

# Leidraad bij het college

## Inleiding Toegepaste Wiskunde I

(najaar 2007)

Klaas Landsman

Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics  
Radboud Universiteit Nijmegen  
Toernooiveld 1  
6525 ED NIJMEGEN

e-mail: [landsman@math.ru.nl](mailto:landsman@math.ru.nl)  
website: <http://www.math.ru.nl/~landsman>  
tel.: 024-3652874  
kamer: HG03.709

### **Werkcollege:**

Mireille Buiteman [M.Buiteman@student.science.ru.nl](mailto:M.Buiteman@student.science.ru.nl)

*Het regelmatig inleveren van opgaven is noodzakelijk om het vak te leren en ook om het te halen!*

**Schema** (weken 36–42, 46–51, 2–3):

maandag 013:45–15:30 **hoorcollege** in HG.02.702;

donderdag 10:45–12:30 **werkcollege** in HG.02.702

### **Programma**

We doen per week een hoofdstuk uit de boeken van Betounes: achtereenvolgens Chapter 1, 2, 3, 5, 6, 7 uit *Differential Equations* en Chapter 2–7 uit *Partial Differential Equations*. Dan besteedt Hans Maassen nog drie weken aan coderingstheorie.

### **Verplichte literatuur:**

David Betounes, *Differential Equations: Theory and Applications* (Springer, Berlin, 2001).

David Betounes, *Partial Differential Equations for Computational Science: With Maple and Vector Analysis* (Springer, Berlin, 1998).

### **Voor liefhebbers:**

Vladimir I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (Springer, 2006).

Vladimir I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations* (Springer, 2004).

J.J. Duistermaat & W. Eckhaus, *Analyse van gewone differentiaalvergelijkingen* (Epsilon Uitgaven Utrecht, 2002).

Martin Streng, Stephan van Gils, Adri van der Meer, *Maple: Wiskunde in berekenbaar perspectief*, 3e editie (Addison-Wesley, 2002).

*Behalve deze boeken staat al het cursusmateriaal op Blackboard.*



## Inleiding

### Algemeen

Het doel van Toegepaste Wiskunde I is om kennis te maken met zowel theorie als praktijk van gewone en partiële differentiaalvergelijkingen. Zoals uit de historische inleiding zal blijken, ligt de nadruk tegenwoordig niet meer op het kunnen produceren van expliciete oplossingen, maar op het kwalitatieve gedrag van deze oplossingen. Dit gedrag kan worden bepaald door middel van analytische en meetkundige argumenten, maar vaak ook uit plaatjes. Een belangrijk onderdeel van het college is dan ook de kennismaking met het wiskundige software-pakket *Maple*, waarmee je dergelijke plaatjes zelf kunt maken. Je leert ook begrijpen hoe deze plaatjes tot stand komen en wat de valkuilen zijn. Tevens bevat *Maple* krachtige analytische methoden om in sommige gevallen ook expliciete oplossingen te vinden.

Het is belangrijk om te weten dat differentiaalvergelijkingen het oudste onderdeel van de moderne wiskunde vormen (i.e. de wiskunde sinds Newton, i.t.t. de wiskunde van Euclides en Archimedes). Vrijwel alle grote wiskundigen sinds de 17e eeuw hebben zich met dit onderwerp beziggehouden, er zijn duizenden boeken over geschreven en zeer diepe resultaten geboekt. Dit college geeft slechts een allereerste kennismaking! Het is daarbij de bedoeling dat je zo snel mogelijk snel aan de slag kunt. Het is onze hoop dat je ook voor je plezier de theorie bestudeert en achter de computer plaatsneemt!

### Geschiedenis

Uit het boek van Arnold citeren we:

Differential equations were invented by Newton (1642–1727). Newton considered this invention of his so important that he encoded it as an anagram whose meaning in modern terms can be freely translated as follows: “The laws of nature are expressed by differential equations.”

Het is niet overdreven om te zeggen dat de moderne (exacte) wetenschap is begonnen met het werk van Newton. Het begin van de calculus is rond 1666 te plaatsen, en in 1671 had hij al een scherp begrip van wat wij nu een gewone differentiaalvergelijking noemen. Hoewel zijn belangstelling voornamelijk lag in de verklaring van de planeetbanen en van de beweging van voorwerpen in het algemeen (i.e. de klassieke mechanica), waren de wiskundige technieken die hij ontwikkelde zo algemeen dat naast de natuurkunde ook disciplines als scheikunde, biologie en economie er tot op de dag van vandaag gebruik van maken.

Newton werkte niet met het begrip functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zoals wij, maar in feite was zijn aanpak heel modern. Wat wij als de grafiek van  $f$  in  $\mathbb{R}^2$  beschouwen zag Newton als een traject, geparametriseerd door de tijd  $t$ , i.e. een curve  $t \mapsto (x(t), y(t))$ . Een dergelijke curve zag hij als de oplossing van een differentiaalvergelijking

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x(t), y(t)) \\ v_2(x(t), y(t)) \end{pmatrix}, \quad (1) \quad \boxed{\text{dN}}$$

(waarbij we  $v = (v_1, v_2)$  tegenwoordig een vectorveld op  $\mathbb{R}^2$  zouden noemen) met beginwaarde  $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ . Hier is  $\dot{x} = dx/dt$  Newtons eigen notatie. Dit geeft nog steeds de beste manier om tegen een eerste-orde differentiaalvergelijking aan te kijken: deze wordt gegeven door een vector-veld, en de oplossing met willekeurige beginwaarden geeft een familie van curven of banen. Een dergelijke baan hoeft allermindst de grafiek van een functie te zijn: ook gesloten banen komen voor, en meer i.h.a. kan een verticale lijn (loodrecht op de  $x$ -as een baan meerdere malen snijden. Als een baan de grafiek van een functie is (wat lokaal altijd het geval is, behalve in pathologische voorbeelden), kun je deze functie als volgt vinden.

Je lost eerst de differentiaalvergelijking

$$y'(x) = \frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)} \quad (2) \quad \boxed{\text{gdv1}}$$

op. De algemene oplossing bevat een integratieconstante  $C$ , zodat je vindt  $y = f(x, C)$ . Voor een gegeven beginpunt  $(x_0, y_0)$  kies je  $C = C_0$  zodanig dat  $y_{\text{an}} = f(x_0, C_0)$ . De grafiek  $y = f(x, C_0)$  is dan precies de curve  $t \mapsto (x(t), y(t))$  door  $(x_0, y_0)$  die  $(\text{I})$  oplost. Dit volgt onmiddellijk uit de kettingregel

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_2(x(t), y(t))}{v_1(x(t), y(t))}. \quad (3)$$

Helaas is de correspondentie tussen integratieconstanten  $C$  m.b.t.  $(\text{I6})^{\text{gdv1}}$  en oplossingen van  $(\text{I})^{\text{dn}}$  niet bijectief, zodat dit verhaal alleen lokaal (i.e. in een omgeving van een willekeurig punt in  $\mathbb{R}^2$ ) opgaat.

Het eenvoudigste voorbeeld waarin dit allemaal lukt is  $v(x, y) = (a, b)$ . Dan is  $(\text{I6})^{\text{gdv1}}$  de vergelijking  $y'(x) = b/a$  met oplossing  $y = bx/a + k$ . Niet veel ingewikkelder is het geval  $v(x, y) = (1, y)$ ; zie opgaven.

Het oplossen van  $(\text{I})^{\text{dn}}$  deed Newton met behulp van wat wij nu de Taylor-reeks expansie van de gezochte oplossing zouden noemen (naar Brook Taylor, 1685–1731, die dus veel later was dan Newton), en termsgewijze integratie. Met dergelijke technieken kon hij vele soorten beweging op aarde en in de hemel verklaren.

Zijn werk werd op het continent voortgezet, met name door Leibniz (1646–1716), met Newton een fel prioriteitsgevecht inzake voerde, en Jakob Bernoulli (1654–1705). In de achttiende eeuw waren differentiaalvergelijkingen belangrijk onderwerp van wiskundig onderzoek, mede vanwege de toepassingen in de natuurkunde. Het doel was steeds om een expliciete oplossing te vinden, en de meeste van de nu bekende technieken daartoe (scheiding van variabelen, substitutie, variatie van constanten, integrerende factor, reductie tot een eerste-orde systeem) stammen al uit die tijd. Wat dit laatste betreft: door het invoeren van nieuwe variabelen kan iedere differentiaalvergelijking worden omgezet in een stelsel van eerste-orde differentiaalvergelijkingen. Dit betreft met name de tweede wet van Newton  $F_{\text{an}}(x) = m\ddot{x}$ , die equivalent is met het stelsel  $\dot{x} = p/m$  en  $\dot{p} = F$ . Dit stelsel is precies van de vorm  $(\text{I})^{\text{dn}}$ , met  $y \equiv p$  en  $v(x, p) = (p, F(x))$ .

Belangrijke namen zijn in dit verband Nicolaas Bernoulli (1687–1759, de zoon van Jakob), Euler (1707–1783), D'Alembert (1717–1783), Lagrange (1736–1813) en Laplace (1749–1827). Al deze mensen werkten ook aan partiële differentiaalvergelijking, waarover later meer.

De speciale oplossingsmethoden die zo werden ontdekt hadden als overkoepelend doel om een algoritme te vinden waarmee een willekeurige differentiaalvergelijking kon worden opgelost. Dit doel werd ondanks de inspanningen van de allerbeste wiskundigen niet bereikt, en in de 19e eeuw kwam daarom de nadruk te liggen op zaken als het bewijzen van het bestaan en de uniciteit van oplossingen. Dit paste uiteraard in de algehele ontwikkeling van de analyse, waar in de 19e eeuw werd gezocht naar grondslagen en absolute precisie. Degenen die dit programma leidden, zoals Cauchy (1789–1857) en Dirichlet (1805–1859), hielden zich uiteraard ook met differentiaalvergelijkingen bezig: het eerste existentiebewijs is afkomstig van Cauchy. Deze ontwikkeling bracht aardige verrassingen met zich mee: waar Newton en Euler, toch niet de domsten, er niet aan twijfelden dat een eerste-orde differentiaalvergelijking met gegeven beginwaarde een unieke oplossing heeft, zijn er eenvoudige tegenvoorbeelden. Het eenvoudigste is misschien  $\dot{x} = x^{2/3}$ , dus in  $\mathbb{R}^1$ , met beginwaarde  $x(0) = 0$ . Oplossingen zijn bijvoorbeeld  $x(t) = 0$  voor alle  $t$ ,  $x(t) = (t/3)^3$ , en nog veel meer! Ook kan het gebeuren dat een oplossing van een differentiaalvergelijking wel uniek is, maar niet voor alle  $t$  is gedefinieerd. Hier is een eenvoudig voorbeeld (zij het slechts numeriek op te lossen) de differentiaalvergelijking  $(\text{I})^{\text{dn}}$  met  $v(x, y) = (y, x^3)$ . Met iedere beginwaarde  $(x_0, y_0 \neq 0)$  blijkt dat “het deeltje” binnen eindige tijd uit het vlak verdwijnt, bijv. voor  $(x_0, y_0) = (0, 5)$  gebeurt dit voor  $t \sim 1$ .

In de twintigste eeuw kwam de nadruk te liggen op het bepalen van eigenschappen van oplossingen zonder deze expliciet te kennen: bestaat en uniciteit bleef een punt, net als in de 19e eeuw, maar nu werd ook gekeken naar het kwalitatieve gedrag voor bijvoorbeeld  $t \rightarrow \infty$  en naar de structuur van het fase-diagram (i.e. de verzameling oplossingscurven van  $(\text{I})^{\text{dn}}$ , ook  $\mathbb{R}^n$  voor  $n > 2$ ). De grote namen zijn hier Poincaré (1854–1911) en Kolmogorov (1903–1987). Zo maakte de theorie van gewone differentiaalvergelijking langzaam plaats voor de theorie van *dynamische systemen*. Er bestaat geen precieze definitie van een dynamisch systeem, maar er is altijd sprake van een *faseruimte*  $X$ , bijvoorbeeld  $\mathbb{R}^2$  zoals boven (maar ook een lijst van aandelen is een faseruimte), een

evolutie in de tijd, die continu of discreet kan zijn, en een “wet” die deze evolutie geeft. Dit is in de natuurkunde vaak een differentiaalvergelijking, waarvan men dan hoopt dat de oplossing voor gegeven beginvoorwaarden bestaat en uniek is. In dat geval spreekt men van een *deterministisch dynamisch systeem*. Maar ook stochastische dynamische systemen staan sterk in de belangstelling, bijvoorbeeld in de financiële wereld.

Een precieze definitie van een dynamisch systeem met continue tijd, dat lang niet alle voorbeelden dekt maar tenminste concreet is, is als volgt (als je wilt kun je voor  $X$  gewoon  $\mathbb{R}^n$  of zelfs  $\mathbb{R}^2$  in gedachten houden):

def1.1

**Definitie 0.1** *Een dynamisch systeem met continue tijd bestaat uit een verzameling  $X$  (de faseruimte) en een afbeelding  $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  met de eigenschappen (we schrijven  $\varphi_t(x)$  voor  $\varphi(t, x)$ ):*

1. Iedere functie  $\varphi_t : X \rightarrow X$  is een bijectie;
2.  $\varphi_0(x) = x$  voor alle  $x \in X$ ;
3. Voor alle  $x \in X$  geldt

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x). \quad (4)$$

semigroep

Natuurlijk kunnen er, indien  $X$  (zoals vrijwel altijd het geval is) meer structuur heeft dan alleen die van een verzameling, nadere eisen aan de functie  $\varphi$  worden gesteld. Als  $X$  een metrum met maat  $\mu$  is, eist men dat  $\varphi_t$  meetbaar is en de maat behoudt. Dit deel van de theorie dynamische systemen heet *ergodentheorie*, en wordt ook vaak met discrete tijd gedaan. Als  $X$  een topologische ruimte is, eist men dat  $\varphi$  continu is en en iedere  $\varphi_t$  een homeomorfisme, i.e. een continue bijectie met continue inverse. Als  $X$  een gladde variëteit is, eisen we dat  $\varphi$  glad (i.e.  $C^\infty$ ) is en iedere  $\varphi_t$  een diffeomorfisme, i.e. een  $C^\infty$  bijectie met  $C^\infty$  inverse. Ten slotte, als  $X$  een zogenaamde symplectische variëteit is, moet iedere  $\varphi_t$  de symplectische structuur behouden; dit geeft de wiskundige setting van de moderne klassieke mechanica.

Het zal weldra duidelijk worden wat de bovenstaande definitie met differentiaalvergelijking te maken heeft!

## Week 1 (3 en 6 september 2007)

In het hoorcollege van week 1 op 3 september behandelen we de bovenstaande inleiding en Chapter 1 uit *Differential Equations* van Betounes. Dit boek is eenvoudig zelfstandig door te werken, zodat lang niet alles op het college wordt behandeld. Wat niet is behandeld is huiswerk, tenzij we expliciet vermelden wat wordt overgeslagen. In Chapter 1 slaan we (voorlopig) Examples 1.4 en 1.10 over.

### Vorbereiding op het werkcollege van 6 september

1. Lees Chapter 1 van *Differential Equations* geheel door en kom vragen/mail wat je niet begrijpt.
2. Lees Appendix C1-C4 (Maple Reference Guide) van *Partial Differential Equations for Computational Science* door.
3. Lees Hoofdstukken 10, 11 en 12 van de file **Deel II: Maple** door (geschreven door Dr. Bernd Souvignier).

### Opgaven (inleveren op 13 september)

1. Los  $\frac{dy}{dx}$  op met  $v(x, y) = (1, y)$ .

2. Bedenk een goede definitie van een dynamisch systeem met discrete tijd.

*Antwoord:* Een **dynamisch systeem met discrete tijd** bestaat uit een verzameling  $X$  (de faseruimte) en een afbeelding  $\varphi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$  met de drie eigenschappen uit Definitie 0.1.

3. Geef nog een aantal oplossingen van  $\dot{x} = x^{2/3}$  met beginwaarde  $x(0) = 0$ .

4. Leid  $\frac{dN}{dt}$  af onder de aanname dat  $\frac{dN}{dt}$  voor iedere beginwaarde  $(x_0, y_0)$  een unieke oplossing heeft. De  $x$  is Definitie 1.1 moet je dan lezen als  $(x, y)$  en  $\varphi_t(x, y)$  staat voor het punt  $(x(t), y(t))$  t.o.v. de beginwaarde  $(x_0, y_0) = (x, y)$ . Met andere woorden, als de oplossing  $x \mapsto (x(t), y(t))$  de beginwaarde  $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$  heeft, dan is  $(x(t), y(t)) \equiv \varphi_t(x_0, y_0)$ .

*Antwoord:* Dit werkt voor iedere dimensie  $n$ ; we schrijven  $x \in \mathbb{R}^n$  i.p.v.  $(x, y)$ . Dan luidt  $\frac{dN}{dt}$   $\dot{x} = v(x)$  ofwel  $\dot{x}(t) = v(x(t))$ . Dit kunnen we ook schrijven als

$$\dot{\varphi}_t(x_0) = v(\varphi_t(x_0)). \quad (5)$$

doot

Definieer nu de functies  $f(t) := \varphi_t(\varphi_s(x))$  en  $g(t) = \varphi_{t+s}(x)$ . Uit (5) met  $x_0 = \varphi_s(x)$  volgt  $\dot{f}(t) = v(f(t))$ . Uit (5) met  $x_0 = x$  volgt  $\dot{g}(t) = v(g(t))$ . Bovendien geldt  $f(0) = g(0) = \varphi_s(x)$ . De functies  $f$  en  $g$  voldoen dus aan dezelfde eerste-order DV met dezelfde beginconditie. Als we aannemen dat  $v$  voldoende braaf is dat de oplossingen gegeven de beginvoorwaarden uniek zijn, moet dus gelden  $f(t) = g(t)$  voor alle  $t$ . Dit is precies  $\frac{dN}{dt}$ .

5. Uit *Differential Equations*:

- (a) Nos. 1 en 2 van **Exercises 1.1**;
- (b) Nos. (a) en (d) van **Exercises 1.4**;
- (c) No. 3(c) van **Exercises 1.5**.

### Maple samenvatting

Voor deze eerste week geven we een samenvatting van de belangrijkste Maple commando's. Voor volgende weken is het handig als je dat zelf doet. We geven steeds minder details naarmate de lijst vordert; je weet na korte tijd ook zelf dat je bijv. in het derde geval de functies  $\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)$  eerst moet definiëren en waar je de **options** kunt vinden in het Help menu.

- Plot expliciet geparametriseerde kromme  $t \mapsto (f(t), g(t))$  in  $\mathbb{R}^2$  met  $t \in [r, s]$ :

1. Definieer de functies  $f$  en  $g$  d.m.v.

```
f:=t->f(t); g:=t->g(t)
```

met bijv.  $f(t)=t$  etc.;

2. `plot([f(t), g(t), t=r..s],options);`

Interessante opties: `color=blue` (zie `plot,colornames` in Help menu voor een lijst van kleuren), `scaling=constrained` (geeft zelfde schaal op  $x$ -as en  $y$ -as), `style=point` (plot geen curve maar losse punten), `numpoints=N` (geeft aantal punten waaruit de curve is geïnterpoleerd). Zie `plot,options` voor een volledige lijst opties.

- Plot impliciet gedefinieerde kromme  $F(x, y) = 0$  in  $\mathbb{R}^2$  met  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$ :

1. Laad de benodigde subroutine met `with(plots,implicitplot);`

2. Definieer  $F$  met

```
F:=(x,y)->F(x,y);
```

met concrete uitdrukking voor  $F$ , bijv.  $F(x, y)=x+y$ .

3. Plot nu met

```
implicitplot(F(x,y)=0, x=a..b, y=c..d,options).
```

- Plot expliciet geparametriseerde kromme  $t \mapsto (f(t), g(t), h(t))$  in  $\mathbb{R}^3$  met  $t \in [r, s]$ :

```
with(plots,spacecurve);
```

```
spacecurve([f(t), g(t), h(t)], t=a..b, options).
```

- Plot vector-veld  $(X, Y)$  in  $\mathbb{R}^2$ . Definieer eerst het vector-veld met

```
X:=(x,y)-> X(x,y); Y:=(x,y)-> Y(x,y);
```

Dan twee mogelijkheden:

```
with(plots);
```

```
fieldplot([X,Y], x = -1 ..1, y = 1 ..1,options);
```

of

```
with(DEtools); with(plots);
```

```
sys := {(D(x))(t) = X(x(t),y(t)), (D(y))(t) = (x(t),y(t))};
```

```
DEplot(sys, [x(t), y(t)], t = 0..1, x = -1 ..1, y = 1 ..1,size = magnitude,options);
```

Plot richting-veld : laat optie `size = magnitude` weg. De lengte van de pijlen is op alle mogelijke manieren te reguleren, zie Help `[plots,fieldplots]`.

- Plot oplossing van GDV  $\dot{x} = X, \dot{y} = Y$  in  $\mathbb{R}^2$ : eerste drie als boven, dan lijst van beginvoorwaarden invoeren met

```
init := [x(0) = 0, y(0) = 0], [x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = -1, y(0) = -2];
```

of

```
init:=[0,0,0], [0,1,2], [0,-1,-2];
```

en dan

```
DEplot(sys, [x(t), y(t)], t=t_0..t_1, x=- 1..1, y = 1..1, [init], arrows = none,options);
```

Typische beginwaarde is  $t_0 = 0$  maar mag ook negatief zijn.

- Oplossingen met vector-veld erbij: optie `arrows = none` weglaten. Interessante opties: `stepsize = 0.01` (default is  $h = (t_1 - t_0)/48$ ), `se = 1` (default is 3 en kan ieder geheel getal zijn), `linecolor = magenta`.

- Groot aantal begindata van de vorm  $\{[k, l] \mid k = -4..7, l = 1..10\}$ :

```
init:=seq(seq([k,l], k=-4..7), l=1..10);
```

en ook mogen daarbij uitdrukkingen als

```
init:=seq(seq([k*0.2,-3*l], k=-4..7), l=1..10);
```

- Samenvoegen van meerdere plaatjes in 1 plaatje: geef ieder plaatje een naam, bijv. `p1:=DEplot(...)`, enz. Dan `display(p1,p2,p3,p4,...)`; Handig om ieder plaatje een andere `linecolor` te geven.
- Al deze zaken in drie dimensies: `DEplot3d`, `display3d`, `implicitplot3d`, `fieldplot3d` enz.
- Voor 2- en 3-dimensionale projecties van plots in  $\mathbb{R}^n$  voor  $n > 3$  zie `deguide1c.mws`.

## Maple tips

Wie al zelf is gaan experimenteren met de Maple sheets uit het boek zal het zijn opgevallen dat niet alles werkt. Dat komt door incompatibiliteiten tussen verschillende versies van Maple. Zo is het rode boek geschreven op Maple 6, zijn de bijgeleverde worksheets voor Maple 10, en loopt op de campus Maple 11.

Het eerste commando dat je tegenkomt dat niet werkt staat in `spcurves.mws`, en luidt

```
with(plots,implicitplot3d);with(plots, display3d);
```

Splits het commando eerst op. Kennelijk werkt `with(plots,implicitplot3d)`; wel. Ga nu eens naar het Help menu van Maple. Daar komt `display3d` helemaal niet voor! Het gaat blijkbaar om een verouderd commando. Inderdaad werkt `display3d({p1,p2})`; ook niet. Probeer eens gewoon `display` en ja hoor, de combinatie

```
p1:=implicitplot3d(x^2+y^2-1=0,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2):
p2:=implicitplot3d(y^2+z^2-1=0,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2):
display({p1,p2});
```

werkt en produceert het gewenste plaatje.

Het tweede commando dat je tegenkomt dat niet werkt staat in `deguide1a.mws`, en luidt

```
DEplot([sys],[x,y],t=0..0.5,{init},x=-0.4..0.4,y=-0.4..0.4);
```

Martin Krupa, een expert in Maple, zag uit de foutmelding al wat er verbeterd moest worden: i.p.v.

```
sys:=D(x)(t)=X1(x,y),D(y)(t)=X2(x,y):
```

eerder in de file gebruikt hij (zie de gecorrigeerde file `mkdeguide1a.mws`)

```
sys:=diff(x(t),t)=X1(x(t),y(t)),diff(y(t),t)=X2(x(t),y(t)):
```

De verbetering ligt niet in `diff(x(t),t)` i.p.v. `D(x)(t)`; beide zijn equivalent. Het punt is dat `X1(x,y)` is vervangen door `X1(x(t),y(t))`, enz.

Hoe zou je daar zelf achter kunnen komen? De docent, bepaald géén expert in Maple, is maar eens in het Help menu gaan kijken toen hij op deze moeilijkheid stuitte. Typ in `DEplot` en ga naar `deplot`, `examples` (het lezen van gebruiksaanwijzingen is voorbehouden aan mensen die tijd over hebben). Wat staat daar? “Autonomous systems are automatically determined for plotting phase portraits. For instance,

```
DE3 := {diff(y(x), x) = y(x)-z(x), diff(z(x), x)=z(x)-2*y(x)};
DEplot( DE3 , [y(x), z(x)], x=0..3, y=0..2, z=-4..4, arrows=large );
```

Dat ziet er goed uit! Kennelijk kun je ook  $\text{diff}(x(t), t)$  i.p.v.  $D(x)(t)$  schrijven, maar kijk meteen of dat voorbeeld ook lukt met het laatste. En ja hoor, dat is dus niet het punt. Wel valt op dat in de eerste regel  $y(x)-z(x)$  staat en niet  $y-z$ , en in de tweede  $[y(x), z(x)]$  en niet  $[y, z]$ . Kennelijk moet je in Maple 11 de afhankelijke variabele expliciet vermelden. Dit leidt dan tot de verbetering van Martin Krupa, en als je het voorbeeld uit het Help menu helemaal wilt nabootsen moet je ook

```
DEplot([sys], [x(t), y(t)], t=0..0.5, {init}, x=-0.4..0.4, y=-0.4..0.4);
```

schrijven. Kennelijk is dat laatste niet nodig, maar het schaadt evenmin. Als je nog doorleest in `deplot, examples` vind je het voorbeeld

```
DE4 := { diff(y(x), x) = y(x)-z(x)*x, diff(z(x), x) = z(x)-2*y(x) };
DEplot( DE4, [y(x), z(x)], x=0..3, y=0..2, z=-4..4, [[y(0) = 1, z(0) = 1]],
arrows=large);
```

kennelijk kun je de begincondities ook op een andere manier invoeren dan in het boek: in plaats van

```
init:=[0,0,.1],[0,0,.2],[0,0,.25];
```

suggereert het voorbeeld in `deplot, examples` dat je ook

```
init := [x(0) = 0, y(0) = .1], [x(0) = 0, y(0) = .2], [x(0) = 0, y(0) = .25]
```

mag schrijven. En dat klopt. Het maakt wel uit hoe je deze begincondities aanroept in het argument van het commando `DEplot`: met `{init}` krijg je een ongeordende lijst en met `[init]` een geordende. Dat laatste is handig als je verschillende integraalkrommen van het vector-veld verschillend wil (laten) inkleuren m.b.v. de optie `linecolor`. Dit staat uitgelegd onder CDFigure 1.18 in `deguide1a.mws`.

Overigens kun je jezelf typewerk besparen door i.p.v. een uitdrukking als

```
X1:=(x,y)->sinh(2*p*y/a)/M(x,y);X2:=(x,y)->-sin(2*p*x/a)/M(x,y);
```

te typen

```
X1:=sinh(2*p*y(t)/a)/M(x(t),y(t));X2:=-sin(2*p*x(t)/a)/M(x(t),y(t));
```

en dan eenvoudig

```
sys:=D(x)(t)=X1,D(y)(t)=X2:
```

Dit soort debugging kan veel tijd kosten, maar je leert er Maple juist goed door kennen en dergelijke tijd is allerminst verloren.

## Week 2 (10 en 13 september 2007)

In het hoorcollege van week 2 op 10 september behandelen we Chapter 2 uit *Differential Equations*, zonder §2.5.

### Vorbereiding op het werkcollege van 13 september

1. Lees §2.1 t/m 2.4 Chapter 2 van *Differential Equations* geheel door en kom vragen/mail wat je niet begrijpt.
2. Lees evt. de Maple tips van Week 1. Probeer `Chapter2kaal.mw` zelf draaiende te krijgen.
3. Loop door de worksheets `gradvecfields.mws`, `fixedpts.mws`, `limitcycles.mws`.

### Opgaven (inleveren op 20 september)

1. No. 3 van van **Exercises 2.1** (zie ook `Chapter2kaal.mw`);
2. Produceer in één plaatje zowel de level curves als het vector-veld van **Example 2.3** met  $a = b = 1$ .
3. No. 2 van **Exercises 2.3** (m.b.v. `fixedpts.mws`).
4. No. 2 van **Exercises 2.4** (m.b.v. `limitcycles.mws`).

## Week 3 (17 en 20 september 2007)

In het hoorcollege van week 3 op 17 september vatten we §§3.1–3.3 uit *Differential Equations* samen. Dit materiaal is erg interessant en heeft implicaties voor de vraag of de natuur deterministisch is.

Om te voorkomen dat je door de bomen het bos niet meer ziet volgen hier de stappen in het bewijs van de fundamentele stelling **Theorem 3.1** op p. 82. Het bewijs berust in feite op de aanname (3.8) en niet op de aanname in de formulering van de stelling (waarin wordt geëist dat het vector-veld  $X$   $C^1$  is). Een deel van het bewijs in Betounes leidt de Lipschitz voorwaarde (3.8) af uit de eis dat  $X$   $C^1$  is: dit zijn de stappen vanaf (3.5) to de helft van p. 84.

Wij formuleren de stelling dus liever als volgt:

als  $X$  lokaal Lipschitz is in de zin dat ieder punt een omgeving heeft waar de afschatting (3.8) geldt, dan heeft de DV  $\dot{x}(t) = X(t, v(x(t)))$  een unieke oplossing met beginwaarde  $x(t_0) = c$ , gedefinieerd op een open interval  $I \subset \mathbb{R}$  dat (uiteraard)  $t_0$  bevat.

Het interval  $I$  is niet uniek, maar als hetzelfde geldt voor  $J$ , dan vallen de oplossingen  $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $x_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  samen op  $I \cap J$  (zie **Corollary 3.1** op p. 89). Uit **Theorem 3.4** op p. 92 blijkt dan nog dat er een maximaal interval  $I_{(t_0, c)}$  bestaat waarop de oplossing is gedefinieerd; voor alle  $I$  waarop  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ook een oplossing is, geldt dan  $I \subset I_{(t_0, c)}$  en  $x$  is de beperking van de unieke maximale oplossing tot  $I$ . Vaak is  $I_{(t_0, c)} = \mathbb{R}$ , maar dat hoeft niet, zoals uit ons voorbeeld  $v(x, y) = (y, x^3)$  met beginwaarde  $(x_0, y_0 \neq 0)$  uit Week 1 blijkt. Zie ook Opgave 2 van deze week!

De opzet van het bewijs van **Theorem 3.1** is als volgt.

- Schrijf het beginwaardeprobleem  $\dot{x}(t) = X(t, v(x(t)))$  met  $x(t_0) = c$  om tot de integraalvergelijking (3.2) oftewel  $x(t) = c + \int_{t_0}^t ds X(s, x(s))$ . Deze twee zijn geheel equivalent.
- Voor een nog te bepalen interval  $I$ , voer de vector-ruimte  $C(I, \mathbb{R}^n)$  van krommen in  $\mathbb{R}^n$  in. Als  $I$  compact is, is de norm  $\|x\|_\infty := \sup_{t \in I} \|x(t)\|_1$  op  $C(I, \mathbb{R}^n)$  eindig,<sup>1</sup> waarbij  $\|y\|_1 := \sum_{k=1}^n |y_k|$  een wat ongebruikelijke norm op  $\mathbb{R}^n$  is.<sup>2</sup>
- Definieer de operator  $T : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$  door (3.3), oftewel  $T(x) : t \mapsto c + \int_{t_0}^t ds X(s, x(s))$  en stel vast dat de integraalvergelijking (3.2) niets anders is dan  $T(x) = x$ . Met andere woorden, een curve  $x$  is een dekpunt (*fixed point*) van  $T$  desda  $x$  een oplossing is van het beginwaardeprobleem. Omdat  $T$  niet lineair is, is het wiskundig beter om  $C(I, \mathbb{R}^n)$  niet te zien als genormeerde ruimte, maar als metrische ruimte, met metriek  $d(x, y) := \|x - y\|_\infty$ . Lineariteit speelt namelijk geen rol in de theorie van metrische ruimten, terwijl deze eigenschap (die  $T$  dus niet heeft) bij genormeerde ruimten voorop staat.
- Nu herinneren wij ons het *Contraction mapping principle* uit Analyse 2, zie Zorich Vol. II, §9.7: als  $T$  zou voldoen aan  $d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y)$  voor vaste  $0 < q < 1$  en alle  $x, y \in C(I, \mathbb{R}^n)$ , dan zou de stelling direct zijn bewezen (want in dat geval heeft  $T$  een uniek dekpunt). Hierbij valt op te merken dat aan een cruciale voorwaarde in het Contraction mapping principle is voldaan, nl. dat  $C(I, \mathbb{R}^n)$  volledig is als metrische ruimte (i.e. iedere Cauchy-rij convergeert).

Helaas pindakaas:  $T$  is geen contractie. Gelukkig kunnen we  $I$  en een deelruimte  $D \subset \mathbb{R}^n$  zo kiezen dat dit scenario wel opgaat voor  $T : C(I, D) \rightarrow C(I, D)$ .

- Dit gaat als volgt. Kies  $a$  en  $r$  zoals uitgelegd in het boek: deze keuzes worden precies zo gemaakt om het bovenstaande scenario te realiseren. Neem vervolgens  $I = [t_0 - a, t_0 + a]$  en  $D = \overline{B(c, r)}$ . Dit geeft de metrische ruimte

$$M := C([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B(c, r)}),$$

<sup>1</sup>Dit volgt uit de stelling van Weierstrass uit Analyse 1: een continue functie op een compacte deelverzameling van  $\mathbb{R}$  is begrensd.

<sup>2</sup>Deze norm is echter equivalent met de gebruikelijke Euclidische norm  $\|y\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$  in de zin dat convergentie van rijen in de ene norm hetzelfde is als in de andere.

die de norm  $\|\cdot\|_\infty$  en de bijbehorende metriek draagt, en net als  $C(I, \mathbb{R}^n)$  volledig is. Uit een reeks afschattingen (zie onderaan p. 84) blijkt dat  $T$  de ruimte  $M$  in zichzelf afbeeldt, zodat we kunnen spreken van een operator  $T : M \rightarrow M$ , en uit een andere serie afschattingen (zie p. 85) volgt dat  $T$  een contractie is op  $M$ .

6. Conclusie (uit het Contraction mapping principle):  $T$  heeft een unieke dekpunt  $x = \alpha$  in  $M$ , en dit dekpunt is de unieke oplossing van het beginwaardeprobleem voor ieder open tijdsinterval  $I \subset [t_0 - a, t_0 + a]$ .
7. Het Contraction mapping principle geeft ook aan hoe je het dekpunt  $\alpha$  vindt: voor een willekeurig punt  $\beta \in M$  geldt  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\beta)$ . Het is handig om voor  $\beta$  de constante curve  $\beta(t) = c$  te kiezen. De krommen  $T^n(\beta)$  vormen dan voor grote  $n$  een steeds betere benadering van de oplossing  $\alpha$ . Deze  $T^n(\beta)$  heten *Picard-iteraties*.<sup>3</sup>

### Vorbereiding op het werkcollege van 20 september

Lees de leidraad en §3.1 t/m 3.3 in Chapter 3 van *Differential Equations* geheel door en kom vragen/mail wat je niet begrijpt.

### Opgaven (inleveren op 27 september)

1. No. 1 van **Exercises 3.2** op p. 90, zonder het deel van **Theorem 3.2** dat met “Furthermore, if...” begint.
2. **Theorem 3.8** op p. 107 geeft een voldoende voorwaarde dat  $I_{(t_0, c)} = \mathbb{R}$  voor willekeurige beginvoorwaarden  $(t_0, c)$ . Een iets eenvoudigere stelling zegt dat  $I_{(t_0, c)} = \mathbb{R}$  als  $X$  nul is buiten een compacte convexe verzameling in  $\mathbb{R}^n$ . Bewijs deze uitspraak door een aanpassing van het bewijs van **Theorem 3.8** (en geef het deel van het bewijs van die stelling dat je nodig hebt in eigen woorden weer).

---

<sup>3</sup>Numeriek blijken dit geen geweldige benaderingen te zijn voor relatief kleine  $n$ , zodat Maple er geen gebruik van maakt.

## Week 4 (24 en 27 september 2007)

In het hoorcollege van week 4 op 24 september vatten we het hele Chapter 4 uit *Differential Equations* samen. Dit materiaal stamt uit de 18e eeuw en is nog steeds aantrekkelijk vanwege het expliciete karakter ervan: je kunt leuk spelen met oplossingen en de tijdsintervallen waarin deze gedefinieerd zijn. Hierbij is Maple uiteraard erg handig. Maple kent overigens de expliciete oplosmethoden uit dit hoofdstuk, maar komt vooral te pas bij het plotten. Daarbij is het nuttig om te weten dat Maple automatisch de oplossing  $t \mapsto x(t)$  van  $\dot{x} = X$  plot in  $\mathbb{R}^2$  (en dus niet in  $\mathbb{R}$ , wat je voor een fase-diagram van een systeem in  $d = 1$  zou verwachten maar wat uiteraard zinloos is). In feite vervangt Maple  $\dot{x} = X(t, x)$  in  $\mathbb{R}$  door  $\dot{x} = 1$  en  $\dot{y} = X(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$ . Als Maple dus (ongevraagd) ook het vector-veld plot bij het commando `DEplot`, dan plot het  $\tilde{X} = (1, X)$ .

De theorie is eenvoudig en zal in het hoorcollege volgens het boek aan de orde komen. Het uitwerken van concrete voorbeelden daarentegen kost enige tijd en laten we aan de lezer over - het boek besteedt hier veel aandacht aan.

Op p. 138 staat een typefout: regel 4 van boven, in  $F(t, x) \equiv \sin(x) - t^3 + t^2$ . Dit moet zijn  $F(t, x) \equiv \sin(x) - t + t^2$ .

Op p. 152 worden met  $\int a(t)dt$  en  $\int \mu(t)b(t)dt$  in (4.26) en (4.27) willekeurige primitieven van resp.  $a$  en  $\mu b$  bedoeld, als functies van  $t$  (dit is zeer slordige notatie). Zie opgave 4.

### Opgaven (inleveren op 4 oktober)

1. No. 4.1.2(f) en daarvan alleen de vragen (i) en (ii) daarboven.
2. No. 4.2.2(b).
3. No. 4.4.1.
4. Zie opmerking boven over p. 152. Ga na wat de invloed op  $F$  is van het optellen van constanten bij de genoemde primitieven en interpreteer je resultaat. (Het doel van deze opgave is dat je inziet dat deze constanten "niet uitmaken", maar wat betekent dat precies?)

## Week 5 (1 en 4 oktober 2007)

In het hoorcollege van week 5 op 1 oktober vatten we het hele Chapter 5 uit *Differential Equations* samen, m.u.v. de fysische voorbeelden rond veren en oscillaties (die kunnen nl. als tentamenopdracht worden gekozen). Een goed overzicht van het materiaal van Chapter 5 staat ook als Chapter 3 in Vladimir I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (Springer, 2006); dit boek staat sinds kort integraal op Blackboard.

### Opgaven (inleveren op 11 oktober)

Kies uit 1 en 2 (of doe ze allebei om een wit voetje te halen). Daarna zijn 3 en 4 beide verplicht.

1. De fundamentele matrix  $G(t)$  voor de DE  $\dot{x} = A(t)x$  heeft de vorm

$$G(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) \cdots A(t_n). \quad (6) \quad \boxed{\text{QMt}}$$

- (a) Ga na dat dit zo is.
- (b) Laat zien dat de fundamentele matrix voor  $n = 1$ , i.e.  $G(t) = \exp\left(\int_0^t ds A(s)\right)$  en die voor  $A(t)$  constant (in willekeurige  $n$ ) i.e.  $G(t) = \exp(tA)$  speciale gevallen zijn van (6).
2. (a) Bereken (met de hand)

$$\exp t \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- (b) Generaliseer dit naar willekeurige dimensie; i.e. exponentieer  $t$  keer de matrix (5.66) op p. 219 (het antwoord staat in het bovengenoemde boek van Arnold, dus geef vooral de berekening duidelijk weer).
3. Werk `fmatrix.mws` door en doe CDEExercise 5.1 no. (1). Dit worksheet is uitermate belangrijk omdat je daar het commando `dsolve` leert kennen.
4. Werk `matexpo.mws` door en doe CDEExercise 5.2 no. (a). Dit worksheet moet gedebugged worden; zie daartoe de Maple tips uit Week 1.

## Week 6 (8 en 11 oktober 2007)

In het hoorcollege van week 6 op 8 oktober vatten we in vogelvlucht Chapter 6 en §§7.1-7.3 van Chapter 7 samen. De details zijn tentamenopdrachten (zie onder voor een specificatie).

Het thema van beide hoofdstukken is het gedrag van oplossingen van een autonome DE  $\dot{x} = X(x)$  met beginwaarde  $x(0) = c$  rond een vast punt  $x_0 \equiv c$ . Er zijn (uiteraard) twee gevallen:

1.  $X(c) = 0$ .
2.  $X(c) \neq 0$ ;

In beide gevallen kan het vector-veld  $X$ , en daarmee de oplossing van de DE, door een coördinatentransformatie  $y = f(x)$  *lokaal*, dus in een open omgeving van  $c$  met mogelijk zeer beperkte omvang, in een eenvoudige vorm  $\tilde{X}$  worden gebracht. Deze vorm is, met in beide gevallen  $f(c) = 0$ :

1.  $\tilde{X}(y) = Ay$  met  $A \cong X'(c)$ ; **Linearization Theorem 6.3**, p. 267.
2.  $\tilde{X}(y) = e_1 \equiv (1, 0, \dots, 0)$ ; **Flow Box Theorem 6.4**, p. 270.

Hier betekent  $A \cong X'(c)$  dat  $A$  geconjugueerd is aan  $X'(c)$ , i.e. er is een inverteerbare matrix  $B$  zodat  $A = BX'(c)B^{-1}$ . Je herinnert je uiteraard dat  $X'(c)$  zelf een  $n \times n$  matrix is.

In het tweede geval is de lokale oplossing in “slimme” coördinaten dus simpleweg  $y(t) = c + te_1$ , een systeem van rechte lijnen parallel aan de  $y_1$ -as. In het eerste geval zijn we terug bij Chapter 5 (met alle complicaties van dien, maar met een complete classificatie van alle mogelijkheden). Een probleem is dat je de slimme coördinatentransformatie niet altijd expliciet kunt vinden. Maar ook dan weet je dat rond het punt  $c$  de oplossingen van  $\dot{y} = \tilde{X}(y)$  kwalitatief lijken op die van  $\dot{x} = X(x)$ , in een zin die precies wordt gemaakt in **Theorem 6.1 (Differentiable Equivalence)**:<sup>4</sup> De coördinatentransformatie  $f$  die  $X$  afbeeldt op  $\tilde{X}$  (zie beneden) beeldt tevens lokale oplossingen van  $\dot{x} = X(x)$  af op die van  $\dot{y} = \tilde{X}(y)$  (en dezelfde opmerking voor de inverse van deze coördinatentransformatie).

Bovendien zegt **Proposition 7.5 (Invariance of Stability)** op p. 290 dat de belangrijke kwalitatieve eigenschappen van de oplossingen behouden blijven:  $f$  beeldt fixed points af op fixed points en behoudt (in)stabiliteit van fixed points. Hier word (in)stabiliteit van fixed points (eindelijk) precies gemaakt in **Definition 7.1 (Stability of fixed points)** op p. 277. Een verfijning van stabiliteit is *asymptotische stabiliteit*, dat in **Definition 7.2 (Asymptotic Stability)** wordt gedefinieerd.

De vraag of een fixed point (asymptotisch) stabiel is,<sup>5</sup> kan gemakkelijk worden beantwoord in de slimme coördinaten waarin  $\tilde{X}(y) = Ay$ . Een voldoende voorwaarde voor stabiliteit van  $y_0 = 0$  is dat alle eigenwaarden van  $A$  een negatief reëel deel hebben; in dat geval geldt de afschatting  $\|\exp(tA)\| \leq K \exp(-mt)$  voor zekere  $K > 0$  en  $m > 0$ . Uit de expliciete oplossing  $y(t) = \exp(tA)y(0)$  volgt dan eenvoudig dat  $\|y(t) - y(0)\| \rightarrow 0$  voor  $t \rightarrow \infty$ . Zie **Theorem 7.1 (Linear Stability)** op p. 286. Een speciaal geval hiervan is wanneer  $A$  diagonaliseerbaar is met alle eigenwaarden (noodzakelijk reëel) negatief; Analoog is een voldoende voorwaarde voor *instabiliteit* van  $y_0 = 0$  is dat alle eigenwaarden van  $A$  een *positief* reëel deel hebben; zie **Corollary 7.1 (Linear Instability)** op p. 288.

Als de eigenwaarden van  $A$  genoteerd worden als  $\lambda_k = a_k + ib_k$ , met  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , hebben we de gevallen  $a_k < 0$  en  $a_k > 0$  voor alle  $k$  dus afgedekt. In het geval  $a_k = 0$  voor alle  $k$  heet  $y = 0$  een *center*, omdat in  $n = 2$  de integraalkrommen cirkels of ellipsen rond de oorsprong vormen (de oorsprong is dan dus wel stabiel maar niet asymptotisch stabiel). Als  $n = 2$  en  $b_1 = b_2 = 0$  met  $a_1 > 0$  en  $a_2 < 0$  (of andersom) is de oorsprong instabiel, zoals je snel uit een plaatje ziet (hyperbolisch fixed point).

Het mooie nu is dat de al dan niet asymptotische stabiliteit van  $c$  van het oorspronkelijke systeem  $\dot{x} = X(x)$  op precies dezelfde manier uit de matrix  $X'(c)$  kan worden bepaald. Dit

<sup>4</sup>Er is een subtiel verschil tussen topologische en differentieerbare equivalentie van vector-velden en oplossingen, maar daar gaan we niet op in. We gaan er in deze cursus vanuit dat de “slimme” coördinatentransformaties differentieerbaar zijn.

<sup>5</sup>Deze theorie gaat terug op een artikel van A. Lyapunov (1857–1918) uit 1892. De

volgt uit **Proposition 7.5 (Invariance of Stability)** op p. 290 en **Corollary 7.2 (Nonlinear Stability)** op p. 291 en is een gevolg van twee feiten:

- De eigenschap van (asymptotische) (in)stabiliteit is lokaal, i.e. of er aan voldaan is kan worden gezien aan het gedrag van het systeem in willekeurig kleine omgevingen van  $c$ .
- De eigenwaarden van  $A$  en  $X'(c)$  zijn hetzelfde omdat  $A = BX'(c)B^{-1}$ .

Al deze resultaten volgen uit iets dat slechts zeer verdekt in Appendix B van het boek staat. De algemene formule voor het beeld  $f_*(X)$  van een vector-veld  $X$  onder een differentieerbare coördinatentransformatie  $y = f(x)$  staat in (6.23) op p. 250. Het punt is nu dat wanneer  $X(c) = 0$ , de inverteerbare functie  $f : U \rightarrow \bar{U}$  (waarbij  $U$  een omgeving is van  $c$  en  $\bar{U}$  een omgeving van  $0$ ) zo gekozen kunnen worden dat het rechterlid lineair is in  $y$  (en ook geen constante term heeft). Een Taylor-expansie van het rechterlid rond  $y = 0$  geeft dan

$$\tilde{X}(y) := f_*(X)(y) = f'(c)X'(c)(f'(c))^{-1}y \equiv Ay. \quad (7)$$

De eerder genoemde matrix  $B$  zodat  $A = BX'(c)B^{-1}$  is dus gelijk aan  $B = f'(c)$ .

### Opgaven (inleveren op 18 oktober)

1. **Exercises 6.1** no. 3 (p. 245).
2. **Exercises 6.2** no. 10(a) zonder allerlaatste zin (p. 265).
3. **Exercises 6.3** no. 2(b), p. 274.

## Tentamenopgaven over week 1–6

Kies één opgave uit de volgende lijst. Mail Mireille je keus. Zij mailt terug of de opgave al geclaimed was. Als iemand je voor was moet je dus een andere kiezen. Kortom: wie het eerst komt, wie het eerst maalt!

Het is de bedoeling dat je tijdens de tentamenweken (dus op 29/10, 1/11, 5/11 of 8/11) een voordracht over je onderwerp houdt van ongeveer 25-30 minuten (5 minuten voor vragen) en tevens een verslagje mailt (als je flitsend met Power Point of Keynote voordraagt kan dat verslag bestaan uit de slides). Ook hier geldt: geef een voorkeursdatum door aan Mireille en wie het eerst komt, wie het eerst maalt. We houden drie voordrachten per college.

1. Voor twee personen: Behandel alles in het boek dat met Predator-Prey systemen te maken heeft, zoek evt. ook verder.
2. Voor twee personen: Opgave 7 van **Exercises 6.1** op p. 247: het beroemde Lorenz systeem. Raadpleeg ook hier evt. internet en bibliotheek.
3. Voor twee personen: Discrete dynamische systemen, te beginnen met nos. 2 en 3 van **Exercises 3.5** op pp. 109–111 (en daarmee `introDDS.mws`) en dan `stableDDS.mws` en `periodicpts.mws`.
4. Voor twee personen: Coupled Masses, te beginnen met **Example 5.1** op p. 158, **Example 5.7** op p. 201 en Opgaven 11 en 12 van **Exercises 5.4** op p. 208. Zie vooral `oscillate.mws`.
5. Bewijs van **Linearization Theorem 6.3**, p. 267, in Appendix B.
6. Het begrip Lyapunov functie, §7.4.
7. Chapter 1 uit Arnold, waarbij je zo veel mogelijk voorbeelden op Maple zet en laat zien.
8. Chapter 7 uit Arnold (geheel theoretisch).



## Week 7: 15 en 18 oktober

We beginnen in week 7 met *partiële differentiaalvergelijkingen* en daarmee met het zwarte boek van Betounes. Het volgende materiaal vervang Chapters 1 en 2 van het zwarte boek, ofschoon het zin heeft deze hoofdstukken door te bladeren om eventueel weggezaakt materiaal uit Calculus in herinnering te brengen.

In het voorgaande hebben we steeds systemen van  $n$  eerste-orde DV bekeken,  $\dot{x} = v(x, t)$  met  $x \in \mathbb{R}^n$ . De oplossing met gegeven beginwaarde  $x(0) = c$  was een curve  $t \mapsto x(t)$  in  $\mathbb{R}^n$ . We kijken in eerste instantie slechts naar één enkele PDV, waarin de gezochte functie  $u$  een functie is van  $x \in \mathbb{R}^n$  én eventueel de tijd  $t$ , dus  $(x, t) \mapsto u(x, t)$ . Een PDV heeft de vorm  $F(x, u, u_t, u_x, \dots) = 0$ , waarbij  $F$  dus een functie is van  $x, u, u_t \equiv \partial u / \partial t, u_x \equiv (u_{x^1}, \dots, u_{x^n}) \equiv (\partial u / \partial x^1, \dots, \partial u / \partial x^n)$  en eventuele hogere afgeleiden van  $u$ . De hoogste orde afgeleide van  $u$  die in  $F$  voorkomt heet de *orde* van de PDV. In dit college beperken we ons tot PDV van eerste en tweede orde, zowel omdat dit college slechts een inleiding is als omdat de meeste toepassingen van die vorm zijn.

Anders dan bij DV is het bij PDV i.h.a. niet nuttig om een hogere-orde PDV terug te brengen tot een systeem van eerste-orde PDV door het invoeren van nieuwe variabelen.

### Eerste-orde PDV

De theorie van eerste orde PDV kan worden teruggebracht tot de theorie van DV met behulp van de zogenaamde theorie van karakteristieken en de Hamilton-Jacobi theorie uit de 19e eeuw. We behandelen nu het eenvoudigste geval van deze theorie, waarin  $F$  uitsluitend van  $x$  en  $u_x$  afhangt en dan ook nog eens lineair is in  $u$ . Neem bijvoorbeeld de PDV

$$\frac{\partial}{\partial x^1} u(x^1, x^2) = 0. \quad (8) \quad \boxed{\text{aller}}$$

De oplossing is

$$u(x^1, x^2) = f(x^2), \quad (9) \quad \boxed{\text{opl1}}$$

waar  $f$  een willekeurige functie is. Deze PDV heeft de algemene vorm

$$\sum_{k=1}^n v^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} u = 0, \quad (10) \quad \boxed{\text{pdv1}}$$

waarbij  $v$  een vector-veld in  $\mathbb{R}^n$  is. Bij <sup>aller</sup>(8) hebben we  $n = 2$  en  $v(x) = (1, 0)$  (dus onafhankelijk van  $x$  en  $t$ ). De integraalkrommen van  $v$ , i.e. de oplossingen van  $\dot{x} = v(x)$  zijn de horizontale lijnen  $x^2 = y = \text{constant}$ , ofwel  $x(t) \equiv (x^1(t), x^2(t)) = (x_0^1 + t, x_0^2)$ . We zien dat de oplossing de eigenschap heeft dat  $u$  constant is langs iedere integraalkromme van  $v$ . Dit is een algemeen feit:

**s11**

**Stelling 1** Een functie  $u$  is een oplossing van <sup>pdv1</sup>(10) desda als  $u$  constant is langs iedere integraalkromme  $t \mapsto x(t)$  van  $v$ .

Dit volgt onmiddellijk uit de kettingregel voor differentiatie en  $\dot{x} = v(x)$ :

$$\frac{d}{dt} u(x(t)) = \sum_k \dot{x}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} u = \sum_{k=1}^n v^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} u. \quad (11) \quad \boxed{\text{ketting}}$$

We hebben gezien dat het systeem van  $n$  eerste-orde DV  $\dot{x} = v(x, t)$  onder redelijke aannamen op  $v$  een unieke oplossing heeft met gegeven beginwaarde  $x(0) = c$ . Hoe zit dat met de eerste-orde PDV <sup>pdv1</sup>(10)?<sup>6</sup> We kijken nog eens naar <sup>aller</sup>(8) en <sup>opl1</sup>(9). We nemen nu de lijn

$$C = \{x^1 = 0\} \quad (12) \quad \boxed{\text{copp}}$$

en eisen dat de oplossing  $u$  van <sup>aller</sup>(8) een gegeven waarde  $u_0 = u|_C$  heeft op  $C$ . Dan volgt onmiddellijk dat  $f(x^2) = u_0(0, x^2)$  voor alle  $x^2$ . De oplossing is daarmee uniek, te weten  $u(x^1, x^2) = u_0(0, x^2)$ .

<sup>6</sup>Terminologie: het vinden van beginvoorwaarden voor een PDV of systeem van PDV (van willekeurige orde) zodat de oplossing daardoor uniek is bepaald heet het *Cauchy-probleem*.

In hogere dimensie gaat het net zo: als we <sup>aller</sup>(8) opleggen in  $\mathbb{R}^n$ , zodat  $u = u(x^1, \dots, x^n)$ , dan is de algemene oplossing  $u(x^1, \dots, x^n) = f(x^2, \dots, x^n)$ . De verzameling  $C$  gegeven door <sup>copp</sup>(12) is nu een oppervlak van dimensie  $n - 1$  in  $\mathbb{R}^n$ . De eis dat  $u = u_0$  op  $C$  legt  $f$  en daarmee  $u$  geheel vast als  $u(x^1, \dots, x^n) = u_0(0, x^2, \dots, x^n)$ .

De verzameling  $C$  in  $\mathbb{R}^n$  is een voorbeeld van een *Cauchy-oppervlak* voor de gegeven PDV <sup>aller</sup>(8). Idealiter heeft een Cauchy-oppervlak  $C \subset \mathbb{R}^n$  de functie dat het de oplossing van een PDV uniek vastlegt door de eis dat  $u$  op  $C$  een gegeven waarde  $u_0$  heeft. In het voorbeeld gebeurt dat ook, maar in het algemeen geldt slechts lokale uniciteit. Bovendien kan niet zomaar ieder oppervlak van dimensie  $n - 1$  worden gekozen.

Neem bijvoorbeeld, voor <sup>aller</sup>(8) in  $n = 2$ , de lijn  $C = \{x^2 = 0\}$  en schrijf  $u_0 = u|_C$  voor. Dat is dom! Er zijn twee mogelijkheden. Als  $u_0$  niet constant is, dan is er helemaal geen oplossing, want een oplossing moet constant zijn langs  $C$ . Als daarentegen  $u_0$  wel constant is, dan is er weliswaar een oplossing, maar die is nog steeds niet vastgelegd door  $u|_C$ : we weten nu slechts dat  $f(x^2 = 0) = u_0(x^1, 0)$ . Om dit soort situaties te vermijden eisen we dat  $v$  nergens raakt aan  $C$ .

Een subtieler verschijnsel (in  $n = 2$ ) is dat de lijn  $C$  een integraalkromme van  $v$  meer dan een keer snijdt. Ook in dat geval kunnen we  $u_0 = u|_C$  niet vrij kiezen, omdat volgens Stelling <sup>si</sup>1 de functie  $u$  constant moet zijn langs de gegeven integraalkromme, terwijl de waarde van  $u_0$  op de snijpunten niet hetzelfde hoeft te zijn. Om dit probleem te vermijden geeft de volgende stelling slechts een lokale uitspraak.

cauchy

**Stelling 2** *Stel dat  $C \subset \mathbb{R}^n$  een oppervlak van dimensie  $n - 1$  is en stel dat  $x_0 \in C$  een punt is waar  $v$  niet aan  $C$  raakt.<sup>7</sup> Dan heeft de PDV <sup>pdv1</sup>(10) met gegeven randwaarde  $u|_C = u_0$  een unieke oplossing in een omgeving van  $x_0$ .*

Het idee is heel simpel. Er is een omgeving  $\mathcal{O}$  van  $x_0$  in  $C$  waarin  $v$  niet aan  $C$  raakt. In deze omgeving doorsnijden de integraalkrommen van  $v$  het Cauchy-oppervlak  $C$  zonder dat er ook maar een klein segment van enige integraalkromme in  $\mathcal{O}$  ligt. Als we de waarde  $u_0$  van  $u$  voorschrijven op  $\mathcal{O}$ , kunnen we  $u$  uitbreiden tot een open gebied in  $\mathbb{R}^n$  door te eisen dat  $u$  op de hele integraalcurve  $(x(t))$  door  $y \in \mathcal{O}$  de waarde  $u(x(t)) := u_0(y)$  heeft. Volgens Stelling <sup>si</sup>1 geeft dit een oplossing van <sup>pdv1</sup>(10), die duidelijk uniek is vastgelegd door  $u_0$ .

Het technische bewijs van de stelling laten we hier weg (zie de boeken van Arnold).

## Tweede-orde PDV

Anders dan bij eerste-orde PDV is er in hogere orde een groot kwalitatief verschil tussen niet-lineaire en lineaire PDV. De drie belangrijkste *lineaire* tweede-orde PDV zijn, met de notatie  $\Delta \equiv \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2$ ,

1. *Warmtevergelijking*:  $u_t - \Delta u = 0$ ;
2. *Laplace-vergelijking*:  $\Delta u = 0$ ;
3. *Golfvergelijking*:  $u_{tt} - \Delta u = 0$ .

De laatste heet ook wel de vergelijking van d'Alembert. Met *lineair* bedoelen we dat, wanneer we de PDV abstract schrijven als  $Lu = 0$  (bijv.  $L = \partial/\partial t - \Delta$ ), geldt dat  $L(u + v) = Lu + Lv$  en  $L(\lambda u) = \lambda L(u)$ . In dat geval geldt uiteraard het *superpositieprincipe*: als  $Lu = 0$  en  $Lv = 0$ , dan  $L(\lambda u + v) = 0$ . De oplossingsruimte is dus lineair.

Met bronterm  $F$  in het rechterlid,<sup>8</sup> i.e.  $u_t - \Delta u = F$  enz., zijn de vergelijkingen niet meer lineair, maar ook in dat geval is de lineaire vergelijking belangrijk voor de oplossing: als  $Lu = F$

<sup>7</sup>De eis dat  $v(x_0)$  niet aan  $C$  raakt betekent dat het opspansel van  $v(x_0)$  en  $T_{x_0}C$  (i.e. de ruimte van alle raakvectoren aan  $C$  in  $x_0$ ) gelijk is aan  $\mathbb{R}^n$ . Een oppervlak  $C$  in  $\mathbb{R}^n$  van dimensie  $n - 1$  kan worden beschouwd als de oplossingsverzameling van de vergelijking  $F(x) = 0$ , waar  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  de eigenschap heeft dat  $F'(x) \neq 0$  voor alle  $x \in C$  (i.e.  $F(x) = 0$ ). Hier is  $F'(x) \equiv \nabla F(x)$  de  $n$ -vector met componenten  $(\partial F(x)/\partial x^1, \dots, \partial F(x)/\partial x^n)$ . De eis dat  $v$  in  $x_0$  niet raakt aan  $C$  luidt dan  $(v(x_0), \nabla F(x_0)) \neq 0$ , waarbij  $(\cdot, \cdot)$  het gebruikelijke inproduct is (de gradient  $\nabla F(x_0)$  staat namelijk loodrecht op  $C$ , en omdat  $C$  dimensie  $n - 1$  heeft zou  $(v(x_0), \nabla F(x_0)) = 0$  betekenen dat  $v(x_0)$  wel raakt aan  $C$ ).

<sup>8</sup>De Laplace-vergelijking met bron heet naar *Poisson*.

en  $Lv = 0$ , dan  $L(u + v) = F$ . Je kunt dus oplossingen van de lineaire vergelijking optellen bij oplossingen van de niet-lineaire vergelijking met bronterm.

Terminologie: er bestaat een classificatie van tweede-orde PDV in drie soorten:

1. *parabolisch*;
2. *elliptisch*;
3. *hyperbolisch*.

Deze nummering is consistent met de drie voorbeelden boven. Deze drie klassen gedragen zich heel verschillend van elkaar. Het boek en het college gaan in eerste instantie in op het parabolische geval, en dan concreet op de warmtevergelijking. De terminologie rond de randvoorwaarden geldt ook in de andere twee klassen PDV.

In de theorie van DV zagen we dat (onder redelijke aannamen)  $\dot{x} = v(x, t)$  (lokaal) een unieke oplossing heeft met beginwaarde  $x(0) = c$ . Het vinden van begincondities voor een PDV of stelsel van PDV zodat er (lokaal) een unieke oplossing bestaat heet, zoals al boven opgemerkt, het *Cauchy-probleem*. We hebben daar in het eerste-orde geval al iets over gezegd. Voor de warmtevergelijking

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = F(x, t) \quad (13) \quad \boxed{\text{wv}}$$

zijn er twee verschillende situaties:

- We poneren  $\overline{\text{I3}}$  voor alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- We eisen  $\overline{\text{I3}}$  voor alle  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , waarbij  $\Omega$  een open (en i.h.a. samenhangende) deelruimte van  $\mathbb{R}^n$  is.

In beide gevallen moet een beginvoorwaarde

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (14)$$

worden opgelegd. In het eerste geval  $\Omega = \mathbb{R}^n$  is dat ook voldoende: onder redelijke aannamen op  $F$  is er een unieke oplossing. In het tweede geval moeten en ook randvoorwaarden in  $x$  worden opgelegd, en wel door voor te schrijven wat  $u(x, t)$  op de rand  $\partial\Omega \equiv \overline{\Omega} \setminus \Omega$  doet. Dit kan op drie manieren, die ieder vaak voorkomen:

1. *Dirichlet randvoorwaarden*:  $u(x, t) = g(x, t)$  voor alle  $t > 0$  en  $x \in \partial\Omega$ ;
2. *Neumann randvoorwaarden*:  $\nabla_n u(x, t) = 0$  voor alle  $t > 0$  en  $x \in \partial\Omega$ , waar  $\nabla_n u(x, t) = \sum_{k=1}^n n_k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} u(x, t)$  met  $n$  de normaal op  $\partial\Omega$ ;<sup>9</sup>
3. *Robin randvoorwaarden*:  $\kappa(x) \nabla_n u(t, x) + h(x) u(t, x) = g(t, x)$  voor alle  $t > 0$  en  $x \in \partial\Omega$ .

Hier is fysisch gesproken  $\kappa$  de geleidingsconstante (tenminste wanneer deze niet van  $x$  afhangt) en  $h$  de warmtecoefficient. Zie verder §2.4 op p. 31 ff. Net als bij DV spelen fixed pints een rol: de rol van punten zdd  $x(t) = x$  voor alle  $t$  wordt in de theorie van PDV gespeeld door stationaire (i.e. tijdonafhankelijke oplossingen)  $u(x, t) = u(x)$ . Ook hier speelt stabiliteit en asymptotiek een rol: we zeggen dat een tijdonafhankelijke oplossing  $u_S$  van  $\overline{\text{I3}}$  asymptotisch stabiel is of aantrekkelijk als  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_S$  voor "naburige" of zelfs voor alle oplossingen (zoals in het voorbeeld op p. 32).

<sup>9</sup>Als de rand  $\Omega$  lokaal wordt geparаметriseerd door  $\omega = 0$  met  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e.  $x \in \partial\Omega$  desda  $\omega(x) = 0$ , dan geldt  $n(x) = \pm \nabla \omega(x)$ .

## Opgaven (inleveren op 25 oktober)

1. Een echte wiskundige zou beweren dat Stelling I<sup>s11</sup> alles zegt over (I10)<sup>pdv1</sup>. Maar een ingenieur of fysicus wil graag een concrete oplossing zien. Dat kan voor  $n = 2$  soms met de volgende methode; we schrijven  $(x, y)$  i.p.v.  $(x^1, x^2)$ , zodat (I10)<sup>pdv1</sup> luidt:

$$v_1(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + v_2(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Dit gaat als volgt.

1. Los op de GDV

$$y'(x) = \frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)}. \quad (16) \quad \boxed{\text{gdv1}}$$

Deze oplossing bevat een integratieconstante  $C$ , waarvan de waarde bepaalt op welke integraalcurve  $(x, y)$  ligt.

2. Schrijf de aldus gevonden relatie tussen  $y$  en  $x$  als  $h(x, y) = C$ .

3. De oplossing van (I10)<sup>pdv1</sup> is nu

$$u(x, y) = f(h(x, y)), \quad (17) \quad \boxed{\text{ufh}}$$

met  $f$  willekeurig.

Stel namelijk dat  $(x(t), y(t))$  een integraalkromme van  $v$  is. Dan is met de kettingregel

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_2(x(t), y(t))}{v_1(x(t), y(t))}.$$

Omgekeerd is de grafiek van de functie  $x \mapsto y(x)$ , waarbij  $y(x)$  voldoet aan (I16)<sup>gdv1</sup>, een integraalkromme van  $v$ . De conditie  $h(x, y) = C$  geldt dus desda  $y = y(x)$  en dat is zo desda het paar  $(x, y)$  een gegeven integraalkromme van  $v$  doorloopt. Als nu (I17)<sup>ufh</sup> geldt, is  $u$  constant (te weten gelijk aan  $f(C)$ ) op iedere integraalkromme. Volgens Stelling I<sup>s11</sup> is  $u$  dan een oplossing van de PDV (I10)<sup>pdv1</sup>.

- (a) Reken dit expliciet na.

Deze methode werkt uiteraard alleen als (I16)<sup>gdv1</sup> expliciet op te lossen is en vervolgens het algebraïsche probleem om  $h$  te bepalen eveneens te doen is.

- (b) Het eenvoudigste voorbeeld waarin dit allemaal lukt is

$$a \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (18) \quad \boxed{\text{eenv}}$$

Vinden de algemene oplossing van (I18)<sup>eenv</sup>.

- (c) Niet veel ingewikkelder is de PDV

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (19) \quad \boxed{\text{eend}}$$

Vind de oplossing van (I19)<sup>eend</sup>.

2. Neem de PDV in opgave no. 3(e) van **Exercises 2.4** op p. 34 en vind de tijdonafhankelijke oplossing(en) of toon aan dat die niet bestaan. Probeer de PDV ook algemeen op te lossen.