$$

  en als $z \leq x$ *en* $z \leq y$ *voor een zekere* z*, dan* $z \leq x \wedge y$ *(met andere woorden, uit* $x \wedge y \leq z \leq x$ *en* $x \wedge y \leq z \leq y$ *volgt* $z = x \wedge y$*). Suprema en infima zijn uniek (als ze bestaan).*

2. Een tralie heeft een kleinste element als er een 0 *bestaat zdd* $0 \leq x$ *voor alle* $x \in P$*, en een grootste element als er een* 1 *bestaat zdd* $x \leq 1$ *voor alle* $x \in P$ *.Als deze elementen bestaan, zijn ze uniek.*

3. Een tralie heet distributief *als een (en dus beide) van de volgende equivalente condities geldt:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z); \tag{1.39}$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \tag{1.40}$$

4. Een orthocomplementatie *op een tralie met 0 en 1 is een afbeelding*

$$\perp : P \to P, \quad x \to x^{\perp}, \tag{1.41}$$

die voldoet aan

$$x \wedge x^{\perp} = 0; \tag{1.42}$$
$$x \vee x^{\perp} = 1; \tag{1.43}$$
$$x^{\perp\perp} = x; \tag{1.44}$$
$$x \leq y \text{ desda } y^{\perp} \leq x^{\perp}. \tag{1.45}$$

In een distributief tralie is een orthocomplementatie uniek als deze bestaat (opgave). Tevens volgen in het distributieve geval de eigenschappen (1.44) - (1.45) *automatisch uit* (1.42) - (1.43).

5. Een Bools tralie *is een distributief tralie met 0 en 1 en een orthocomplementatie.*[1]

Het motiverende voorbeeld is $P = \mathcal{P}(X)$, de machtsverzameling van een verzameling X, met partiële ordening $\leq$ gegeven door inclusie $\subseteq$, i.e. $A \leq B$ desda $A \subseteq B$, en orthocomplementatie gegeven door complementatie, i.e. $A^{\perp} = X - A$. Dan volgt dat $0 = \emptyset$, $1 = X$, $A \vee B = A \cup B$ en $A \wedge B = A \cap B$.
Een belangrijk speciaal geval is $X = \{*\}$, de verzameling met 1 element, zodat $\mathcal{P}(X) = \{0, 1\}$.

De verzameling $BT(S)$ van uitspraken is bijna een Bools tralie als we de partiële ordening definiëren als $\alpha \leq \beta$ desda $\vdash \alpha \to \beta$. De operaties $\wedge, \vee$ in de definitie boven lijken dan erg op de logische operaties met dezelfde naam, en de orthocomplementatie lijkt erg op de logische negatie (deze observatie was het uitgangspunt van Boole zelf, tenminste in het voorbeeld $\mathcal{P}(X)$). Dit is echter (nog) niet goed. Weliswaar is aan twee van de drie axioma's van een partiële ordening voldaan, namelijk $x \leq x$ en $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$: het eerste is $\alpha \to \alpha$, hetgeen we eerder hebben bewezen, en het tweede is: $\alpha \to \beta$ en $\beta \to \gamma \Rightarrow \alpha \to \gamma$.

1. Een Boolse algebra is een daarmee equivalente structuur waarbij $\wedge$ en $\vee$ voorop staan. Eerst (her) definiëren we een tralie als een verzameling P met twee afbeeldingen $\wedge : P \times P \to P$ en $\vee : P \times P \to P$ die beide commutatief, associatief en idempotent zijn en tevens voldoen aan de absorptiewetten $x \vee (x \vee y) = x \wedge (x \vee y) = x$. Dit geeft een partiële ordening door $x \leq y$ desda $x \vee y = y$ (waaruit volgt $x \leq y$ desda $x \wedge y = x$), ten opzichte waarvan $\vee$ en $\wedge$ resp. het supremum en het infimum zijn. Een Boolse algebra is dan een tralie (als boven) met 0, 1, en $\perp$ gedefinieerd zoals voor een Bools tralie.

Ook dat wisten we al (opgave 4(b) uit week 4). Maar aan het derde axioma $x \le y$ en $y \le x \Rightarrow x = y$ is niet voldaan: $\alpha \to \beta$ en $\beta \to \alpha$ geven (per definitie) $\alpha \leftrightarrow \beta$, maar niet $\alpha = \beta$. Dit probleem sijpelt overal door. In de definitie van het supremum moet bijvoorbeeld uit $x \le z \le x \vee y$ en $y \le z \le x \vee y$ volgen $z = x \vee y$ (zie definitie boven). Uit $\alpha \to \gamma$ en $\gamma \to (\alpha \vee \beta)$ en $\beta \to \gamma$ en $\gamma \to (\alpha \vee \beta)$, waarbij $\alpha \vee \beta = \neg\alpha \to \beta$, volgt echter *niet* $\gamma = \alpha \vee \beta$, maar slechts $\gamma \leftrightarrow \alpha \vee \beta$. Omdat dit resultaat straks weer nodig is, leggen we het uit: de ene kant op, i.e. $\gamma \to (\alpha \vee \beta)$, geldt per aanname, en de andere kant op, dus $(\neg\alpha \to \beta) \to \gamma$, volgt uit de stelling (opgave)

$$\vdash (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \gamma)). \tag{1.46}$$

De Deductiestelling maakt dit ten slotte hetzelfde als $\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma\} \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to \gamma)$.

Een soortgelijk probleem treedt op voor $\wedge$, en bovendien zijn $\wedge$ en $\vee$ niet idempotent: opnieuw geldt niet dat $\alpha \vee \alpha = \alpha$, maar dat $\alpha \vee \alpha \leftrightarrow \alpha$, etc. Ten slotte geldt (1.44) niet met de voor de hand liggende keuze $\alpha^\perp = \neg\alpha$: je hebt weliswaar $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$, maar niet $\neg\neg\alpha = \alpha$.

Deze diagnose suggereert gelukkig ook de oplossing van het probleem: we definiëren een relatie $\sim$ of $BT(S)$ door $\alpha \sim \beta$ desda $\alpha \leftrightarrow \beta$, oftewel $\vdash \alpha \to \beta$ en $\vdash \beta \to \alpha$. Als we beginnen met een consistente theorie Σ, maken we $\sim_\Sigma$ door middel van $\alpha \sim_\Sigma \beta$ desda $\Sigma \vdash \alpha \to \beta$ en $\Sigma \vdash \beta \to \alpha$. Dit is inderdaad een equivalentierelatie (opgave), die vanwege Stelling 1.3 ook kan worden gedefinieerd als $\alpha \sim_\Sigma \beta$ desda $\Sigma \vDash \alpha \to \beta$ en $\Sigma \vDash \beta \to \alpha$. De verzameling van equivalentieklassen

$$LA(S, \Sigma) = BT(S)/ \sim_\Sigma \tag{1.47}$$

heet de *Lindenbaum algebra* van de signatuur S en de theorie Σ (wij zien $LA(S, \Sigma)$ echter als een tralie, zodat het woord 'algebra' alleen gepast is als we de algebraïsche structuur van voetnoot 1 gebruiken).

Stelling 1.7 *De Lindenbaum algebra $LA(S, \Sigma)$ is een Bools tralie in de partiële ordening*

$$[\alpha] \le [\beta] \textit{ desda } \Sigma \vdash \alpha \to \beta, \tag{1.48}$$

met kleinste element $0 = [\perp]$, grootste element $1 = (\perp \to \perp)$, en orthcomplementatie

$$[\alpha]^\perp = [\neg\alpha]. \tag{1.49}$$

In het bijzonder zijn deze partiële ordening en orthcomplementatie welgedefinieerd.

De verificatie hiervan is een opgave, die enige moeite kost als we $\sim_\Sigma$ syntactisch definiëren (i.e. via $\vdash$) en eenvoudiger wanneer we dat semantisch doen (i.e. via $\vDash$).

Een *homomorfisme* $\varphi : A \to B$ van Boolse tralies is een afbeelding die $\le$, 0, en 1 behoudt (hieruit volgt dat automatisch ook suprema, infima, en orthcomplementatie behouden zijn). Dan volgt eenvoudig:

Stelling 1.8 *Een valuatie $V : BT(S) \to \{0, 1\}$ met $V(\Sigma) = 1$ (dit heet een* model *van Σ) induceert een homomorfisme $\tilde{V} : LA(S, \Sigma) \to \{0, 1\}$ van Boolse tralies is door middel van $\tilde{V}([\alpha]) = V(\alpha)$.*

Let op: als we $\sim_\Sigma$ syntactisch definiëren hebben we de gezondheid van de propositiecalculus nodig om in te zien dat $\tilde{V}$ welgedefinieerd is op equivalentieklassen. Als we $\sim_\Sigma$ semantisch definiëren is dit (hopelijk) direct duidelijk. Stelling 1.8 suggereert dat we naar valuaties in willekeurige Boolse algebra's (i.p.v. $\{0, 1\}$) zouden kunnen kijken, en dat is dan ook precies wat Boole deed in *The Laws of Thought*.

1.9 Opgaven voor week 6 (inleveropgaven: 1, 4)

1. Bewijs met natuurlijke deductie $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$.
2. Bewijs met natuurlijke deductie $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$.
3. Bewijs (1.46), ofwel met Natuurlijke Deductie ofwel vanuit axioma's en modus ponens.
4. Bewijs Stelling 1.7, waarbij we $\sim_\Sigma$ syntactisch definiëren (i.e. via $\vdash$).
5. Bewijs Stelling 1.8.

1.10 Stelling van Stone

We eindigen deze inleiding in the propositielogica met een zeer fraai resultaat over de structuur van de Lindenbaum algebra $LA(S,\Sigma)$. We zagen al dat voor iedere verzameling X de machtsverzameling $\mathcal{P}(X)$ een Bools tralie is onder inclusie als partiële ordening. Het omgekeerde is niet het geval, maar wel 'bijna': er komt nog een topologische conditie om de hoek kijken. De Stelling van Stone, die we straks zonder bewijs geven, drukt dit uit. Maar voor een *eindig* Bools tralie geldt het gehoopte resultaat:

Stelling 1.9 *Ieder eindig Bools tralie B is isomorf met een machtsverzameling $\mathcal{P}(X)$, waarbij voor X de verzameling $\mathrm{Atom}(B)$ van atomen in X kan worden genomen. Het isomorfisme is dan gegeven door:*

$$B \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(\mathrm{Atom}(B)); \tag{1.50}$$
$$b \mapsto \{a \in \mathrm{Atom}(B) \mid a \leq b\}; \tag{1.51}$$
$$\bigvee A \leftarrow\!\shortmid A. \tag{1.52}$$

Hierbij noemen we twee Boolse tralies A, B *isomorf* als er een inverteerbaar homomorfisme $\varphi : A \to B$ bestaat, zie boven (de inverse is dan automatisch ook een homomorfisme van Boolse tralies). Een *atoom* in een tralie L met 0 is een element $0 \neq a \in L$ zodat $0 \leq x \leq a$ impliceert $x = 0$ of $x = a$. In $L = \mathcal{P}(X)$ zijn de atomen precies de singletons $a = \{x\}$ ($x \in X$), zoals je makkelijk kunt nagaan.Let op: we hebben geen *gelijkheid* $\mathrm{Atom}(\mathcal{P}(X)) = X$, maar slechts een *isomorfisme* $\mathrm{Atom}(\mathcal{P}(X)) \cong X$ van verzamelingen (i.e. een bijectie), namelijk $\{x\} \mapsto x$, dus als $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, dan is $\mathrm{Atom}(\mathcal{P}(X)) = \{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}$.

Ten slotte is het grote supremum-symbool $\bigvee A \in L$ voor willekeurige deelverzamelingen $A \subseteq L$ van een tralie L gedefinieerd als het (unieke) element in L zodat $x \leq \bigvee A$ voor alle $x \in A$, en als $x \leq y \leq \bigvee A$ voor alle $x \in A$, dan geldt $y = \bigvee A$. Voor $A = \{x, y\}$ hebben we dus $\bigvee\{x, y\} = x \vee y$. Als A eindig is bestaat dit element altijd (gegeven dat L een tralie is), namelijk $\bigvee\{x_1, \ldots, x_n\} = x_1 \vee \cdots \vee x_n$ (waarbij de notatie betekent dat $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 = ((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \vee x_4$, etc.). Voor sommige tralies bestaat het zelfs voor alle deelverzamelingen A; zulke tralies heten *compleet*. Dit is bijvoorbeeld het geval voor $L = \mathcal{P}(X)$, ook voor oneindige X, namelijk $\bigvee A = \bigcup A$, waar $A \subseteq \mathcal{P}(X)$. We brengen in herinnering dat $\bigcup A$ bestaat uit de elementen van de elementen van A, dus (voor het gemak aannemende dat A eindig is, zoals altijd het geval is voor eindige X), als $A = \{\{x_1\}, \ldots, \{x_k\}\}$, dan is

$$\bigvee\{\{x_1\}, \ldots, \{x_k\}\} = \bigcup\{\{x_1\}, \ldots, \{x_k\}\} = \{x_1, \ldots, x_k\}. \tag{1.53}$$

Voor $B = \mathcal{P}(X)$ voor eindige X kunnen we (1.50) - (1.52) dus als volgt lezen. Ten eerste is $\mathrm{Atom}(B) \cong X$, zoals boven besproken. Ten tweede geldt voor $b \in \mathcal{P}(X)$, oftewel $b \subseteq X$, dat $a \leq b$ desda $a \subseteq b$ (per definitie van $\leq$), en geldt $a \in \mathrm{Atom}(B)$ desda $a = \{x\}$, zodat (1.51) de afbeeling $b \mapsto \{\{a\} \mid a \in b\}$ is. Dat is inderdaad een bijectie, want $b = \{a \mid a \in b\}$, en dit maakt ook (1.50) een bijectie. Ten derde staat (1.52) al uitgelegd in (1.53). We zien dus dat de stelling waar is voor $B = \mathcal{P}(X)$, maar niet op een tautologische manier: vanwege het verschil tussen $\mathrm{Atom}(\mathcal{P}(X))$ en X moet je wel degelijk even opletten!

We nemen nu $B = LA(S,\Sigma)$ en stellen nu zonder bewijs dat als S eindig is, ook $LA(S,\Sigma)$ eindig is (dit volgt uit de algemene representatiestelling op het eind). Dit is verre van triviaal, omdat $BT(S)$ aftelbaar oneindig is, ook als S eindig is. De equivalentieklassen zorgen er echter voor dat het quotient (1.47), i.e. $LA(S,\Sigma) = BT(S)/\sim_\Sigma$, eindig is. Maar nu we dit weten kunnen we Stelling 1.9 toepassen. Daartoe moeten we $\mathrm{Atom}(LA(S,\Sigma))$ bepalen. We noteren $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ en beperken ons eerst tot $\Sigma = \emptyset$.

Lemma 1.5 *De verzameling $\mathrm{Atom}(LA(\{p_1, \ldots, p_n\})$ bestaat uit de equivalentieklassen $[\alpha]$ van uitspraken α waarvoor er een* unieke *valuatie V is met $V(\alpha) = 1$ (i.e. de eis $V(\alpha) = 1$ legt V vast).*

De equivalentieklasse $[\alpha]$ is een atoom in $\mathrm{Atom}(LA(\{p_1, \ldots, p_n\})$ desda als geldt: voor alle $[\beta] \neq [\perp]$ moet uit $0 \leq [\beta] \leq [\alpha]$ volgen: $[\beta] = [\alpha]$. Uitgeschreven betekent dit: uit $\vdash \beta \to \alpha$ moet volgen $\vdash \beta \leftrightarrow \alpha$. De $\to$ kant zit echter al in de aanname, dus uit $\vdash \beta \to \alpha$ moet volgen $\vdash \alpha \to \beta$. Dit is equivalent met: uit $\vDash \beta \to \alpha$ moet volgen $\vDash \alpha \to \beta$ en dit betekent weer: voor iedere valuatie V waarvoor geldt: $V(\beta) = 1 \Rightarrow V(\alpha) = 1$, moet de omgekeerde implicatie volgen: $V(\alpha) = 1 \Rightarrow V(\beta) = 1$. Dit is waar desda de eis $V(\alpha) = 1$ de valuatie V uniek vastlegt. Als dat namelijk zo is, maakt de aangenomen implicatie $V(\beta) = 1 \Rightarrow V(\alpha) = 1$ een valuatie V die voldoet aan $V(\beta) = 1$ uniek. De aanname $V'(\alpha) = 1$ in de tweede implicatie $V'(\alpha) = 1 \Rightarrow V'(\beta) = 1$ forceert dan dat deze V' de eerdere unieke V is, die per aanname voldoet aan $V(\beta) = 1$. Omgekeerd: als de eis $V(\alpha) = 1$ de valuatie V *niet* uniek vastlegt, zijn er valuaties V en V' en is er een uitspraak β met $V(\alpha) = V'(\alpha) = 1$ maar $V(\beta) = 1$ en $V'(\beta) = 0$. Daarvoor is de aanname $V'(\beta) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 1$ waar, maar niet de conclusie $V'(\alpha) = 1 \Rightarrow V'(\beta) = 1$ (want $V'(\beta) = 0$). Q.E.D.

Gevolg 1.3 *Ieder atoom is van de vorm* $[\pm p_1 \wedge \cdots \wedge \pm p_n]$*, waarbij* $+p_i = p_i$ *en* $-p_i = \neg p_i$*. Daarmee heeft* $\mathrm{Atom}(LA(\{p_1, \ldots, p_n\})$ *dus* $2^n = 2^{|S|}$ *elementen.*

We moeten de uitspraken α vinden waarvoor de conditie $V(\alpha) = 1$ de valuatie V uniek bepaalt. Het is duidelijk dat α alle p_i moet bevatten (als namelijk p_j niet voorkomt in α, dan kan $v(p_j)$ vrij worden gekozen zonder $V(\alpha)$ te beïnvloeden). Het logische symbool $\wedge$ is het unieke symbool waarvoor de conditie $V(\beta \wedge \gamma) = 1$ impliceert $V(\beta) = V(\gamma) = 1$ (en analoog met andere voortekens). Een blik op de formatieregels voor uitspraken leert dan dat $\alpha \leftrightarrow \pm p_1 \wedge \cdots \wedge \pm p_n$ en dus $[\alpha] = [\pm p_1 \wedge \cdots \wedge \pm p_n]$ (deze laatste stap van het bewijs moet officieel door inductie op de lengte van α worden uitgevoerd). Q.E.D.

We kunnen een atoom $[\alpha]$ volgens Lemma 1.5 dus identificeren met de unieke valuatie V met $V(\alpha) = 1$. Dit is extra duidelijk uit het Gevolg, want als $\alpha = p_1 \wedge \cdots \wedge p_n]$, dan zien we uit de waarheidstabel voor $\wedge$ direct dat $V(\alpha) = 1$ desda $V(p_1) = \cdots = V(p_n) = 1$ (en analoog met andere voortekens). Hieruit blijkt tevens dat er voor iedere valuatie V een uniek atoom $[\alpha]$ is met $V(\alpha) = 1$, namelijk $\alpha = \pm p_1 \wedge \cdots \wedge \pm p_n$, met $+p_i$ desda $V(p_i) = 1$ en $-p_i$ desda $V(p_i) = 0$. Het is ook mogelijk dit in te zien zonder gebruik te maken van Gevolg 1.3 (dat we ook niet helemaal hebben bewezen en dat sowieso aanzienlijk gecompliceerder wordt als $\Sigma \neq \emptyset$), en zelfs voor willekeurige eindige Boolse tralies.

Lemma 1.6 *Voor ieder homomorfisme* $\varphi : B \to \{0, 1\}$ *van Boolse tralies is er precies één atoom* $a \in B$ *met* $\varphi(a) = 1$ *(terwijl dus* $\varphi(b) = 0$ *voor alle andere atomen* $b \in B$*).*

Het eerste bewijs gebruikt Stelling 1.9, die de situatie reduceert tot $B = \mathcal{P}(X)$, met $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Stel dat $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ een homomorfisme is van Boolse tralies en stel dat $\varphi(\{x_1\}) = \varphi(\{x_2\}) = 1$. Dan geldt $\varphi(\{x_2, \ldots, x_n\}) = \varphi(\{x_1\}^{\perp}) = \varphi(\{x_1\}' = 1 - \varphi(\{x_1\} = 0$. Maar ook is $\{x_2\} \leq \{x_2, \ldots, x_n\}$, zodat $\varphi(\{x_2\}) \leq \varphi(\{x_2, \ldots, x_n\})$, i.e., $\varphi(\{x_2, \ldots, x_n\}) = 1$. Tegenspraak: er is dus hoogstens één x_i met $\varphi(\{x_i\}) = 1$. Maar als $\varphi(\{x_i\}) = 0$ voor alle x_i, dan volgt

$$\varphi(X) = \varphi(\bigvee\{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}) = \bigvee_i \varphi(\{x_i\}) = \bigvee 0 = 0,$$

terwijl per definitie van een homomorfisme moet gelden $\varphi(X) = \varphi(1) = 1$. Q.E.D.

Een soortgelijk bewijs gaat uit van de volgende gelijkheid voor ieder eindig Bools tralie B (opgave!):

$$b = \bigvee\{a \in \mathrm{Atom}(B) \mid a \leq b\}. \tag{1.54}$$

We schrijven $\mathrm{Val}(BT(S))$ voor de verzameling van alle valuaties $V : BT(S) \to \{0, 1\}$, oftewel voor de verzameling $\mathrm{Hom}_{\underline{2}}(LA(S))$ van alle homomorfismen $LA(S) \to \{0, 1\}$ (zie Stelling 1.8, waarbij ook ieder homomorfisme $\tilde{V}$ ook van een unieke valuatie V komt). Voor eindige S hebben we dus een bijectie

$$\mathrm{Atom}(LA(S)) \cong \mathrm{Val}(BT(S)) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{2}}(LA(S)). \tag{1.55}$$

Onder deze bijectie wordt de verzameling in het rechterlid van (1.51), namelijk

$$\begin{aligned} \{[\alpha] \in \mathrm{Atom}(LA(S)) : [\alpha] \leq [\beta]\} &= \{[\alpha] \in \mathrm{Atom}(LA(S)) : \vDash \alpha \to \beta\} && (1.56)\\ &= \{[\alpha] \in \mathrm{Atom}(LA(S)) : \ V(\alpha) = 1 \Rightarrow V(\beta) = 1\}, && (1.57) \end{aligned}$$

afgebeeld op de verzameling van valuaties V die voldoen aan $V(\beta) = 1$. We vinden zo een isomorfisme

$$\begin{aligned} LA(S) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(\mathrm{Val}(BT(S))); && (1.58)\\ [\beta] &\mapsto \{V \in \mathrm{Val}(BT(S)) \mid V(\beta) = 1\}; && (1.59)\\ \bigvee\{[\beta], V(\beta) = 1 \,\forall\, V \in A\} &\leftarrow\!\shortmid A. && (1.60) \end{aligned}$$

Met een theorie Σ erbij schrijven we $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S,\Sigma)$ voor de verzameling van alle valuaties $V : BT(S) \to \{0,1\}$ die voldoen aan $V(\Sigma) = 1$ (i.e. $V(\sigma) = 1$ voor alle $\sigma \in \Sigma$); dit zijn precies de binaire modellen van Σ. Met soortgelijke argumenten volgt dan (we laten de minder interessante derde regel weg):

$$LA(S,\Sigma) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S,\Sigma)); \tag{1.61}$$
$$[\beta] \mapsto \{V \in \mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S,\Sigma)) \mid V(\beta) = 1\}. \tag{1.62}$$

Kortom, een uitspraak wordt zo geïdentificeerd van alle modellen van Σ waarin deze uitspraak waar is.

De algemene vorm van deze stelling (i.e. voor willekeurige signatuur S is als volgt. We definiëren een topologie op de verzameling $X = \mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S,\Sigma)$ van binaire modellen van Σ als de kleinste topologie die alle verzamelingen in het rechterlid van (1.62) bevat (die dus per definitie open zijn). In deze topologie is de ruimte X compact, dat is mooi, maar verder is zij *totaal onsamenhangend* (en dat is lelijk), in de zin dat voor iedere $x, y \in X$ met $x \neq y$ er een *clopen* $U \subset X$ is met $x \in U$ en $y \notin U$ (hier betekent *clopen*: zowel open als gesloten). Een compacte ruimte met deze eigenschap heet een *Stone-ruimte*. Het isomorfisme (1.61) - (1.62) is dan een speciaal geval van de *representatiestelling van Stone*:

Stelling 1.10 *Voor iedere Stone-ruimte X is de poset $\mathrm{Clopen}(X)$ van alle clopen deelverzamelingen van X een Bools tralie onder de van $\mathcal{P}(X)$ geërfde operaties (i.e. $\leq$ is $\subseteq$, $A^\perp$ is $X - A$ etc.). Omgekeerd is er voor iedere Boolse tralie B een Stone-ruimte X zodat*

$$B \cong \mathrm{Clopen}(X). \tag{1.63}$$

Voor X kunnen we de verzameling $\mathrm{Hom}_{\underline{2}}(B)$ van alle homomorfismen $\varphi : B \to \{0,1\}$ kiezen, met de kleinste topologie waaronder alle verzamelingen

$$U_b = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\underline{2}}(B) \mid \varphi(b) = 1\} \tag{1.64}$$

open zijn ($b \in B$), en dan is het isomorfisme (1.63) *gegeven door $b \mapsto U_b$.*

Gevolg 1.4 *Voor iedere signatuur S en theorie $\Sigma \subset BT(S)$ geldt, in de bovenstaande topologie,*

$$LA(S,\Sigma) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Clopen}(\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S,\Sigma)); \tag{1.65}$$
$$[\beta] \mapsto \{V \in \mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S,\Sigma)) \mid V(\beta) = 1\}. \tag{1.66}$$

Voor de volledigheid geven we een bewijsschets van Stelling 1.10. Ook als een Bools tralie geven atomen heeft is de afbeelding $b \mapsto U_b$ in Stelling 1.10 een injectief homomorfisme van B naar $X = \mathcal{P}(\mathrm{Hom}_{\underline{2}}(B))$; het hoeft echter geen surjectie te zijn (tenzij B eindig is). Om het beeld van dit homomorfisme te bepalen maken we de U_b de basis van een topologie, i.e., de open verzamelingen in X zijn willekeurige verenigingen $U = \bigcup\{U_{b_\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$. Omdat $U_b^c = U_{b^\perp}$, zodat iedere U_b niet alleen open is maar ook gesloten, i.e. *clopen*, is dit inderdaad een topologie, i.e., gesloten onder eindige doorsneden (en per constructie onder willekeurige verenigingen). Het technisch lastige punt in het bewijs, dat we weglaten, is dat X in deze topologie *compact* is. Maar als we dit weten, volgt dat het homomorfisme $b \mapsto U_b$ surjectief is op $\mathrm{Clopen}(X)$: stel $U \in \mathrm{Clopen}(X)$. Dan is U open, zodat $U = \bigcup\{U_{b_\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$. Maar U is tevens gesloten, en, omdat X compact is, ook compact. De overdekking $\{U_{b_\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ van U heeft dus (per definitie van compactheid) een eindige deeloverdekking $\{U_{b_1}, \ldots, U_{b_n}\}$, i.e.

$$U = \bigcup\{U_{b_1}, \ldots, U_{b_n}\} = \bigvee\{U_{b_1}, \ldots, U_{b_n}\} = U_{b_1} \vee \cdots \vee U_{b_n} = U_{b_1 \vee \cdots \vee b_n}.$$

De gegeven clopen verzameling U is dus $U = U_c$ met $c = b_1 \vee \cdots \vee b_n$, zodat U in het beeld ligt van de afbeelding $b \mapsto U_b$. Deze afbeelding is daarmee naast injectief ook surjectief, en is dus een isomorfisme (i.e. van Boolse tralies). Q.E.D.

1.11 Opgaven voor week 7 (inleveropgaven: geen)

1. Bewijs (1.54).
2. Bewijs hieruit Stelling 1.9.
3. Bewijs ook Lemma 1.6 uit (1.54).