Verzamelingenleer

Onderdeel van het college Logica (2017)

Klaas Landsman

1.1 Zermelo–Fraenkel axioma's

De moderne wiskunde berust op het volgende stelsel van axioma's, dat in de periode 1900–1925 werd opgesteld.[1] De axioma's zijn geformuleerd in een eerste-orde logische taal met slechts een relatiesymbool $\in$ met ariteit 2 en een enkele constante $\emptyset$. Dit maakt de verzamelingenleer vrij radicaal: er zijn alleen maar verzamelingen en in het bijzonder zijn elementen van verzamelingen zelf ook verzamelingen.

Historisch gesproken hadden de axioma's **ZF1** t/m **ZF7** als doel om de verzamelingenleer te redden zonder in paradoxen als die van Russell te vervallen. Vanwege de moderne axiomatische aanpak hoeven we bovendien niet te definiëren wat een verzameling is (zoals Frege en Cantor wanhopig probeerden, bijvoorbeeld als 'alle objecten met een bepaalde eigenschap', en zoals Euclides al even weinig overtuigend definieerde wat een punt is, enz.). Deze eerste zeven axioma's zijn (met **AC**) voldoende voor de dagelijkse wiskunde. Axioma's **ZF8** en **ZF9** zijn bedoeld om een standaardmodel voor deze axioma's te kunnen definiëren, genaamd V, enigszins te vergelijken met de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ voor **PA**.

We gebruiken de volgende afkortingen:

$$\begin{aligned}
\forall_{x,y} &\equiv \forall_x \forall_y; && (1.1)\\
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha); && (1.2)\\
x \neq y &\equiv \neg(x = y); && (1.3)\\
x \notin y &\equiv \neg(x \in y). && (1.4)
\end{aligned}$$

Andere notaties worden in de toelichting na de axioma's uitgelegd. **ZF2** en **ZF8** (die φ bevatten) zijn axioma-schema's (vgl. **PA7**). Deze gelden voor alle formules φ met de aangegeven vrije variabelen.

ZF1 $\forall_{x,y}\,((\forall_z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \leftrightarrow x = y)$ (*Extensionaliteitsaxioma*);

ZF2 $\forall_x \exists_y \forall_z(((z \in x) \wedge \varphi(z)) \leftrightarrow z \in y)$ mits $y \notin FV(\varphi)$ (*Scheidingssaxioma*);

ZF3 $\neg \exists_x x \in \emptyset$ (*Axioma van de lege verzameling*);

ZF4 $\forall_{v,w} \exists_y \forall_z(z \in y \leftrightarrow (z = v) \vee (z = w))$ (*Paringsaxioma*);

ZF5 $\forall_x \exists_y \forall_z(z \in y \leftrightarrow \exists_{w \in x} z \in w)$ (*Verenigingsaxioma*);

ZF6 $\forall_x \exists_y \forall_z(z \in y \leftrightarrow z \subset x)$ (*Machtsverzamelingsaxioma*);

ZF7 $\exists_x(\emptyset \in x \wedge \forall_y(y \in x \to y^+ \in x))$ (*Oneindigheidsaxioma*);

ZF8 $\forall_u((\forall_{x \in u} \exists!_z \varphi(x,z)) \to \exists_y \forall_z(z \in y \leftrightarrow \exists_{x \in u} \varphi(x,z)))$ mits $y \notin FV(\varphi)$ (*Substitutieaxioma*);

ZF9 $\forall_{v \neq \emptyset}\, \exists_{x \in v}\, \forall_y(y \in x \to y \notin v)$ (*Regulariteitsaxioma*);

AC $\forall_u \exists_w((w \subset P(u) \times u) \wedge (\forall_{x \in P(u)}(x \neq \emptyset \to \exists!_{y \in x}\langle x, y\rangle \in w)))$ (*Keuzeaxioma*).

Schrik niet! De eerste zes axioma's zijn makkelijk(er) te begrijpen als we alvast aan echte verzamelingen denken (officieel vormen die pas de semantiek van deze theorie, die nu nog in een formeel syntactisch stadium verkeert). De laatste vier zijn een stuk technischer. De axioma's vallen inhoudelijk in twee andere groepen uiteen. De eerste groep geeft informatie over *gegeven* verzamelingen. Deze groep bestaat uit **ZF1**, dat zegt dat een verzameling wordt bepaald door haar elementen, **ZF3**, dat zegt dat de constante $\emptyset$ de lege verzameling is, en **ZF9** en **AC**, die zeer technisch zijn. De tweede groep (dus **ZF2**, **ZF4**, **ZF5**, **ZF6**, **ZF7**, en **ZF8**) bestaat uit axioma's die *nieuwe* verzamelingen genereren uit bestaande.

---

1. Dit stelsel heet **ZFC**. Axioma's **ZF1** t/m **ZF7** werden in 1908 door Zermelo geformuleerd. Axioma **ZF8** werd in 1922 onafhankelijk door Abraham Fraenkel (1891–1965) en Thoralf Skolem (1887–1963) voorgesteld. Axioma **ZF9** is van von Neumann (1925). Axioma **AC** komt weer van Zermelo (1904), maar was Russell en anderen al eerder opgevallen. Het stelsel **ZF1** t/m **ZF9** heet **ZF**. Zie ook D. van Dalen, H.C. Doets, en H.C.M. de Swart, *Verzamelingen: naïef, axiomatisch en toegepast* (Utrecht, 1975).

ZF1: $\forall_{x,y}\,((\forall_z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \leftrightarrow x = y)$ zegt dat als het voor twee verzamelingen x en y zo is dat z in x ligt desda z in y ligt, dan geldt $x = y$. Een verzameling is dus bepaald door haar elementen (die zelf ook weer verzamelingen moeten zijn, want in de wiskunde volgens **ZF** is er niets anders!). Hier is direct al een leuke toepassing: met de afkorting $\mathrm{emp}(x) \equiv \neg\exists_z z \in x$ volgt (opgave):

$$\mathbf{ZF1} \vdash \mathrm{emp}(x) \wedge \mathrm{emp}(y) \rightarrow (x = y). \tag{1.5}$$

ZF2: $\forall_x\exists_y\forall_z(((z \in x) \wedge \varphi(z)) \leftrightarrow z \in y)$ is een correcte versie van het naïeve idee van Cantor, Dedekind, en Frege dat iedere eigenschap (of technischer: ieder predikaat) een verzameling definieert. Als we een predikaat zien als een formule $\varphi(z)$, die uitdrukt dat z een bepaalde eigenschap heeft, dan zou $y = \{z \mid \varphi(z)\}$ dus een verzameling moeten zijn. In het soort notatie van **ZF2** zou dit idee worden uitgedrukt door het axioma $\exists_y\forall_z(\varphi(z) \leftrightarrow z \in y)$, maar dit leidt tot de Paradox van Russell (kies $\varphi(z) \equiv z \notin z$). Het cruciale verschil tussen **ZF2** en deze naïeve versie is dat we ons nu beperken tot alle z die voldoen aan $\varphi(z)$ *én element zijn van een al gegeven verzameling* x. De verzameling y die in dit axioma wordt gedefinieerd is volgens **ZF1** uniek en wordt genoteerd als

$$\{z \in x \mid \varphi(z)\}. \tag{1.6}$$

Let op! Dit is de eerste keer dat de bekende verzamelingstheoretische haakjes $\{\cdots\}$ officieel worden ingevoerd, en wel als onderdeel van een notatie die afkort wat er in axioma **ZF2** gebeurt. Deze haakjes behoren dus niet bij de formele taal **ZF**: ze spelen een andere rol dan de ronde haakjes $(,)$ en vallen evenmin onder enige klasse van symbolen die in eerste-orde logica ingevoerd. Technisch gesproken is (1.6) een term $t(x)$ met vrije variabele x.[2] Daaruit volgen (atomaire) formules van de soort $s = t$ of $s \in t$, waarbij s een term is. De mogelijkheden zijn beperkt tot $s \equiv \emptyset$ of $s \equiv y$;

$y = \{z \in x \mid \varphi(z)\}$ betekent $\forall_z(((z \in x) \wedge \varphi(z)) \leftrightarrow z \in y)$;
$y \in \{z \in x \mid \varphi(z)\}$ betekent $(y \in x) \wedge \varphi(y)$;
$\emptyset = \{z \in x \mid \varphi(z)\}$ is dan een afkorting voor $\varphi(z) \rightarrow \perp$;
$\emptyset \in \{z \in x \mid \varphi(z)\}$ is een afkorting voor $\varphi[\emptyset/z]$.

Voorbeeld: voor willekeurige variabelen x en v is $x \cap v$ een afkorting voor de verzameling y die in axioma **ZF2** wordt gedefinieerd door voor $\varphi(z)$ de formule $z \in v$ te nemen, en analoog $z \notin v$. Met de notatie (1.6) geeft dit als *definitie* van de symbolen $\cap$ (doorsnede) en $-$ (verschil) dus

$$x \cap v \equiv \{z \in x \mid z \in v\}; \tag{1.7}$$
$$x - v \equiv \{z \in x \mid z \notin v\}. \tag{1.8}$$

Het is niet verboden dat de formule φ nog meer vrije variabelen bevat dan z, als y daar maar niet bij hoort: neem namelijk $\varphi(z, y) \equiv z \notin y$, dan geeft **ZF2** $((z \in x) \wedge z \notin y) \leftrightarrow z \in y$, en zodra $x \neq \emptyset$ geeft dit een tegenspraak. De paradox van Russell daarentegen wordt de volgende stelling:

$$\mathbf{ZF1}, \mathbf{ZF2} \vdash \forall_y\exists_x x \notin y. \tag{1.9}$$

ZF3: $\neg\exists_x x \in \emptyset$ (oftewel $\mathrm{emp}(\emptyset)$) zegt dat de constante $\emptyset$ geen elementen heeft en dat er dus een lege verzameling bestaat. Volgens **ZF1** is deze verzameling uniek, vandaar dat $\emptyset$ dé lege verzameling is.[3] Het volgt dus uit axioma **ZF3** dat er überhaupt een verzameling bestaat![4]

ZF4: $\forall_{v,w}\exists_y\forall_z(z \in y \leftrightarrow (z = v) \vee (z = w))$ zegt dat er voor gegeven verzamelingen v en w een verzameling y met precies deze twee elementen bestaat, die we aanduiden als

$$\{v, w\}.$$

Dit is de tweede keer dat de haakjes $\{\cdots\}$ worden gedefinieerd, consistent met de eerste keer: neem in **ZF2** namelijk $\varphi(z)$ als $(z = v) \vee (z = w)$ en x als de verzameling y die volgens **ZF4**

2. Je kunt dus ook voor iedere formule $\varphi(z)$ een functiesymbool f_φ met ariteit 1 invoeren, met $f_\varphi(z) = t(x)$.
3. Je kunt het symbool $\emptyset$ hier definiëren als afkorting, i.p.v. het eerst als constante in de logische taal van **ZF** op te nemen.
4. Een equivalente vorm van axioma **ZF3** is: $\forall_x\neg(x \in \emptyset)$, ook genoteerd als $\forall_x x \notin \emptyset$. Gegeven **ZF1** en **ZF2** kun je tevens **ZF3** vervangen door het schijnbaar zwakkere axioma dat er een verzameling x bestaat; met deze x in **ZF2** en $\varphi(z) \equiv (z \neq z)$ (waarbij $s \neq t$ een afkorting is voor $\neg(s = t)$) is $y = \{z \in x \mid z \neq z\}$ de lege verzameling $\emptyset$.

bestaat.[5] Deze keer is $\{v, w\}$ syntactisch gesproken een term $t(v, w)$ met twee vrije variabelen, waarbij
$y = \{v, w\}$ betekent $\forall_z(z \in y \leftrightarrow (z = v) \vee (z = w))$ en $y \in \{v, w\}$ staat voor $(y = v) \vee (y = w)$.
Dit proces kan worden herhaald, zodat we $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kunnen schrijven voor de verzameling y die voldoet aan $\forall_{x_1,\ldots,x_n}\exists_y\forall_z(z \in y \leftrightarrow (z = x_1) \vee \cdots \vee (z = x_n))$. Deze y is wegens **ZF1** uniek: haar elementen zijn zojuist vermeld. Met andere woorden, in de notatie van **ZF2** kunnen we schrijven

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \equiv \{z \in y \mid (z = x_1) \vee \cdots \vee (z = x_n)\}, \tag{1.10}$$

waarbij y de verzameling is die volgens axioma **ZF4** bestaat (en gelijk is aan $\{x_1, \ldots, x_n\}$).
Daarmee kunnen we al tot twee tellen:

$$0 \equiv \emptyset; \tag{1.11}$$
$$1 \equiv \{0\} = \{\emptyset\}; \tag{1.12}$$
$$2 \equiv \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}. \tag{1.13}$$

Om verder te tellen is weer een nieuw axioma nodig:

ZF5: $\forall_x\exists_y\forall_z(z \in y \leftrightarrow \exists_{w\in x} z \in w)$ postuleert het bestaan van een verzameling y met als elementen precies *de elementen van de elementen van* x. In de formulering van het axioma staat de afkorting

$$\exists_{w\in x}\psi \equiv \exists_w((w \in x) \wedge \psi), \tag{1.14}$$

voor een willekeurige formule ψ, waarvoor wij in **ZF5** dus nemen $\psi \equiv z \in w$. We schrijven $y = \cup x$, en dit is de *definitie* van het symbool $\cup$ (dat je al informeel kent en gebruikt als het verenigingssymbool voor verzamelingen). Je kunt dus ook noteren

$$\cup x \equiv \{z \in y \mid \exists_{w\in x} z \in w\}, \tag{1.15}$$

waar y de verzameling is waarvan axioma **ZF5** het bestaan garandeert (en die gelijk is aan $\cup x$).
In het speciale geval $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ noteren we

$$x_1 \cup \cdots \cup x_n \equiv \cup\{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{1.16}$$

Stel bijvoorbeeld dat $x_1 = \{x_3, x_4\}$ en $x_2 = \{x_5\}$, dan is $x_1 \cup x_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$ ($\neq \{x_1, x_2\}$!).
We noteren nu

$$x^+ \equiv S(x) \equiv x \cup \{x\}, \tag{1.17}$$

De elementen van x^+ zijn dus de elementen van y, aangevuld met het ene element x. We kunnen nu verder tellen door $3 = S(2)$ enz., zodat voor $n > 2$,

$$n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}. \tag{1.18}$$

ZF6: $\forall_x\exists_y\forall_z(z \in y \leftrightarrow z \subset x)$ eist dat iedere verzameling x een machtsverzameling y heeft. De notatie

$$z \subset x \equiv \forall_w(w \in z \rightarrow w \in x), \tag{1.19}$$

voert het symbool $\subset$ voor "deelverzameling" in.[6] De verzameling y is volgens **ZF1** weer uniek en wordt genoteerd als $P(x)$; de elementen van de machtsverzameling $P(x)$ zijn dus de deelverzamelingen z van x. We kunnen dit ook in de vorm van (1.6) schrijven als

$$P(x) \equiv \{z \in y \mid z \subset x\}, \tag{1.20}$$

waarbij y de verzameling is die volgens **ZF6** bestaat (en samenvalt met $P(x)$).

We voeren nu singletons en geordende paren in via de notatie

$$\{x\} \equiv \{x, x\}; \tag{1.21}$$
$$\langle x, y\rangle \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}. \tag{1.22}$$

5. **ZF4** volgt niet uit **ZF2**, omdat het niet *a priori* duidelijk is wat je in dat laatste axioma voor x mag kiezen.
6. Het is dus mogelijk dat $z = x$, zodat $\subset$ vaak als $\subseteq$ wordt geschreven.

Lemma 1.1 *In* **ZF** *geldt:*

$$\vdash \forall_{u,v}\forall_{x,y}\,((x \in u) \wedge (y \in v)) \to \{\{x\},\{x,y\}\} \in P(P(u \cup v)). \tag{1.23}$$

*Met andere woorden, stel u en v zijn twee verzamelingen (i.e., variabelen in **ZF**), dan geldt: als $x \in u$ en $y \in v$, dan is $\{\{x\},\{x,y\}\}$ een element van de dubbele machtsverzameling $P(P(u \cup v))$.*

Het bewijs is een opgave. We kunnen nu het *cartesisch product* definiëren:

Definitie 1.1 *Het* cartesisch product *van twee verzamelingen u en v is de verzameling*

$$u \times v \equiv \{z \in P(P(u \cup v)) \mid \exists_{x\in u}\exists_{y\in v}\, z = \langle x,y\rangle\}, \tag{1.24}$$

*m.a.w., we kiezen in **ZF2**: $x \rightsquigarrow P(P(u\cup v))$ en $\varphi(z) \rightsquigarrow \exists_{x\in u}\exists_{y\in v}\, z = \langle x,y\rangle$ en noteren de unieke verzameling y die zo is gedefinieerd als $u \times v$. Informeel schrijven we vaak*

$$u \times v = \{\langle x,y\rangle \mid x \in u, y \in v\}. \tag{1.25}$$

Het cartesisch product komt vaak voor, maar de belangrijkste toepassing is de volgende.

Definitie 1.2 *Een* functie $f : u \longrightarrow v$ *is een deelverzameling $G_f \subset u \times v$ waarvoor geldt:*[7]

$$\forall_{x\in u}\exists!_{y\in v}\langle x,y\rangle \in G_f. \tag{1.26}$$

Hier is volgende afkorting gebruikt, (vgl. (1.14)), die via $\psi(y) \rightsquigarrow \langle x,y\rangle \in G_f$ vgl. (1.26) geeft:

$$\exists!_{y\in v}\psi(y) \equiv \exists_y((y \in v) \wedge (\forall_z(\psi(z) \leftrightarrow z = y))). \tag{1.27}$$

Algemener schrijven we voor de formule "er is een *unieke* y met de eigenschap $\psi(y)$":

$$\exists!_y\psi(y) \equiv \exists_y\forall_z(\psi(z) \leftrightarrow z = y). \tag{1.28}$$

ZF7: $\exists_x(\emptyset \in x \wedge \forall_y(y \in x \to S(y) \in x))$. Dit axioma zegt dan dat er een verzameling is die alle elementen $0, 1, 2, \ldots$ bevat. De doorsnede van alle verzamelingen met deze eigenschap is de kleinste verzameling die deze elementen bevat; deze kleinste oneindige verzameling heet ω. We voeren deze letter als een constante in, evenals de formule $\inf(x) \equiv (\emptyset \in x \wedge \forall_y(y \in x \to S(y) \in x))$, zodat **ZF7** luidt: $\exists_x \inf(x)$. De betekenis van $z \in \omega$ is dan: $\forall_x(\inf(x) \to z \in x)$, terwijl $y = \omega$ een afkorting is voor: $\forall_z((z \in y) \leftrightarrow \forall_x(\inf(x) \to z \in x))$. In de gebruikelijke semantiek van de verzamelingenleer is ω een kopie van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$.

ZF8: $\forall_u((\forall_{x\in u}\exists!_z\varphi(x,z)) \to \exists_y\forall_z(z \in y \leftrightarrow \exists_{x\in u}\varphi(x,z)))$, waarin φ niet van y af mag hangen, eist dat als een formule $\varphi(x,z)$ precies één z aan een gegeven x toekent zolang x door een verzameling u loopt, dan al deze z een verzameling vormen. Je kunt zo'n formule φ als een soort functie f beschouwen die aan het "origineel" x het "beeld" z toekent. De term rechts in **ZF8** zegt dat er een verzameling $y \equiv f(u)$ is die bestaat uit alle z die het beeld zijn van een of andere x in u. Dit axioma postuleert dus ruw gezegd dat het beeld van een verzameling onder een functie weer een verzameling is. In de notatie (1.6) hebben we dan

$$f(u) = \{z \in y \mid \exists_{x\in u}\varphi(x,z)\}, \tag{1.29}$$

waarbij y bestaat volgens **ZF8** en natuurlijk hetzelfde is als $f(u)$.

ZF9: $\forall_{v\neq\emptyset}\,\exists_{x\in v}\,\forall_y(y \in x \to y \notin v)$ zegt dat iedere niet-lege verzameling v een element x bevat dat disjunct is met x. Hierbij is de generieke afkorting

$$\forall_{v\neq\emptyset}\,\psi \equiv \forall_v((\exists_z z \in v) \to \psi) \tag{1.30}$$

gebruikt. Met het doorsnedesymbool $\cap$ uit(1.7) kun je gemakkelijk nagaan dat de uitdrukking $\forall_y(y \in x \to y \notin v)$ niets anders betekent dan $x \cap v = \emptyset$. Het axioma luidt dan: $\forall_{v\neq\emptyset}\,\exists_{x\in v}\,(x \cap v = \emptyset)$. Dit impliceert $x \notin x$ voor alle x, en bovendien dat er geen oneindig dalende ketens van elementen $\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_0$ bestaan (we laten het bewijs weg). Dit sluit niet alleen allerlei paradoxen uit, maar maakt tevens een krachtige ('transfiniete') vorm van inductie mogelijk.

7. In deze opzet wordt een functie f dus geïdentificeerd met haar grafiek G_f, en daarmee is de historische cirkel rond. In de 17e eeuw dacht Newton niet aan onze functies maar aan hun grafieken (die hij meestal weer als de beweging van een deeltje interpreteerde). Sinds Euler waren we gewend te beginnen met de toekenning van een functiewaarde $f(x) \in v$ aan $x \in u$, om vervolgens over te gaan tot de grafiek $G_f = \{\langle x, f(x)\rangle\} \subset u \times v$. Nu, in **ZF**, beginnen we met G_f en noemen we de unieke y in (1.26) desgewenst $f(x)$; daarmee zijn we weer terug bij Newton!

AC: $\forall_u \exists_w ((w \subset P(u) \times u) \wedge (\forall_{x \in P(u)}(x \neq \emptyset \rightarrow \exists!_{y \in x}\langle x, y\rangle \in w)))$ stelt dat je aan iedere niet-lege deelverzameling van een verzameling een element van die deelverzameling toe kunt kennen. Schrijf de uitdrukking $\exists!_{y \in x}(x, y) \in w$ in **AC** namelijk als $\exists!_{y \in u}((x, y) \in w \wedge y \in x)$. Dan luidt **AC**:

$$\forall_u \exists_w ((w \subset P(u) \times u) \wedge (\forall_{x \in P(u)}(x \neq \emptyset \rightarrow \exists!_{y \in u}(x, y) \in w \wedge y \in x))). \tag{1.31}$$

In het volgende hoofdstuk zal blijken dat hieruit volgt dat er een functie $f : P(u) \longrightarrow u$ bestaat in de normale zin, die $x \in P(u)$ dus afbeeldt op $f(x) \in u$, zodanig dat $\forall_{x \in P(u)}(x \neq \emptyset \rightarrow f(x) \in x)$. *Informeel* mag je **AC** daarom schrijven als

$$\forall_u \exists_{f : P(u) \longrightarrow u} \forall_{x \in P(u), x \neq \emptyset} f(x) \in x),$$

maar $\exists_f$ is niet gedefinieerd in de eerste-orde taal van **ZF**, omdat je $\exists$ (en $\forall$) alleen aan variabelen mag koppelen, en niet aan deelverzamelingen (in hogere-orde logica kan dat wel).

Opgaven voor week 13 (inleveropgaven: 1 en 5)

1. Exercise I.2.1 van Kunen (pp. 12–13), voor axioma's **ZF4**, **ZF5** en **ZF9**.
2. Bewijs (1.5).
3. Bewijs **ZF1, ZF2** $\vdash \forall_y \exists_x x \notin y$. Hint: paradox van Russell.
4. Toon aan dat $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ desda $(x = x') \wedge (y = y')$. Hint: maak een gevalsonderscheiding $x = y$ en $x \neq y$.
5. Bewijs Lemma 1.1.

1.2 Het verzamelingstheoretisch universum

We gaan het "papieren" formalisme van **ZF** nu interpreteren in "echte" verzamelingen, analoog aan de interpretatie van **PA** in de "echte" natuurlijke getallen. De gebruikelijke interpretatie (semantiek) van **ZF** is het *verzamelingstheoretisch universum* V, ook wel genoemd de *cumulatieve hiërarchie*.[8] De rol van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ in de semantiek van de rekenkunde **PA** wordt voor de verzamelingenleer **ZF** dus gespeeld door V. Ook de constructie van V lijkt enigszins op een bepaalde constructie van $\mathbb{N}$, waarbij de successor-operatie $S : x \mapsto x + 1$ aftelbaar vaak word toegepast op nul (zie onder).

De constructie van V is gebaseerd op het begrip *ordinaal*, dat al door Cantor werd gebruikt maar op de onderstaande wijze pas in 1923 werd gedefineerd door von Neumann (die toen 20 was!). Ordinalen generaliseren de getallen n uit het vorige hoofdstuk. Om te beginnen noemen we een verzameling z *transitief* als $x \in y \in z$ impliceert dat $x \in z$. Equivalent: als $y \in z$, dan $y \subset z$. Verder brengen we in herinnering (zie Moerdijk–van Oosten §1.3) dat een *woset* (*well ordered set*) X een poset (*partially ordered set*) is waarbij iedere niet-lege deelverzameling van X een minimaal element heeft. De ordening is dan automatisch *totaal* (i.e. voor $x, y \in X$ geldt $x \leq y$ of $y \leq x$); een woset is dus altijd een toset (*totally ordered set*) De bekendste woset in $\mathbb{N}$ en we weten nog dat het keuze-axioma equivalent is met de stelling dat iedere verzameling een partial ordering heeft waarin het een woset is (zie Proposition 1.4.3 Moerdijk–van Oosten); we zullen het keuze-axioma echter hier niet aannemen. In het vervolg betekent $x < y$ voor x, y in een poset dat $x \leq y$ en $x \neq y$. Posets kunnen ook direct worden geaxiomatiseerd via $<$ i.p.v. $\leq$: de axioma's zijn dan $\neg(x < x)$, $(x < y) \to \neg(y < x)$, en $((x < y) \wedge (y < z)) \to (x < z)$.

Definitie 1.3 *Een* ordinaal *is een transitieve verzameling α die een woset is in de ordening $x < y$ desda $x \in y$, waar $x, y \in \alpha$ (i.e., iedere niet-lege $y \subset \alpha$ heeft een element $z \in y$ zodat $z \in w$ voor alle $w \in y$).*

Een equivalente definitie van een ordinaal is: een ordinaal is een woset X zodat $\downarrow a = a$ voor alle $a \in X$, waarbij $\downarrow a = \{x \in X \mid x < a\}$. We geven nu de belangrijkste eigenschappen van ordinalen, die altijd met Griekse letters worden genoteerd; alle α, β, γ etc. zijn in het vervolg ordinalen.

Stelling 1.1 *1. Als $x \in \alpha$, dan is x eveneens een ordinaal (we mogen dan dus schrijven: $\beta \in \alpha$).*
2. Als $\beta \in \alpha$ dan $\beta \subset \alpha$, en omgekeerd (iets dieper): $\beta \subset \alpha$ impliceert $\beta = \alpha$ of $\beta \in \alpha$.
3. Er geldt $\alpha \subset \beta$ of $\beta \subset \alpha$ (of allebei: $\alpha = \beta$).
4. Er geldt $\alpha \in \beta$ of $\beta \in \alpha$ of $\alpha = \beta$.
5. De klasse Ord *van alle ordinalen (die geen verzameling is wegens de Burali-Forti paradox, zie Theorem I.8.9 in Kunen) is zelf een ordinaal, in de zin dat* Ord *transitief en een wo"set" is in $\in$.*
6. Als α een ordinaal is, dan is α^+ dat ook, met

$$\alpha^+ = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \alpha \in \beta\}. \tag{1.32}$$

7. Als x een verzameling ordinalen is, dan is $\cap x$ een ordinaal, met $\cap x \in x$ en

$$\cap x = \min x = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \beta \in x\}. \tag{1.33}$$

8. Als x een verzameling ordinalen is, i.e. $x \subset \mathrm{Ord}$, dan is $\cup x$ een ordinaal, met

$$\cup x = \sup x = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \alpha \leq \beta \,\forall\, \alpha \in x\}. \tag{1.34}$$

Speciale gevallen hiervan zijn, voor resp. opvolgers en limieten (i.e.niet-opvolgers):

$$\cup\alpha^+ = \alpha; \tag{1.35}$$
$$\cup\alpha = \alpha \quad (\alpha \text{ limiet}) \tag{1.36}$$

Een opvolger α^+ heeft dus een maximaal element, namelijk α, terwijl een limiet dat niet heeft.

Het is (hopelijk) duidelijk dat bijv. ieder ordinaal n voor $n > 0$ een opvolger is, terwijl ω een limiet is.

8. Het oorspronkelijk idee voor de constructie van V is van Zermelo (1907), zie met axioma's **ZF1** t/m **ZF7** werkte. Pas de toevoeging van **ZF8** (door Fraenkel) en **ZF9** (door von Neumann) maakt Zermelo's constructie rigoreus, en het was Zermelo zelf die de correcte versie in 1930 opschreef. Zie H.-D. Ebbinghaus, *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work* (Springer, 2007).

Om V te definieëren is *recursie op ordinalen* nodig, zie Kunen §I.9. Dit is lastig, maar gaat als volgt. Stel, informeel, dat $h : V \to V$ een 'functie' is (we moeten V nog definieëren, dus formeel is h een formule $\varphi(x, y)$ zodat $\forall_x \exists!_y \varphi(x, y)$; deze unieke y schrijven we als $y = h(x)$). Dan is er een unieke 'functie' $f : \mathrm{Ord} \to V$ (formeel weer gegeven door een formule ψ, zie onder) zodat voor alle ordinalen α geldt:

$$f(\alpha) = h(f \restriction \alpha), \tag{1.37}$$

waarbij $f \restriction \alpha$ de functie $\alpha \to V$ is met grafiek $f \restriction \alpha = \{\langle \beta, f(\beta) \rangle \mid \beta \in \alpha\}$. Dit is inderdaad formeel een functie (al is f dat zelf niet!), omdat volgens axioma **ZF8** het beeld

$$\mathrm{ran}(f \restriction \alpha) = \{f(\beta) \mid \beta \in \alpha\} \equiv f[\alpha]. \tag{1.38}$$

van $f \restriction \alpha$, een verzameling is (herschrijf (1.29) in **ZF8** als $f(u) = \{f(x) \mid x \in u\}$). Daarmee is $f \restriction \alpha$ een functie van α naar $f[\alpha]$ (let op: er is een groot verschil tussen $f[\alpha]$ en $f(\alpha)$!). Formeel is f net als h een formule $\psi(x, y)$ met $\forall_x \exists!_y \psi(x, y)$, zodat $y = f(x)$; in dit geval zijn we alleen geïntereseerd in waarden van f op ordinalen, zodat $f(x)$ voor $x \notin \mathrm{Ord}$ er niet toe doet (kies dan bijv. $f(x) = \emptyset$). We definiëren nu

$$h(x) = \cup\, \mathrm{ran}(P \circ x) = \cup\{P(g(y)) \mid y \in u\} \tag{1.39}$$

als x (de grafiek van) een functie $g : u \to v$ is, en (zeg) $h(x) = \emptyset$ als x dat niet is. Met deze keuze van h en de notatie $V_\alpha \equiv f(\alpha)$, geeft (1.37) via (1.39) met $g \rightsquigarrow f \restriction \alpha$ en $y \rightsquigarrow \beta$, en $u \rightsquigarrow \alpha$ (zodat $g(y) \rightsquigarrow V_\beta$):

$$V_\alpha = \cup\{P(V_\beta) \mid \beta \in \alpha\} \equiv \bigcup_{\beta \in \alpha} P(V_\beta). \tag{1.40}$$

We kunnen ook direct uit **ZF5**, **ZF6**, en **ZF8** afleiden dat V_α een verzameling is: het is immers de vereniging van het beeld van de heuse functie $P \circ (f \restriction \alpha)$ met als domein de verzameling $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Het is een kleine opgave om na te gaan dat deze ene formule voor V equivalent is met de volgende drie:

$$V_0 = \emptyset; \tag{1.41}$$
$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha); \tag{1.42}$$
$$V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta \equiv \cup\{V_\beta \mid \beta \in \alpha\} \text{ als } \alpha \text{ een limiet is.} \tag{1.43}$$

Hier is $\alpha + 1 \equiv \alpha^+$. Het verzamelingstheoretisch universum is ten slotte als volgt gedefinieerd:

$$V = \cup_\alpha V_\alpha, \tag{1.44}$$

waarbij de vereniging over alle ordinalen α is. Het object V speelt de rol van de klasse van alle verzamelingen en is zelf geen verzameling. De notatie $\cup$ in (1.44) is dan ook symbolisch: de elementen van V, dus de verzamelingen die samen het universum vormen, zijn de elementen van V_α, voor een willekeurig ordinaal α, oftewel: $v \in V$ desda er een $\alpha \in \mathrm{Ord}$ is zodat $v \in V_\alpha$ (let op: alle V_α zijn wél verzamelingen!).

Opgaven voor week 14 (inleveropgaven: 2, 6, 7)

1. Bewijs dat iedere woset $(X, \leq)$ isomorf is met de woset $P_\downarrow(X) \subset P(X)$, met $P_\downarrow(X) = \{\downarrow a \mid a \in X\}$ met $\subset$ als ordening. Hierbij zijn twee posets $(X, \leq)$ en $(X', \leq')$ per definitie isomorf als er een bijectie $f : X \to X'$ bestaat zodat als $x \leq y$, dan $f(x) \leq' f(y)$.
2. Bewijs no. 1 van Stelling 1.1.
3. Bewijs no. 2 van Stelling 1.1.
4. Bewijs no. 7 van Stelling 1.1 voor $x = \{\alpha, \beta\}$, m.a.w., laat zien dat $\alpha \cap \beta$ een ordinaal is.
5. Maak het op het college gegeven bewijs van no. 3 van Stelling 1.1 af: als $\neg(\alpha \subset \beta)$, dan volgt $\min(\alpha - \beta) = \alpha \cap \beta$. Schrijf ook de rest uit (m.b.v. **ZF9**).
6. Er bestaat (toch) ook een bewijs van no. 3 van Stelling 1.1 zonder **ZF9**! Geeft dit. Hint: gebruik opgaven 3 en 4.
7. Bewijs de equivalentie van (1.40) en (1.41) - (1.43).

1.3 Recursie en inductie op ordinalen

Het bewijs van het principe van recursie op ordinalen zoals in de vorige sectie maakt gebruik van het principe van *transeindige inductie*, dat in feite ook een stelling uit **ZF** is, namelijk:

$$(\forall_{\alpha\in\mathrm{Ord}}(\forall_{\beta\in\alpha}\varphi(\beta)\to\varphi(\alpha)))\to\forall_{\alpha\in\mathrm{Ord}}\varphi(\alpha), \tag{1.45}$$

waarbij φ een op ordinalen gedefinieerde formule is; officieel zouden we moeten schrijven $\varphi(x)$ waarbij $\varphi(\alpha)\equiv\varphi[\alpha/x]$ etc., en $\varphi(x)$ voor $x\notin\mathrm{Ord}$ willekeurig is. Daarmee is (1.45) een speciaal geval van

$$(\forall_x(\forall_{y\in x}\varphi[y/x]\to\varphi(x)))\to\forall_x\varphi(x), \tag{1.46}$$

genaamd $\in$-*inductie*, dat in aanwezigheid van axioma's **ZF1** - **ZF8** equivalent blijkt te zijn met axioma **ZF9** (opgave). Het speciale geval (1.45) is echter veel eenvoudiger en heeft **ZF9** niet nodig: het volgt direct uit Theorem I.9.1 in Kunen, of, nog eenvoudiger, uit het volgende lemma over wosets (opgave):

Lemma 1.2 *Stel $(X,\leq)$ is een woset en $E\subset X$ heeft de volgende eigenschap: als $y\in E$ voor alle $y<x$, dan is $x\in E$. Dan is $E=X$.*

Neem nu $X=\mathrm{Ord}$ (dat is geen verzameling, maar het bewijs van Lemma 1.2 is hetzelfde), zodat $\alpha<\beta$ desda $\alpha\in\beta$, en voor E de α waavoor $\varphi(\alpha)$ geldt. In de praktijk bewijs je $\varphi(0)$ en dan de eerste implicatie in (1.45) apart voor de overige soorten ordinalen: $\alpha=\beta+1$, en α een limiet (zie opgave 2 onder). In het eerste geval voldoet de implicatie $\varphi(\beta)\to\varphi(\beta^+)$, aangezien $\forall_{\gamma\in\beta^+}\varphi(\gamma)\to\varphi(\beta)$ (immers $\beta\in\beta^+$), zodat de implicatie $\varphi(\beta)\to\varphi(\beta^+)$ tevens bewijst dat $\forall_{\gamma\in\beta^+}\varphi(\gamma)\to\varphi(\beta^+)$.

We schetsen nu het bewijs van het bestaan en de uniciteit van f in (1.37); zie Kunen §I.9 voor een bewijs. De eerste stap is om voor iedere $\delta\in\mathrm{Ord}$ een functie $f_\delta:\delta\to V$ te vinden zodat

$$f_\delta(\alpha)=h(f_\delta\restriction\alpha) \tag{1.47}$$

voor all $\alpha\in\delta$, vergelijk (1.37). Dit is een echte functie! De formule $\psi(x,y)$ die dan de niet-functie $f:\mathrm{Ord}\to V$ definieert is dan als volgt gedefinieerd, namelijk: $\psi(x,y)$ is willekeurig als $x\notin\mathrm{Ord}$, en

$$\psi(\alpha,y)\equiv\exists_{\delta\in\mathrm{Ord}}(\alpha\in\delta)\wedge(y=f_\delta(\alpha)). \tag{1.48}$$

Zowel het bestaan als de uniciteit van f_δ (die bij Kunen $\mathrm{App}(\delta,f)$ heet) worden bewezen via transeindige inductie. Het bestaan gaat dan lelijk uit het ongerijmde, laten we uniciteit bewijzen. De φ in (1.45) is dan:[9]

$$\varphi(\delta)\equiv((\forall_{\alpha\in\delta}(f_\delta(\alpha)=h(f_\delta\restriction\alpha))\wedge(\forall_{\alpha\in\delta}(g_\delta(\alpha)=h(g_\delta\restriction\alpha))))\to(f_\delta=g_\delta), \tag{1.49}$$

waarbij f_δ en g_δ beide dus functies $\delta\to V$ zijn. Als $\delta=0$, dan bestaat $\alpha\in\delta$ niet en is (1.47) leeg. Daarna:

- Het geval van opvolgers staat in Kunen, p. 45.
- Als δ een limiet is zijn de kwantoren $\forall_{\alpha\in\delta}$ en $\forall_{\beta\in\delta}\forall_{\alpha\in\beta}$ equivalent: als $\alpha\in\beta\in\delta$ dan geldt $\alpha\in\beta$ (per definitie van een ordinaal), maar voor een limiet δ geldt ook het omgekeerde, omdat $\cup\delta=\delta$. We korten $\varphi(\delta)$ in (1.49) af als $\chi(\delta)\to(f_\delta=g_\delta)$. Gezien de eerste zin in dit item en de aanname $\forall_{\beta\in\delta}\varphi(\beta)$ in (1.45) impliceert $\chi(\delta)$ de uitspraak $\forall_{\beta\in\delta}(f_\delta\restriction\beta=g_\delta\restriction\beta)$; schrijf dit helemaal uit vanwege de dubbele pijlen! In andere woorden, we hebben uit $\chi(\delta)$ de uitspraak
$$\forall_{\beta\in\delta}\forall_{\alpha\in\beta}(f_\delta\restriction\beta(\alpha)=g_\delta\restriction\beta(\alpha)).$$
We gebruiken nu opnieuw het feit dat δ een limiet is: dit maakt de vorige uitspraak equivalent met $\forall_{\alpha\in\delta}(f_\delta(\alpha)=g_\delta(\alpha))$, oftewel $f_\delta=g_\delta$. Dit geeft de implicatie $\chi(\delta)\to(f_\delta=g_\delta)$, i.e. $\varphi(\delta)$, waarbij we $\forall_{\beta\in\delta}\varphi(\beta)$ hebben aangenomen, zodat we nu de implicatie $\forall_{\beta\in\delta}\varphi(\beta)\to\varphi(\delta)$ hebben.

Oefenopgaven voor week 15

1. Bewijs Lemma 1.2.
2. Bewijs via transeindige inductie dat $\mathrm{Ord}\cap V_\alpha=\alpha$.
3. Bewijs dat gegeven axioma's **ZF1** - **ZF8**, de uitspraak (1.46) equivalent is met axioma **ZF9**.

(Antwoorden op de laatste pagina).

9. Let op! De α in (1.45) is nu δ!

1.4 Het laatste axioma

We komen nu bij de rol van axioma **ZF9**, dat we herschrijven als

$$\forall_{v \neq \emptyset} \exists_{x \in v}\, x \cap v = \emptyset. \tag{1.50}$$

Stelling 1.2 *Iedere $v \in V$ voldoet aan axioma **ZF9** (i.e., iedere $v \in V$ is 'well founded').*[10]

Het bewijs van deze stelling berust op het begrip *rang* van een verzameling $x \in V$, gedefinieerd als

$$\text{rank}(x) = \min\{\alpha \in \text{Ord} \mid x \in V_{\alpha+1}\}. \tag{1.51}$$

Dit minimum bestaat omdat Ord zelf een wo'set' is (behalve dat het geen verzameling is). De definitie is zo dat $\text{rank}(n) = n$ voor $n \in \omega$, en algemener dat $\text{rank}(\alpha) = \alpha$. Er geldt dan

$$V_\alpha = \{x \in V \mid \text{rank}(x) < \alpha\}, \tag{1.52}$$

zie Kunen, Lemma I.14.4, en, zeer belangrijk voor het vervolg, uit datzelfde lemma,

$$x \in y \;\Rightarrow\; \text{rank}(x) < \text{rank}(y). \tag{1.53}$$

Verder heeft iedere $v \in V$ een (niet noodzakelijk uniek) element x met de kleinst mogelijke rang onder alle elementen van v, i.e. $\text{rank}(x) \leq \text{rank}(y)$ voor alle $y \in v$ (om dit in te zien neem je de verzameling r van alle ordinalen die voorkomen als rang van een element van v; omdat een wo'set' is heeft deze deel'verzamling' een minimaal element gelijk aan $\cap r$, zie (1.33)). Als nu $z \in x$, dan is volgens (1.53) $\text{rank}(z) < \text{rank}(x)$, en dus $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$ voor alle $y \in v$. Daarmee is $z \in v$ onmogelijk, zodat $x \cap v = \emptyset$, en Stelling 1.3 is bewezen. Omgekeerd geldt:

Stelling 1.3 *Ieder 'model' W van de axioma's **ZF1** t/m **ZF9** is bevat in V.*

Hier staat 'model' tussen aanhalingstekens omdat W niet zelf een verzameling hoeft te zijn. Gegeven **ZF1** t/m **ZF8** betekent deze stelling dat als een verzameling v aan **ZF9** voldoet, deze in V ligt. Hierbij is de *transitive closure* $\text{trcl}(x)$ van een verzameling x het beslissende begrip, zie Kunen Definition I.9.5. Dit is de kleinste transitieve verzameling die x als element heeft, en is expliciet gegeven door

$$\text{trcl}(x) = \cup\{\cup^n x \mid n \in \omega\}, \tag{1.54}$$

waarbij bijv. $\cup^2 x \equiv \cup \cup x$. Belangrijk is de eigenschap (neem $n = 0$ in (1.54))

$$x \subset \text{trcl}(x), \tag{1.55}$$

Stel dat $x \in W$ maar $x \notin V$; in navolging van Kunen, Theorem I.14.9 bewijzen we uit het ongerijmde dat x dan ook niet aan **ZF9** voldoet, i.e. $x \notin V \Rightarrow \neg$ **ZF9** en dus **ZF9** $\Rightarrow x \in V$.

Neem $t \equiv \text{trcl}(x)$; als $t \subset V$ dan $x \subset t \subset V$ en dus $x \subset V$ en dus $x \in V$; voor de laatste implicatie zie Lemma I.14.6 in Kunen. Contrapositief: $x \notin V \Rightarrow t \not\subset V$ (i.e. de negatie van $t \subset V$). We hoeven dus alleen maar te bewijzen dat $t \not\subset V \Rightarrow \neg$ **ZF9**, oftewel $((t \not\subset V) \wedge$ **ZF9**$) \rightarrow \perp$. Als $t \not\subset V$, dan is $v \equiv t - V$ niet leeg (NB $t - V$ is een echte verzameling, zijnde een deelverzameling van t). Kies een $y \in (t - V)$, dan is $y \in t$, maar t is transitief, dus $y \subset t$. Volgens **ZF9** is $y \cap v = y \cap (t - V)$ leeg, zodat $y \subset V$ en dus $y \in V$ (zie boven voor x). Maar dit geeft een tegenspraak met $y \in t - V$, i.e. $(y \notin V) \wedge (y \in t)$. Q.E.D.

Het universum V is dus het maximale model van **ZF**, in tegenstelling tot $\mathbb{N}$, dat eerder een minimaal model van **PA** is (alle andere modellen van **PA** moeten immers $\mathbb{N}$ bevatten). Niet-standaard modellen van **ZF** zijn dus deel'verzamelingen' (eigenlijk deelklassen) van V. Het bekendste is Gödels model L, dat hij bedacht omdat daarin de continuüm hypothese waar is.[11] De opbouw van L is analoog aan die van V, dus $L = \cup_\alpha L_\alpha$, maar in de stap van L_α naar $L_{\alpha+1}$ is de laatste niet de complete machtsverzameling van L_α maar de verzameling van deelverzamelingen van L_α die door een formule φ worden beschreven.

---

10. Het feit dat iedere $v \in V$ aan axioma's **ZF1** t/m **ZF8** is eenvoudig na te gaan, zie Kunen p. 70, die onze V als WF noteert.
11. Deze hypothese betekent dat als $S \subset \mathbb{R}$, ofwel S eindig is, of er een bijectie bestaat tussen S en $\mathbb{N}$, of tussen S en $\mathbb{R}$. Volgens deze hypothese ligt er qua kardinaliteit dus niets tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. De *Generalized Continuum Hypothesis* (GCH) houdt in dat voor iedere oneindige verzameling v en iedere deelverzameling w van $P(v)$ ofwel een injectie $w \rightarrow v$ ofwel een bijectie $w \rightarrow P(v)$ bestaat. Ook GCH is waar in L. Er zijn ook modellen van **ZF** waarin GCH niet waar is, i.e. GCH is *onbeslisbaar* in **ZF**.

1. *Bewijs Lemma 1.2.* Bewijs uit het ongerijmde: stel $E \neq X$, dan is $X - E$ niet leeg en heeft (per definitie van een woset) een minimaal element x_1. Dan geldt (per definitie van x_1) dat $y \in E$ voor alle $y < x_1$. De 'eigenschap' impliceert dat $x_1 \in E$, tegenspraak met $x_1 \in X - E$ en dus $x_1 \notin E$.
2. We nemen als $\varphi(\alpha)$ de te bewijzen uitspraak $\mathrm{Ord} \cap V_\alpha = \alpha$. We moeten dus bewijzen:

$$\forall_{\beta \in \alpha}(\mathrm{Ord} \cap V_\beta = \beta) \rightarrow \mathrm{Ord} \cap V_\alpha = \alpha. \tag{1.56}$$

- Voor $\alpha = 0 = \emptyset$ hebben we $\mathrm{Ord} \cap \emptyset = \emptyset$, dus $\varphi(0)$ is waar.
- Het geval van opvolgers staat in Kunen, Lemma I.14.5 deel 1.
- Als α een limiet is, dan is $V_\alpha = \cup_{\beta \in \alpha} V_\beta$ en dus, gebruik makend van de aanname in (1.56),

$$\mathrm{Ord} \cap V_\alpha = \mathrm{Ord} \cap (\cup_{\beta \in \alpha} V_\beta) = \cup_{\beta \in \alpha}(\mathrm{Ord} \cap V_\beta) = \cup_{\beta \in \alpha} \beta = \alpha.$$