Radboud Universiteit

Bachelorscriptie

Symmetrieën in de kwantummechanica

Stellingen van Wigner, Kadison en de Jacobson-Rickart-Kadison stelling

Auteur:
Victor Hissink Muller

Begeleider:
Prof. dr. N.P. Landsman

27 juni 2015

Abstract

This thesis covers theorems by Wigner, Kadison and the Jacobson-Rickart-Kadison theorem. These theorems state fundamental mathematical structures of quantum mechanics and therefore are of great importance. Wigner's theorem states a symmetry between automorfisms of the space of pure states and unitary/anti-unitary operators of the Hilbert space, while the theorem by Kadison gives a symmetry between automorfisms of the more general space of mixed states and the same unitary/anti-unitary operators of the Hilbert space. The Jacobson-Rickart-Kadison theorem is even more general in that it states a symmetry between automorfisms of the space of operators and unitary/anti-unitary operators. In this thesis a direct proof of Wigner's theorem is given and the equivalence between Wigner's theorem and Kadison's theorem is proven. These proofs are given within the theory of finite dimensional Hilbert spaces, but formulated in the context of functional analysis such that a transition to the general seperable Hilbert space will not be too difficult. For finite dimensional spaces these theorems are already non-trivial, furthermore their essence lies not in the fact that they are true in the infinite dimensional case.

Inhoudsopgave

Voorwoord

In het voorjaar van 2015 heb ik deze scriptie geschreven. Het onderwerp, de stellingen van Wigner, Kadison en Jacobson et al., valt binnen het vakgebied van de mathematische fysica. De stellingen van Wigner en Kadison zijn van fundamenteel belang voor de kwantummechanica, omdat ze de basis van haar mathematische structuren leggen. Wiskundig gezien moeten er een hoop aanpassingen worden gezien t.o.v. de gebruikelijke theorie van hilbertruimtes, omdat de fysische structuur opgelegd aan een hilbertruimte niet overeenkomt met de natuurlijke wiskundige structuur van een hilbertruimte. De kwantumfysica laat een lastigere, maar rijkere structuur toe.

In de weinige literatuur die er op dit gebied is, is het gebruikelijk de equivalentie van de stellingen van Wigner, Kadison en Jacobson et al. aan te tonen en daarna de stelling van ofwel Wigner ofwel Jacobson et al. te bewijzen, zodat alle stellingen bewezen zijn. De bewijzen van de stelling van Wigner zijn altijd erg moeizaam (zie bewijzen gegeven in [7], [13], [14]), wat aangeeft dat het een lastig onderwerp is.

Het oorspronkelijke doel van mijn scriptie was het vinden van een direct bewijs van Kadison. Helaas bleek dit erg moeilijk en i.v.m. tijdgebrek heb ik het doel aangepast. Deze scriptie is uiteindelijk een uiteenzetting van het onderwerp, de stellingen en hun equivalentie geworden. Verder geef ik een bewijs van de stelling van Wigner, waarbij mijns inziens de beste elementen uit verschillende bewijzen zijn genomen, zodat het een logische opbouwend verhaal vormt. Ik heb het op zo'n manier proberen te schrijven dat een derdejaars wiskundestudent het goed zou moeten kunnen volgen. Alle definities en bewijzen heb ik zoveel mogelijk in de context van de functionaalanalyse gegeven, zodat een uitbreiding naar algemenere separabele hilbertruimte snel in te zien is.

De eerste twee hoofdstukken vormen de inleiding van het onderwerp. Het derde en vierde hoofdstuk formuleren de stellingen en behandelt het tweedimensionale geval. Deze hoofdstukken en hun notatie zijn gedaan aan de hand van het dictaat [4]. Het vierde hoofdstuk breidt de stelling van Wigner uit naar het willekeurige eindig-dimensionale geval aan de hand van een artikel van Barry Simon [7]. Het laatste hoofdstuk is weer gebaseerd op het dictaat. In alle gevallen heb ik de details verder uitgewerkt en toegelicht t.o.v. hoe ze waren gegeven.

Geschiedenis

Eugene Wigner (1902-1995) was een Hongaars-Amerikaans theoretisch fysicus met een sterk wiskundig inzicht. De stelling van Wigner, bewezen door Wigner in 1931 in zijn boek 'Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quanten mechanik der Atomspektren', is één van de fundamenten van de mathematische formulering van de kwantummechanica. Door de stelling werd het duidelijk dat groepentheorie van groot belang is voor de kwantumfysica. Toen zijn boek verscheen was er veel weerstand tegen deze manier van werken. Vele fysici noemden het de 'Gruppenpest'. Gelukkig bleek het een tijdelijk probleem te zijn. Zo staat er in het voorwoord van de vertaling (uitgebracht in 1959): "When the original German version was first published, in 1931, there was a great reluctance among physicists toward accepting group theoretical arguments and the group theoretical point of view. It pleases the author that this reluctance has virtually vanished in the meantime and that, in fact, the younger generation does not understand the causes and the basis for this reluctance."[1]

De Amerikaanse wiskundige Richard Kadison (1925) was een belangrijke figuur in de ontwikkeling van de operator-algebra's. De ongelijkheid van Kadison (een generalizatie van de Cauchy-Schwarz ongelijkheid in de context van operator-algebra's) en het Kadison-Singer probleem zijn bekend in dit vakgebied. De stelling van Kadison die in deze scriptie wordt behandeld, noemt hij voor het eerst in 1965 [8]. Kadison leeft nog en hij wordt volgende maand 90 jaar.

Nathan Jacobson (1910-1999), geboren in Warschau en in 1918 met zijn familie naar Amerika geëmigreerd, werd gezien als één van de meest vooraanstaande algebraïci van zijn tijd. Samen met Charles Earl Rickart (1913-2002), een Amerikaanse wiskundige die vooral onderzoek deed naar banachalgebra's, gaven ze in 1950 het algebraïsche idee van de stelling die in deze scriptie de Jacobson-Rickart-Kadison stelling wordt genoemd [9]. De functionaalanalytische context is later door Kadison gegeven [10].

Rickart, Jacobson en Kadison hebben in hun werk nooit Wigner genoemd en waren vermoedelijk niet op de hoogte van een verband tussen hun stellingen en de stelling van Wigner. Dit verband is pas later ingezien (zie [11] en [12]).

1 Algemene begrippen

Voordat we aan het hoofdonderwerp beginnen, is het noodzakelijk eerst een aantal begrippen uit de functionaalanalyse en de lineaire algebra te noemen. Dit hoofdstuk behandeld stellingen en definities van hilbertruimtes en noemt kort de fysische interpretatie.

1.1 Functionaalanalyse

We zullen met vectorruimtes en i.h.b. hilbertruimtes werken. Alle vectorruimtes die worden behandeld, zijn vectorruimtes over het lichaam $\mathbb{C}$.

Definitie 1.1. *Een **metriek** op een verzameling X is een positieve afbeelding $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die voldoet aan*

(i) $d(x, y) = d(y, x)$ *(symmetrisch),*

(ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *voor alle* $x, y \in X$ *(driehoeksongelijkheid),*

(iii) $d(x, y) = 0$ *d.e.s.d.a.* $x = y$ *(scheidingseigenschap).*

Definitie 1.2. *Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in X. We noemen (x_n) **convergent** en zeggen dat (x_n) **naar** x **convergeert** wanneer er een $x \in X$ bestaat zodanig dat voor alle $\epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $d(x_n, x) < \epsilon$.*

*De rij (x_n) heet een **cauchyrij** wanneer voor alle $\epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor alle $n, m \geq N$ geldt dat $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Een metrische ruimte (X, d) heet **volledig** wanneer elke cauchyrij convergent is.

Definitie 1.3. *Een **norm** op een vectorruimte V is een positieve afbeelding $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die voldoet aan*

(i) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ *voor alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *en* $v \in V$ *(homogeniteit),*

(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *voor alle* $v, w \in V$ *(driehoeksongelijkheid),*

(iii) $\|v\| = 0$ *d.e.s.d.a.* $v = 0$ *(positief definiet).*

Definitie 1.4. *Zij V een vectorruimte. Een afbeelding $f : V \times V \to \mathbb{C}$ heet **sesquilineair** wanneer deze, voor alle $u, v, w \in V$ en $\lambda \in \mathbb{C}$, voldoet aan*

(i) (anti-lineair in het eerste argument)

- $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
- $f(\lambda v, w) = \bar{\lambda} f(v, w)$

(ii) (lineair in het tweede argument)

- $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$
- $f(v,\lambda w) = \lambda f(v,w)$

Ik definieer het eerste argument anti-lineair, zodat het beter aansluit op de fysische bra-ket notatie. Het komt in de wiskunde ook vaak voor dat het eerste argument juist lineair wordt gedefinieerd. Dit is slechts een notatiekwestie.

Definitie 1.5. *Een **inproduct** op een vectorruimte V is een sesquilineaire afbeelding $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, die voldoet aan*

(i) $\langle v,v \rangle \geq 0$ *voor alle* $v \in V$ *(positief),*

(ii) $\langle v,v \rangle = 0$ *d.e.s.d.a* $v = 0$ *(positief definiet),*

(iii) $\langle v,w \rangle = \overline{\langle w,v \rangle}$ *(hermitisch).*

Het inproduct induceert een norm en deze induceert een metriek op een vectorruimte V als volgt: een inproduct definieert een norm door

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle},$$

en een norm geeft een metriek via

$$d(v,w) = \|v-w\|.$$

Definitie 1.6. *Een **hilbertruimte** H is een vectorruimte met daarop een inproduct gedefinieerd zodanig dat H voor de geïnduceerde metriek volledig is.*

Voor vectorruimtes met inproduct kennen we de **ongelijkheid van Cauchy-Schwartz**:

$$|\langle \psi,\varphi \rangle| \leq \|\psi\|\|\varphi\|.$$

Dit bewijzen is simpel uitschrijfwerk (zie [2]).

We willen oneindige sommen van vectoren netjes definiëren. Formeel gezien geldt voor positieve reële getallen $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dat hun som gelijk is aan

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} a_i \mid F \subseteq \mathbb{N} \text{ eindig}\right\}.$$

We kunnen iets soortgelijks definiëren voor oneindige sommen van vectoren. Stel dat $\{\psi_i\}_{i\in I}$ een verzameling van vectoren in H is, dan is hun som gelijk aan Ψ wanneer voor elke $\varepsilon > 0$ een eindige deelverzameling $F_\varepsilon \subseteq I$ te vinden is zodanig dat voor alle eindige deelverzamelingen $G \supseteq F_\varepsilon$ van I geldt

$$\|\Psi - \sum_{i\in G} \psi_i\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Uit deze definitie volgt ook dat, wanneer we het inproduct van Ψ met een willekeurige andere vector φ in H nemen, we de som buiten het inproduct mogen laten. Voor elke willekeurige $\varepsilon' > 0$ kunnen we namelijk $\varepsilon = \varepsilon'/\|\varphi\|$ definiëren, zodat er een eindige $F_\varepsilon \subseteq I$ is zodanig dat voor alle eindige deelverzamelingen $G \supseteq F_\varepsilon$ van I geldt

$$|\langle\varphi, \Psi\rangle - \langle\varphi, \sum_{i\in G}\psi_i\rangle| = |\langle\varphi, \Psi - \sum_{i\in G}\psi_i\rangle| \leq \|\varphi\|\|\Psi - \sum_{i\in G}\psi_i\| < \|\varphi\|\varepsilon = \varepsilon',$$

waar gebruik is gemaakt van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. Omdat dit voor alle $\varepsilon' > 0$ kan, zijn de twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk. We mogen dus oneindige sommen in of uit het inproduct trekken.

Definitie 1.7. *Een deelverzameling* $\{v_i\}_{i\in I}$ *van* H *heet* ***volledig*** *wanneer elke* $\varphi \in H$ *kan worden geschreven als*

$$\varphi = \sum_{i\in I} c_i v_i,$$

voor zekere coëfficiënten $c_i \in \mathbb{C}$.

Definitie 1.8. *Een deelverzameling* $\{v_i\}_{i\in I}$ *van* H *heet* ***orthonormaal*** *wanneer deze de eigenschap* $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ *heeft. Hier is* δ_{ij} *de kroneckerdelta, gedefinieerd als*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

Definitie 1.9. *Een* ***orthonormale basis*** *van* H *is een deelverzameling* $\{v_i\}_{i\in I}$ *van* H *die orthonormaal en volledig is.*

Vanaf hier zal ik gewoon basis zeggen en de orthonormaliteit van een basis impliciet aannemen.

Lemma 1.10. *Zij* $\{v_i\}_{i\in I}$ *een basis van* H. *Dan geldt voor alle* $\varphi \in H$ *dat*

$$\varphi = \sum_{i\in I}\langle v_i, \varphi\rangle v_i,$$

en

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle v_i, \varphi\rangle|^2.$$

Bewijs. We nemen aan dat φ te schrijven is in termen van v_i met coëfficiënten c_i. Nu berekenen we voor alle $i \in I$ het inproduct $\langle v_i, \varphi\rangle$. Dit inproduct is

$$\langle v_i, \varphi\rangle = \langle v_i, \sum_j c_i v_j\rangle = \sum_j c_j\langle v_i, v_j\rangle = c_i.$$

Nu kunnen we ook de lengte van φ vinden. Deze is

$$\|\varphi\|^2 = \langle\sum_j c_j v_j, \sum_i c_i v_i\rangle = \sum_{i,j} c_i\overline{c_j}\langle v_j, v_i\rangle = \sum_i |c_i|^2.$$

$\square$

Stelling 1.11. *De volgende eigeschappen gelden voor alle hilberruimten H:*

(i) Elke hilbertruimte heeft een basis.

*(ii) Alle bases van een hilberruimte hebben dezelfde kardinaliteit. Deze kardinaliteit noemen we de **dimensie** van de hilbertruimte.*

(iii) Twee hilbertruimtes zijn isomorf desda ze dezelfde dimensie hebben.

Gevolg 1.12. *Een hilbertruimte H is separabel desda er een aftelbare basis van H bestaat.*

Een bewijs(schets) wordt gegeven in [5]. Van alle hilbertruimtes die ik ga behandelen neem ik aan dat ze separabel zijn. Er mag dus altijd vanuit worden gegaan dat er een aftelbare basis voor de hilbertruimte bestaat.

Definitie 1.13. *Zij H een hilbertruimte. Een **operator** a op H is een lineaire afbeelding $a : H \to H$.*

Ik ga er in deze scriptie van uit dat alle operatoren begrensd zijn, d.w.z. voor alle $\psi \in H$ bestaat er een eindige $K > 0$ zodanig dat

$$\|a\psi\| \leq K\,\|\psi\|. \tag{2}$$

Dit komt overeen met het zeggen dat de norm van een operator, gedefinieerd door

$$\|a\| = \sup\{\|a\psi\|\,|\psi \in H, \|\psi\| = 1\},$$

een eindige waarde aanneemt. Dat deze uitdrukking een norm is, volgt uit de lineairiteit van operatoren en uit de eigenschappen van de norm op H zelf. Verder geldt er voor elke $\psi \in H$ dat

$$\|a\psi\| \leq \|\psi\|\|a\|.$$

Dit volgt direct uit de definitie van de operatornorm en de lineairiteit van operatoren. Het is duidelijk dat wanneer er een $K > 0$ bestaat, zodat ongelijkheid 2 geldt, dan $\|a\| \leq K$. Andersom kan er, wanneer $\|a\| < \infty$, simpelweg $K = \|a\|$ worden gekozen.

Definitie 1.14. *De **geadjungeerde** a^* van een begrensde operator a is gedefinieerd door*

$$\langle \varphi, a\psi \rangle = \langle a^*\varphi, \psi \rangle \quad \textit{voor alle } \varphi, \psi \in H.$$

Voor de bekende eindig-dimensionale vectorruimte $\mathbb{C}^k$ is een operator een matrix en de geadjungeerde operator komt overeen met de complex-conjungeerde en getransponeerde van deze matrix.

We kunnen snel inzien dat voor elke operator a en voor alle $\psi, \varphi \in H$ geldt dat $\langle a\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, a^*\psi \rangle$ en dat $a^{**} = a$, want

$$\langle a\varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, a\varphi \rangle} = \overline{\langle a^*\psi, \varphi \rangle} = \langle \varphi, a^*\psi \rangle,$$

en dus ook $\langle \varphi, a\psi \rangle = \langle a^*\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, a^{**}\psi \rangle$, wat alleen kan als $a^{**} = a$.

Definitie 1.15. *Zij H een hilbertruimte. Een afbeelding $a : H \to H$ heet een* ***anti-lineaire operator*** *wanneer $a(\psi + \varphi) = a(\psi) + a(\varphi)$ en $a(\lambda\psi) = \bar{\lambda}a(\psi)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\psi, \varphi \in H$. De (anti-lineaire) geadjungeerde a^* van a is gedefinieerd door*

$$\langle \varphi, a\psi \rangle = \overline{\langle a^*\varphi, \psi \rangle} = \langle \psi, a^*\varphi \rangle \qquad \text{voor alle } \psi, \varphi \in H.$$

De ruimte van begrensde operatoren noemen we $B(H)$ en die van begrensde anti-lineaire operatoren $B_a(H)$. De ruimte van lineaire operatoren waarvoor geldt dat a ook nog **zelfgeadjungeerd** is, d.w.z. $a = a^*$, noemen we $B(H)_{sa}$.

Het is goed om iets te zeggen over de existentie van de geadjungeerde. Het bestaan van de geadjungeerde voor het lineaire en het anti-lineaire geval volgt uit de Riesz-Fréchet stelling:

Stelling 1.16. *De afbeelding $\psi \mapsto f_\psi$, waar $f_\psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle$, is een anti-lineaire isomorfisme $H \to H^*$ (waar H^* de duale van H is, d.w.z. de ruimte van begrensde functionalen $f : H \to \mathbb{C}$).*

Nu gaan we geadjungeerde construeren. We kunnen voor alle $a \in B(H)$ de functionaal f_ψ^a definiëren door $f_\psi^a(\varphi) = \langle \psi, a\varphi \rangle$ voor $\psi, \varphi \in H$. Dankzij de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz geldt er dat $|f_\psi^a(\varphi)| \leq \|\psi\|\|\varphi\|\|a\|$. Bovendien hebben $\|\psi\|$, $\|\varphi\|$ en $\|a\|$ een eindige waarde, dus f_ψ^a is begrensd. Nu kunnen we de Riesz-Fréchet stelling toepassen. Hieruit volgt dat er een unieke $\psi' \in H$ bestaat zodanig dat $f_\psi^a(\varphi) = \langle \psi', \varphi \rangle$. We definiëren $a^* : H \to H$ door $a^*\psi = \psi'$, zodat a^* per constructie aan de eigenschappen van de geadjungeerde voldoet. Deze constructie is lineair, want het inproduct op H is lineair en het isomorfisme uit de Riesz-Fréchet stelling is lineair. Dus a^* is een lineaire afbeelding. Ook is a^* begrensd: er geldt voor alle $\psi, \varphi \in H$ dat $|\langle a^*\varphi, \psi \rangle| = |\langle \varphi, a\psi \rangle| \leq \|\varphi\|\|\psi\|\|a\|$ en door $\varphi = a^*\psi$ te kiezen volgt er meteen dat $\|a^*\psi\| \leq \|a\|\|\psi\|$, maar $\|a\|$ is eindig, dus a^* is begrensd. We hebben een unieke begrensde lineaire operator a^* die aan de eisen van de geadjungeerde voldoet.

In het anti-lineaire geval is de constructie bijna hetzelfde. Nu moet f_ψ^a worden gedefinieerd als $f_\psi^a(\varphi) = \langle a\varphi, \psi \rangle$ en via Riesz-Fréchet kiezen we ψ' zodanig dat $f_\psi^a(\varphi) = \langle \psi', \varphi \rangle$.

Laat ons nu naar een speciaal type operatoren kijken.

Lemma 1.17. *Zij u een operator op hilbertruimte H, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(i) $u^* = u^{-1}$,

(ii) *u is surjectief en voor alle $\psi, \varphi \in H$ geldt $\langle u\varphi, u\psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle$.*

Bewijs. $(i) \Rightarrow (ii)$: De inverse van u is expliciet gegeven, dus u is inverteerbaar en dus surjectief. Ook kunnen we voor willekeurige $\psi, \varphi \in H$ het inproduct $\langle u\varphi, u\psi \rangle$ uitrekenen, namelijk $\langle u\varphi, u\psi \rangle = \langle \varphi, u^*u\psi \rangle = \langle \varphi, uu^{-1}\psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Er geldt dat $\langle\varphi,\psi\rangle = \langle u\varphi, u\psi\rangle = \langle u^*u\varphi,\psi\rangle$ voor elke keuze van $\psi,\varphi \in H$. Kies nu $\psi = \varphi$. Dan geldt dus dat $\|\psi\|^2 = \langle u^*u\psi,\psi\rangle$ voor willekeurige ψ. Dit is alleen mogelijk als $u^*u = \mathrm{id}_H$ de identiteitsoperator is. Omdat $(\mathrm{id}_H)^* = \mathrm{id}_H$, is $(u^*u)^* = uu^* = u^*u = \mathrm{id}_H$, dus $u^* = u^{-1}$. $\square$

Definitie 1.18. *Een lineaire operator die aan de uitspraken in lemma 1.17 voldoet heet* ***unitair****. De verzameling van unitaire operatoren op H noteren we als $U(H)$.*

Als afbeelding u uit lemma 1.17 anti-linear is, dan noemen we u **anti-unitair**. De equivalentie van uitspraken *(i)* en *(ii)* geldt nog steeds, maar er moet wel de geadjungeerde voor anti-lineaire operatoren worden gebruikt. Het bewijs gaat volledig analoog en zal ik daarom niet geven. De verzameling van anti-unitaire operatoren noemen we $U_a(H)$.

Unitaire transformaties staan centraal in de functionaalanalyse en de kwantummechanica. Ze hebben ze te maken met basistransformaties van hilbertruimtes. In de fysica zijn ze (samen met de anti-unitaire operatoren) de afbeeldingen die de overgangswaarschijnlijkheid van kwantumtoestanden onveranderd laten. Ik zal eerst de samenhang tussen bases en unitaire/anti-unitaire operatoren toelichten.

Lemma 1.19. *Stel H heeft basis $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en zij $u \in U(H) \cup U_a(H)$. Dan vormt $\{uv_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ een basis van H.*

Bewijs. Stel u unitair. We weten dat onder unitaire transformaties het inproduct behouden blijft, dus voor alle $i,j \in \mathbb{N}$ geldt $\langle uv_i, uv_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, dus $\{uv_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is een orthonormale verzameling.

Nu willen we de volledigheid van $\{uv_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ aantonen. Stel $\psi \in H$. We definiëren $\psi' = u^*\psi$. Omdat $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ volledig is, kunnen we ψ' schrijven als

$$\psi' = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle v_i, \psi'\rangle v_i.$$

We kunnen nu ψ terug substitueren om te vinden dat

$$u^*\psi = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle uv_i, \psi\rangle v_i.$$

Door u op beide kanten van de vergelijking toe te passen, vinden we

$$\psi = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle uv_i, \psi\rangle uv_i.$$

Stel u anti-unitair, dan gaat het bewijs analoog. $\langle uv_i, uv_j\rangle = \langle v_j, v_i\rangle = \delta_{ij}$, dus $\{uv_i\}$ orthonormaal. Als we nu ψ en ψ' op dezelfde manier definiëren, dan volgt net zo

$$\psi = u\sum_{i\in\mathbb{N}} \langle \psi, uv_i\rangle v_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle uv_i, \psi\rangle uv_i,$$

dus $\{uv_i\}$ is volledig.

In beide gevallen is $\{uv_i\}$ orthonormaal en volledig, dus $\{uv_i\}$ is een basis. $\square$

Het omgekeerde idee van dit lemma is overigens ook waar. Stel dat $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en$\{v'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ twee bases van H zijn, dan bestaat er een unitaire operator u op H zodat $\{uv_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{v'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Deze is gegeven door

$$u\psi = u\sum_{i\in\mathbb{N}} c_i v_i \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i v'_i.$$

We kunnen laten zien dat u unitair is. Stel dat $\psi, \varphi \in H$ willekeurig met coëfficiënten c_i, d_i t.o.v. de basis $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en c'_i, d'_i t.o.v. de basis $\{v'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dan kunnen we het inproduct van hun beeld uitschrijven, namelijk

$$\langle u\varphi, u\psi\rangle = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \langle d_j v'_j, c_i v'_i\rangle = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} c_i \overline{d_j}\delta_{ij} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \langle d_j v_j, c_i v_i\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle.$$

Verder kunnen we de inverse u^{-1} expliciet geven, namelijk

$$u^{-1}\psi = u^{-1}\sum_{i\in\mathbb{N}} c'_i v'_i \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} c'_i v_i.$$

Er is nog een andere belangrijke type operator, de projecties.

Definitie 1.20. *Een operator e op H heet een **projectie**, wanneer hij voldoet aan $e = e^2 = e^*$. Wanneer er ook geldt dat zijn beeld eH een eendimensionale vectorruimte is, dan is e een **eendimensionale projectie**. De verzameling van eendimensionale projecties op H noemen we $\mathscr{P}_1(H)$.*

Lemma 1.21. *Zij e een eendimensionale operator op H. Dan is e van de vorm $e = e_\varphi$, waar e_φ gedefinieerd is door*

$$e_\varphi\psi = \langle\varphi, \psi\rangle\varphi \quad \textit{voor alle } \psi \in H,$$

voor een zekere $\varphi \in H$, $\|\varphi\| = 1$. Bovendien is deze φ uniek bepaald op een complexe fase na, d.w.z. $e_\varphi = e_{\varphi'}$ d.e.s.d.a. $\varphi' = z\,\varphi$ voor een zeker complex getal $z \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

Bewijs. Stel e is een eendimensionale projectie op H, dan is eH een eendimensionale vectorruimte. Kies nu een $\varphi \in eH$ met $\|\varphi\| = 1$ en stel $e\varphi' = \varphi$ voor een zekere $\varphi' \in H$. Omdat $e^2 = e$, is $e\varphi = e^2\varphi' = e\varphi' = \varphi$. Voor alle $\psi \in H$ is $e\psi = \lambda\varphi$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{C}$, want eH is eendimensionaal. Maar $e^* = e$, dus $\langle\varphi, \psi\rangle = \langle e\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, e\psi\rangle = \lambda\|\varphi\| = \lambda$. Hieruit volgt voor alle $\psi \in H$ dat $e\psi = \langle\varphi, \psi\rangle\varphi = e_\varphi\psi$. We willen alleen nog laten zien dat e_φ aan de eisen van een projectie voldoet.

De lineairiteit van e_φ volgt uit de lineairiteit van het tweede argument van het inproduct. Voor alle $\psi \in H$ geldt $(e_\varphi)^2\psi = e_\varphi\langle\varphi, \psi\rangle\varphi = \langle\varphi, \psi\rangle\varphi$, dus $(e_\varphi)^2 = e_\varphi$. Voor alle $\psi, \chi \in H$ geldt $\langle\chi, e_\varphi\psi\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle\langle\chi, \varphi\rangle = \langle e_\varphi\chi, \psi\rangle$, dus

$(e_\varphi)^* = e_\varphi$. Verder is $e_\varphi H = eH$, want e_φ is lineair, dus $\mathbb{C} \cdot \varphi \subseteq e_\varphi H$, en voor alle $\psi \in H$ is $e_\varphi \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi \in \mathbb{C} \cdot \varphi = eH$. Dus e_φ is een eendimensionale projectie.

Stel $e_\varphi = e_{\varphi'}$ voor een zekere $\varphi' \in H$, dan geldt er voor alle $\psi \in H$ dat $\langle \varphi, \psi \rangle \varphi = \langle \varphi', \psi \rangle \varphi'$ en i.h.b. $\langle \varphi, \varphi' \rangle \varphi = \varphi'$ en $\langle \varphi', \varphi \rangle \varphi' = \varphi$. Dit samen geeft $\varphi' = |\langle \varphi, \varphi' \rangle|^2 \varphi'$, oftewel $z = \langle \varphi, \varphi' \rangle \in \mathbb{T}$. □

Zij $(v_i)_i \in \mathbb{N}$ een basis, dan is

$$\mathrm{id}_H = \sum_{i \in \mathbb{N}} e_{v_i}, \tag{3}$$

want $\sum_i e_{v_i} \psi = \sum_i \langle v_i, \psi \rangle v_i = \psi$ voor alle $\psi \in H$.

Als laatste wil ik graag opmerken dat een willekeurige operator kan worden beschreven door te kijken naar hoe hij de basisvectoren transformeert. Hiervoor vind ik het handig de fysische bra-ket notatie te gebruiken. Zo wordt met $\langle \varphi|$ de functionaal $\psi \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle$ en met $|\psi\rangle\langle\varphi|$ de operator $\phi \mapsto \langle \varphi, \phi \rangle \psi$ bedoeld. Ook kan elke eendimensionale projectie worden geschreven als $|\psi\rangle\langle\psi|$ voor een zekere $\psi \in H$ met $\|\psi\| = 1$.

Lemma 1.22. *Zij $(v_i)_i \in \mathbb{N}$ een basis voor H. Dan geldt er voor elke $a \in B(H)$ dat*

$$a = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |v_j\rangle\langle v_j|\, a \,|v_i\rangle\langle v_i| = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \langle v_j, a v_i \rangle |v_j\rangle\langle v_i|.$$

Bewijs. D.m.v. vergelijking 3 en de lineairiteit van operatoren, weten we dat

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} |v_j\rangle\langle v_j|\, a \,|v_i\rangle\langle v_i| = \mathrm{id}_H a \, \mathrm{id}_H = a.$$

Zij $\psi \in H$ willekeurig. Dan is $\psi = \sum_i \langle v_i, \psi \rangle v_i$ en, door de lineairiteit van a, is $a\psi = \sum_i \langle v_i, \psi \rangle a v_i$. Nu zien we ook dat

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} \langle v_j, a v_i \rangle |v_j\rangle\langle v_i|\psi = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \langle v_i, \psi \rangle \langle v_j, a v_i \rangle v_j = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \langle v_j, a\psi \rangle v_j = a\psi.$$

Dit geldt voor willekeurige $\psi \in H$, dus aan de gelijkheid van de operatoren is voldaan. □

Dit valt te vergelijken met matrices. Net zoals A_{ij} het matrixelement op de i-ste rij van de j-ste kolom is en staat voor het inproduct van e_j met het beeld van e_i onder A (met $(e_i)_{\imath=1}^k$ de standaardbasis van $\mathbb{C}^k$), is $|v_i\rangle\langle v_i|\, a \,|v_j\rangle\langle v_j|$ precies het inproduct tussen v_i en het beeld van v_j.

1.2 Begrippen in eindige dimensie

Vanaf nu neem ik aan dat elke hilbertruimte H eindig-dimensionaal is met $\dim(H) = n$. Dan zijn meteen alle operatoren begrensd en continu. Ook zijn alle feiten uit de lineaire algebra te gebruiken. Alle stellingen en definities uit het vorige hoofdstuk zijn uiteraard nog steeds van toepassing.

Omdat zelfgeadjungeerde operatoren in het eindige geval gewoon hermitische matrices zijn, weten we dat ze diagonaliseerbaar zijn, d.w.z. dat de eigenvectoren $(v_i)_{i=1}^n$ van een $a \in B(H)_{sa}$ een orthonormale basis vormen en dat $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_{v_i}$, genaamd de **spectrale decompositie** [3]. Verder zijn alle eigenwaarden van zelfgeadjungeerde operatoren reëel.

Lemma 1.23. *Zij $a \in B(H)$ en $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n)$ twee willekeurige bases van H. Dan geldt de gelijkheid*

$$\sum_{i=1}^n \langle v_i, av_i \rangle = \sum_{j=1}^n \langle w_j, aw_j \rangle.$$

Bewijs. We gebruiken dat $\sum_{i=1}^n e_{v_i} = \sum_{j=1}^n e_{w_j} = \mathrm{id_H}$. Omschrijven geeft

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \langle v_i, av_i \rangle &= \sum_{i,j} \langle v_i, e_{w_j} av_i \rangle = \sum_{i,j} \langle w_j, av_i \rangle \langle v_i, w_j \rangle = \sum_{i,j} \langle e_{v_i} a^* w_j, w_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle w_j, aw_j \rangle.\end{aligned}$$

□

Dit leidt tot de definitie van het spoor van een operator.

Definitie 1.24. *Zij $a \in B(H)$ en $(v_1, \ldots, v_n)$ een basis van H. Dan is het **spoor** van a gedefinieerd als*

$$\mathrm{Tr}(a) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, av_i \rangle.$$

Dankzij lemma 1.23 weten we dat dit voor elke $a \in B(H)$ eenduidig gedefinieerd is. Het spoor heeft een aantal eigenschappen.

Lemma 1.25. *Voor het spoor gelden de volgende eigenschappen:*

(i) *Het spoor is een lineaire afbeelding.*

(ii) $\mathrm{Tr}(a) = \overline{\mathrm{Tr}(a^*)}$ *voor alle $a \in B(H)$.*

(iii) *Voor alle $a, b \in B(H)$ geldt dat $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ (Dus het spoor is invariant onder cyclische permutaties van operatoren).*

(iv) Zij u een unitair, dan $\mathrm{Tr}(uau^*) = \mathrm{Tr}(a)$. *Zij u een anti-unitair, dan* $\mathrm{Tr}(ua^*u^*) = \mathrm{Tr}(a)$.

(v) Zij $a \in B(H)$ diagonaliseerbaar met spectrale decompositie $\sum_i \lambda_i e_{v_i}$, dan is het spoor $\mathrm{Tr}(a) = \sum_i \lambda_i$.

Bewijs. We bewijzen elke eigenschap voor de hilbertruimte H met basis $(v_1, ..., v_n)$.

(i) Zij $a, b \in B(H)$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, dan

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\lambda a + \mu b) &= \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, (\lambda a + \mu b) v_i \rangle = \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, a v_i \rangle + \mu \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, b v_j \rangle \\ &= \lambda \,\mathrm{Tr}(a) + \mu \,\mathrm{Tr}(b).\end{aligned}$$

(ii) Zij $a \in B(H)$, dan

$$\mathrm{Tr}(a) = \sum_i \langle v_i, a v_i \rangle = \sum_i \langle a^* v_i, v_i \rangle = \sum_i \overline{\langle v_i, a^* v_i \rangle} = \overline{\mathrm{Tr}(a^*)}.$$

(iii) Laat ons a en b schrijven als in lemma 1.22. Dan is het spoor gelijk aan

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(ab) &= \mathrm{Tr}(\sum_{i,j,k,l} |v_j\rangle\langle v_j|a|v_i\rangle\langle v_i||v_l\rangle\langle v_l|b|v_k\rangle\langle v_k|) \\ &= \mathrm{Tr}(\sum_{i,j,k} |v_j\rangle\langle v_j|a|v_i\rangle\langle v_i|b|v_k\rangle\langle v_k|) \\ &= \sum_{i,j} \langle v_i|a|v_j\rangle\langle v_j|b|v_i\rangle,\end{aligned}$$

maar $\langle v_i|a|v_j\rangle, \langle v_j|b|v_i\rangle \in \mathbb{C}$, dus we mogen ze omdraaien. We concluderen dat

$$\mathrm{Tr}(ab) = \sum_{i,j} \langle v_j|b|v_i\rangle\langle v_i|a|v_j\rangle = \sum_j \langle v_j|ba|v_j\rangle = \mathrm{Tr}(ba).$$

(iv) Zij $a \in B(H)$. Stel $u \in U(H)$. Merk op dat $(u^*v_1, ..., u^*v_n)$ een basis van H zijn, dus we kunnen lemma 1.23 gebruiken om te vinden dat

$$\mathrm{Tr}(uau^*) = \sum_i \langle v_i, uau^* v_i \rangle = \sum_i \langle u^* v_i, au^* v_i \rangle = \sum_i \langle v_i, a v_i \rangle = \mathrm{Tr}(a).$$

Stel $u \in U_a(H)$, dan net zo

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(ua^*u^*) &= \sum_i \langle v_i, ua^*u^* v_i \rangle = \sum_i \langle a^*u^* v_i, u^* v_i \rangle = \sum_i \langle a^* v_i, v_i \rangle \\ &= \sum_i \langle v_i, a v_i \rangle = \mathrm{Tr}(a).\end{aligned}$$

(v) Merk op dat de eigenvectoren $(w_i)_{i=1}^n$ van a een basis voor H vormen. Nu volgt meteen dat

$$\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(\sum_i \lambda_i e_{w_i}) = \sum_i \langle w_i, \lambda_i w_i \rangle = \sum_i \lambda_i \langle e_{w_i}, e_{w_i} \rangle = \sum_i \lambda_i.$$

$\square$

Propositie 1.26. *Zij a een operator op H. De volgende eigenschappen die a kan hebben, zijn equivalent:*

(i) $\langle \psi, a\psi \rangle \geq 0$ *voor alle* $\psi \in H$.

(ii) $a^* = a$ *en alle eigenwaarden van a zijn positief.*

(iii) $a = c^2$ *voor een hermitische operator c.*

(iv) $a = b^* b$ *voor operator b.*

Bewijs. $(i) \Rightarrow (ii)$: Voor willekeurige $\psi \in H$ geldt

$$2i \cdot \mathrm{Im}(\langle \psi, a\psi \rangle) = \langle \psi, a\psi \rangle - \overline{\langle \psi, a\psi \rangle} = \langle \psi, a\psi \rangle - \langle \psi, a^* \psi \rangle,$$

maar $\mathrm{Im}(\langle \psi, a\psi \rangle) = 0$ vanwege (i), dus $\langle \psi, a\psi \rangle = \langle \psi, a^* \psi \rangle$. Voor willekeurige operator b en vectoren $\varphi, \chi \in H$ geldt

$$\begin{aligned} 4\langle \chi, b\varphi \rangle &= \langle \chi + \varphi, b(\chi + \varphi) \rangle - \langle \chi - \varphi, b(\chi - \varphi) \rangle \\ &\quad + i \langle \chi - i\varphi, b(\chi - i\varphi) \rangle - i \langle \chi + i\varphi, b(\chi + i\varphi) \rangle. \end{aligned}$$

Hieruit volgt meteen dat $b = 0$ desda $\langle \psi, b\psi \rangle = 0$ voor alle $\psi \in H$. Kies $b = a - a^*$, zodat voor alle $\psi \in H$ $\langle \psi, b\psi \rangle = 0$, dan weten we dat $a^* = a$. Ook hebben we nu dat alle eigenwaarden reëel moeten zijn, maar stel $\lambda < 0$, dan spreekt dat (i) tegen, dus alle eigenwaarden zijn positief.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Definieer $c = \sqrt{a}$, waar

$$\sqrt{a} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} e_{v_i}$$

voor eigenvectoren e_{v_i} en bijbehorende eigenwaarden λ_i. $\sqrt{a}$ is goed gedefinieerd, want $\lambda_i \geq 0$, en is $\sqrt{a}$ een hermitische operator die aan de gevraagde eis voldoet.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Triviaal, want $b = c$ voldoet.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Dit is duidelijk, want $\langle \psi, a\psi \rangle = \langle \psi, b^* b\psi \rangle = \|b\psi\|^2 \geq 0$. $\square$

Een operator die aan één van deze eisen voldoet heet **positief**.

Definitie 1.27. *Een positieve operator ρ op H heet een **dichtheidsoperator** wanneer ρ voldoet aan*

$$\mathrm{Tr}(\rho) = 1.$$

De verzameling van dichtheidsoperatoren op H noteren we als $\mathscr{D}(H)$.

In het bijzonder zijn eendimensionale projecties op H dichtheidsoperatoren, want wanneer we de projectie e_ψ bekijken, dan kunnen we een basis kiezen waar ψ het eerste element is, en omdat de andere elementen van de basis loodrecht op ψ staan is $\mathrm{Tr}(e_\psi) = \|\psi\|^2 = 1$.

Het volgende begrip is van belang in de context van dichtheidsoperatoren.

Definitie 1.28. *Een verzameling C heet **convex** wanneer voor alle $x, y \in C$ en $t \in [0,1]$ geldt dat*

$$(tx + (1-t)y) \in C.$$

*De **rand** ∂C van een convexe verzameling C bestaat uit alle $x \in C$ waarvoor de eis geldt dat*

$$\text{als } x = ty + (1-t)z \text{ voor zekere } y, z \in C \text{ en } t \in (0,1), \text{ dan } x = y = z.$$

*Elementen uit de rand noemen we **extreme punten** van C.*

De ruimte van dichtheidsoperatoren is namelijk een convexe verzameling.

Propositie 1.29. *Zij H een hilbertruimte en $\mathscr{D}(H)$ de verzameling van dichtheidsoperatoren op H. Dan is $\mathscr{D}(H)$ een convexe verzameling.*

Bewijs. We moeten laten zien dat voor $\rho, \rho' \in \mathscr{D}(H)$ en $t \in [0,1]$ de operator $\tilde{\rho} = t\rho + (1-t)\rho'$ ook een dichtheidsoperator is. Het spoor is een lineaire afbeelding, dus $\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}) = t \cdot \mathrm{Tr}(\rho) + (1-t) \cdot \mathrm{Tr}(\rho') = t + (1-t) = 1$. Verder geldt er voor willekeurige $\psi \in H$ dat

$$\langle \psi, \tilde{\rho}\psi \rangle = t\langle \psi, \rho\psi \rangle + (1-t)\langle \psi, \rho'\psi \rangle \geq 0,$$

want $t, (1-t), \langle \psi, \rho\psi \rangle, \langle \psi, \rho'\psi \rangle \geq 0$. Dus $\tilde{\rho} \in \mathscr{D}(H)$. □

Om een gevoel voor dichtheidsoperatoren te krijgen, kijken we naar de dichtheidsoperatoren op $H = \mathbb{C}^2$. We gaan dit voorbeeld later nog gebruiken.

Lemma 1.30. *Elke dichtheidsoperator ρ op $\mathbb{C}^2$ is te schrijven als*

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}, \tag{4}$$

voor zekere $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{C}$. Ook geldt de ongelijkheid $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Bewijs. Zij ρ een dichtheidsoperator op $\mathbb{C}^2$ met matrixelementen ρ_{ij}. De operator ρ is zelfgeadjungeerd, want ρ is positief. Voor de matrixelementen betekent dit dat $\rho_{ij} = \overline{\rho_{ji}}$. Dus we kunnen de niet-diagonaalelementen schrijven als

$$\rho_{12} = \overline{\rho_{21}} = \frac{1}{2}(x - iy),$$

voor een zekere $x, y \in \mathbb{R}$. Ook kunnen we concluderen dat de twee diagonaalelementen reël moeten zijn. Deze elementen moeten opgeteld 1 zijn, immers het spoor is $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$. Door deze eis kunnen we voor een zekere $z \in \mathbb{R}$ de diagonaaltermen ρ_{11} en ρ_{22} schrijven als

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2}(1+z), \\ \rho_{22} &= \frac{1}{2}(1-z), \end{aligned}$$

zodat ρ_{11} en ρ_{22} optellen tot 1. Tenslotte moeten de eigenwaarden van ρ positief zijn, omdat ρ een positieve operator is. Het karakteristiek polynoom van ρ is

$$\begin{aligned} \det(\rho - \lambda \mathrm{I}_2) &= \frac{1}{4}((1+z-2\lambda)(1-z-2\lambda) - x^2 - y^2) \\ &= \frac{1}{4}((1-2\lambda)^2 - z^2 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

De nulpunten van dit polynoom zijn de eigenwaarden van ρ en moeten positief zijn. Dit geeft de ongelijkheid

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} \geq 0.$$

Hieruit volgt de afschatting

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

□

Propositie 1.31. *Er bestaat een isomorfisme (van compacte convexe verzamelingen) φ tussen de gesloten eenheidsbal*

$$B^3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$$

en $\mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$, de verzameling van dichtheidsoperatoren op $\mathbb{C}^2$.

Dit isomorfisme $\varphi : B^3 \to \mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$ is gegeven door

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

en beeldt de rand $\partial B^3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ af op de dichtheidsoperatoren waarvoor geldt $\rho = \rho_\psi$ voor zekere eenheidsvectoren ψ (dit zijn de eendimensionale projecties).

Bewijs. Dat φ welgedefinieerd en surjectief is, volgt direct uit lemma 1.30. De injectiviteit volgt triviaal uit de definitie van φ. We bewijzen dat φ een isomorfisme voor convexe sommen is. Daarna tonen we de correspondentie tussen de projecties op de eenheidsvectoren en de bolschil ∂B^3 aan.

Zij $(x,y,z),(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in B^3$ en $t \in [0,1]$. Dan

$$\begin{aligned}
&\varphi(t(x,y,z) + (1-t)(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}))\\
&\qquad = \varphi((\tilde{x} + t(x-\tilde{x}), \tilde{y} + t(y-\tilde{y}), \tilde{z} + t(z-\tilde{z})))\\
&\qquad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\tilde{z}+t(z-\tilde{z}) & \tilde{x}-i\tilde{y}+t(x-iy-\tilde{x}+i\tilde{y}) \\ \tilde{x}+i\tilde{y}+t(x+iy-\tilde{x}-i\tilde{y}) & 1-\tilde{z}-t(z-\tilde{z}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Op dezelfde manier is

$$\begin{aligned}
&t\varphi((x,y,z)) + (1-t)\varphi((\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}))\\
&\qquad = \frac{t}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} + \frac{1-t}{2}\begin{pmatrix} 1+\tilde{z} & \tilde{x}-i\tilde{y} \\ \tilde{x}+i\tilde{y} & 1-\tilde{z} \end{pmatrix}\\
&\qquad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\tilde{z}+t(z-\tilde{z}) & \tilde{x}-i\tilde{y}+t(x-iy-\tilde{x}+i\tilde{y}) \\ \tilde{x}+i\tilde{y}+t(x+iy-\tilde{x}-i\tilde{y}) & 1-\tilde{z}-t(z-\tilde{z}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deze uitdrukkingen zijn gelijk, dus convexe sommen zijn behouden onder φ.

Zij $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ de projectie op een zekere $\psi = (\psi_1,\psi_2) \in \mathbb{C}^2$, $\|\psi\|^2 = 1$. Stel $\rho_\psi = \varphi(x,y,z)$ voor zekere $(x,y,z) \in B^3$. We bekijken hoe de operator ρ_ψ op een willekeurig element $\phi = (\phi_1,\phi_2) \in \mathbb{C}^2$ werkt:

$$\begin{aligned}
\rho_\psi(\phi) &= |\psi\rangle\langle\psi|\,\varphi = \langle\psi,\phi\rangle\psi\\
&= (\overline{\psi_1}\phi_1 + \overline{\psi_2}\phi_2)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi_1|^2\phi_1 + \psi_1\overline{\psi_2}\phi_2 \\ \overline{\psi_1}\psi_2\phi_1 + |\psi_2|^2\phi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Maar ook

$$\rho_\psi(\phi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+z)\phi_1 + (x-iy)\phi_2 \\ (x+iy)\phi_1 + (1-z)\phi_2 \end{pmatrix}.$$

Dus de volgende relaties moeten gelden

$$|\psi_1|^2 = \frac{1+z}{2}, \qquad |\psi_2|^2 = \frac{1-z}{2}, \qquad \psi_1\overline{\psi_2} = \frac{x-iy}{2}. \tag{6}$$

Voor complexe getallen geldt

$$|\psi|^2|\phi|^2 = \psi_1\overline{\psi_2\psi_1}\psi_2.$$

De relaties van (6) invullen geeft

$$\frac{(1+z)(1-z)}{4} = \frac{1-z^2}{4} = \frac{(x-iy)(x+iy)}{4} = \frac{x^2+y^2}{4},$$

waaruit volgt dat

$$x^2+y^2+z^2 = 1,$$

m.a.w. $(x,y,z) \in \partial B^3$. Andersom zal voor elke $(x,y,z) \in \partial B^3$, via vergelijkingen 6, een ψ te construeren zijn z.d.d. $\|\psi\|^2 = 1$ en $\varphi(x,y,z) = \rho_\psi$. Hieruit volgt dat de projecties op de eenheidsvectoren in $\mathbb{C}^2$ corresponderen met de elementen uit de bolschil ∂B^3. $\square$

We zien dus dat de afbeelding φ een isomorfie van convexe verzamelingen is. Een afbeelding die convexe sommen bewaart, noemen we **affien**. We zien ook dat de rand van de gesloten eenheidsbal correspondeert met de eendimensionale projecties. We verwachten dat deze projecties precies de elementen uit de rand van $\mathscr{D}(H)$ zijn. Dit kunnen we laten zien.

Lemma 1.32. *Voor hilbertruimte H geldt dat $\mathscr{P}_1(H) = \partial\mathscr{D}(H)$, m.a.w. de eendimensionale projecties van H zijn precies de rand van de verzameling van dichtheidsoperatoren als convexe verzameling.*

Bewijs. Stel $e_\psi = t\rho + (1-t)\rho'$ voor zekere $\rho, \rho' \in \mathscr{D}(H)$ en $t \in (0,1)$. Merk op dat ρ en ρ' i.h.b. zelfgeadjungeerd zijn, dus er bestaan spectrale decomposities $\rho = \sum_i \lambda_i e_{v_i}$ en $\rho' = \sum_i \lambda'_i e_{v'_i}$. Het is dus voldoende te laten zien dat ρ en ρ' beide één eigenvector hebben, namelijk ψ met eigenwaarde 1.

Er moet voor alle $\varphi \in H$ gelden dat

$$\langle\psi, \varphi\rangle\psi = (t\rho + (1-t)\rho')\varphi.$$

Stel $\langle\psi, \varphi\rangle = 0$, dan moet er gelden dat $-t\rho\varphi = (1-t)\rho'\varphi$. Neem het inproduct met φ, dan $-t\langle\varphi, \rho\varphi\rangle = (1-t)\langle\varphi, \rho'\varphi\rangle$. Omdat ρ en ρ' positieve operatoren zijn, is de linkerzijde ≤ 0 en de rechterzijde ≥ 0, waaruit volgt dat $\langle\varphi, \rho\varphi\rangle = \langle\varphi, \rho'\varphi\rangle = 0$. Er bestaan dus geen eigenvectoren in het orthogonale complement van ψ.

Stel $\varphi = \psi$, dan weten we nu dat $\mathrm{Tr}(\rho) = \langle\psi, \rho\psi\rangle$ en $\mathrm{Tr}(\rho') = \langle\psi, \rho'\psi\rangle$, maar ρ, ρ' zijn dichtheidsoperatoren, dus $\langle\psi, \rho\psi\rangle = \langle\psi, \rho'\psi\rangle = 1$. Bovendien is ψ een eenheidsvector, dus $\rho\psi = \rho'\psi = \psi$. We zien dat ψ een eigenvector van ρ en ρ' is met eigenwaarde 1. We zien nu dat $e_\psi \in \partial\mathscr{D}(H)$.

Stel $e \in \partial\mathscr{D}(H)$ en stel $e = t\rho + (1-t)\rho'$ voor zekere $\rho, \rho' \in \mathscr{D}(H)$ en $t \in (0,1)$, dan $\rho = \rho' = e$. We weten dat e een spectrale decompositie heeft, dus $e = \sum_i \lambda_i e_{v_i}$ voor zekere orthonormale eigenvectoren (v_i) met eigenwaarden $1 \geq \lambda_i > 0$. Merk op dat er moet gelden dat $\sum_i \lambda_i = 1$. Stel e is geen eendimensionale projectie, dan heeft e minstens twee eigenvectoren. Stel $\rho = e_{v_1}$ en $\rho' = \sum_{i \in I\setminus\{1\}} \lambda_i e_{v_i}$ en $t = \lambda_1$, dan $\rho \neq \rho'$ maar wel $e = t\rho + (1-t)\rho'$, wat een tegenspraak is. Dus $e \in \mathscr{P}_1(H)$. $\square$

1.3 Kwantummechanische interpretatie

Natuurkunde is een natuurwetenschap, zoals de naam impliceert. Men voert experimenten uit om wetmatigheden in de natuur te vinden. Hierin draait het om meetbare grootheden. In de kwantummechanica zijn toestanden gedefinieerd door kansverdelingen van meetbare grootheden. Deze kansverdelingen worden beschreven met eenheidsvectoren in de hilbertruimte en grootheden met zelfgeadjungeerde operatoren van de hilbertruimte (ook wel observabelen genoemd). Om deze reden is de volgende abstracte definitie van een kwantummechanische toestand gedefinieerd.

Definitie 1.33. *Een* ***toestand*** *op $B(H)$ is een complex-lineaire afbeelding*

$$\omega : B(H) \to \mathbb{C},$$

die voldoet aan

(i) $\omega(a^2) \geq 0$ *voor alle zelfgeadjungeerde* $a \in B(H)$ *(positiviteit),*

(ii) $\omega(\mathbb{1}_H) = 1$ *(genormeerd).*

Nu blijkt dat we toestanden met dichtheidsoperatoren kunnen identificeren.

Stelling 1.34. *Zij H een eindig-dimensionale Hilbertruimte. Er bestaat een bijectieve correspondentie tussen toestanden ω op $B(H)$ en dichtheidsoperatoren ρ op H, gegeven door*

$$\omega(a) = \mathrm{Tr}(\rho a).$$

Bewijs. Zij ω een toestand op H. Dan is $\rho \in B(H)$ z.d.d. $\omega(a) = \mathrm{Tr}(\rho a)$. Stel $\psi \in H$ en e_ψ de projectie op ψ. Dan is $\omega(e_\psi) = \mathrm{Tr}(\rho e_\psi) = \langle \psi, \rho\psi \rangle \geq 0$, want voor projecties e geldt $e = e^* = e^2$, m.a.w. ω is positief. Kies nu $a = \mathbb{1}_H$. Dan geldt $\mathrm{Tr}(\rho) = \omega(\mathbb{1}_H) = 1$ (genormeerdheid van ω), dus ρ is een dichtheidsoperator. Dus deze correspondentie is welgedefinieerd.

Stel $\omega, \tilde{\omega}$ toestanden op H z.d.d. $\omega(a) = \mathrm{Tr}(\rho a) = \tilde{\omega}(a)$ voor een zekere dichtheidsoperator ρ. Dan geldt voor alle $a \in B(H)$ dat $\omega(a) = \tilde{\omega}(a)$, m.a.w. $\omega = \tilde{\omega}$. Dus de correspondentie is injectief.

Stel ρ is een dichtheidsoperator op $B(H)$ z.d.d. $\mathrm{Tr}(\rho a) = \omega(a)$ voor een zekere afbeelding $\omega : B(H) \to \mathbb{C}$. Het spoor is lineair, dus ω is lineair. Bovendien zal $\omega(\mathbb{1}_H) = 1$ zeker gelden, want $\mathrm{Tr}(\rho\,\mathbb{1}_H) = 1$. Stel $a \in B(H)$ is zelfgeadjungeerd. Kies een basis $(v_1, \ldots, v_n)$ voor H. Dan is het spoor van ρa^2 te schrijven als

$$\mathrm{Tr}(\rho a^2) = \mathrm{Tr}(a\rho a) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, a\rho a v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a v_i, \rho a v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a v_i, \rho a v_i \rangle.$$

Maar ρ is een positieve operator dus alle termen van de som zijn positief, oftewel aan de positiviteit van ω is voldaan. Nu weten we dat ω een toestand is en dat de correspondentie surjectief is. $\square$

Merk op dat deze correspondentie precies de fysische betekenis van een toestand is. Zelfgeadjungeerde operatoren staan voor fysische grootheden die aan een systeem kunnen worden gemeten. De genoemde correspondentie is de verwachtingswaarde van zo'n grootheid voor de toestand ω. Wanneer een toestand correspondeert met een eendimensionale projectie, dan heet de toestand zuiver. Zo'n toestand wordt dan beschreven door een eenheidvector $\psi \in H$ (die uniek is op een complexe fase na) via zijn corresponderende projectie. Om precies deze reden worden eenheidsvectoren $\psi \in H$ vaak (zuivere) toestanden genoemd.

Een toestand die correspondeert met een dichtheidsoperator die niet een projectie is, heet een gemengde toestand. Een fysisch voorbeeld is een bundel fotonen die verschillend gepolariseerd zijn. De verhoudingen van de aantallen fotonen worden beschreven met de dichtheidsoperator.

2 De stellingen van Wigner, Kadison en Jacobson-Rickart-Kadison

In de kwantummechanica staat de overgangswaarschijnlijkheid tussen twee zuivere toestanden centraal. De overgangswaarschijnlijkheid van toestand ψ naar φ is gegeven door

$$\mathbb{P}(\psi \to \varphi) = |\langle \psi, \varphi \rangle|^2.$$

Het is duidelijk dat deze uitdrukking behouden is onder unitaire en anti-unitaire transformaties. We willen graag weten welke eisen we aan de voor ons interessante deelruimtes van $B(H)$ moeten stellen om deze overgangswaarschijnlijkheid te behouden.

2.1 De stelling van Wigner

Laten we de ruimte van eendimensionale projecties $\mathscr{P}_1(H)$ beschouwen. Elke projectie $e \in \mathscr{P}_1(H)$ is van de vorm $e = e_\psi$ (voor een eenheidsvector $\psi \in H$). Een unitaire of anti-unitaire afbeelding $u : H \to H$ induceert de bijectie

$$W : \mathscr{P}_1(H) \to \mathscr{P}_1(H), \quad W e_\psi = e_{u\psi} = u e_\psi u^*.$$

De vector $u\psi$ is een eenheidsvector (unitaire en anti-unitaire operatoren zijn isometrisch), dus W is welgedefinieerd. Merk op dat we u kunnen vervangen door $z\,u$ voor $z \in \mathbb{T} = \{z \in C |\, |z| = 1\}$ en dat dit nog steeds dezelfde W induceert. Voor projecties $e_\psi, e_\varphi \in \mathscr{P}_1(H)$ geldt dat

$$|\langle \psi, \varphi \rangle|^2 = \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi), \tag{7}$$

want $\sum_{i=1}^n \langle v_i, e_\psi e_\varphi v_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \varphi, \langle v_i, \psi \rangle v_i \rangle \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \langle \psi, \varphi \rangle$. Het is duidelijk dat de linkerzijde behouden is onder unitaire of anti-unitaire u, dus het spoor is ook behouden onder de bijectie W. Dit behoud van het spoor lijkt de gezochte symmetrie te zijn. De stelling van Wigner legt deze correspondentie helemaal vast:

Stelling 2.1. *Elke bijectie $W : \mathscr{P}_1(H) \to \mathscr{P}_1(H)$ die voor alle e_ψ, e_φ voldoet aan*

$$\mathrm{Tr}(W e_\psi W e_\varphi) = \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi), \tag{8}$$

neemt de vorm

$$W e_\psi = e_{u\psi} = u e_\psi u^*$$

aan, waarin $u : H \to H$ unitair of anti-unitair is en door W uniek, op een complexe fase na, bepaald is.

De stelling beschrijft dus symmetrieën van zuivere toestanden. We noemen de bijectie W die aan vergelijking (8) voldoet een **wignerautomorfisme**.

2.2 De stelling van Kadison

We zullen nu de ruimte van dichtheidsoperatoren $\mathscr{D}(H)$ in beschouwing nemen. Laat ons weer de unitaire en anti-unitaire transformaties van de hilbertruimte beschouwen. De belangrijke eigenschap van $\mathscr{D}(H)$ blijkt convexiteit te zijn.

Lemma 2.2. *Zij $u : H \to H$ een unitaire of anti-unitaire operator. Dan is de afbeelding*

$$K : \mathscr{D}(H) \to \mathscr{D}(H), \quad K(\rho) = u\rho u^*. \tag{9}$$

een affiene bijectie, m.a.w. een bijectie met behoud van convexe sommen, d.w.z. voor alle $t \in [0,1]$ en alle $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{D}(H)$ geldt

$$K(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) = tK(\rho_1) + (1-t)K(\rho_2).$$

Bewijs. Omdat u unitair of anti-unitair is, is het spoor onder u behouden, m.a.w.

$$\mathrm{Tr}(K\rho) = \mathrm{Tr}(u\rho u^*) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1,$$

dus $K\rho$ is een dichtheidsoperator en K is welgedefinieerd.

We kunnen de convexe som uitschrijven

$$\begin{aligned} K(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) &= u(t\rho_1 + (1-t)\rho_2)u^* = tu\rho_1 u * + (1-t)u\rho_2 u^* \\ &= tK(\rho_1) + (1-t)K(\rho_2), \end{aligned}$$

waaruit blijkt dat inderdaad convexe sommen behouden zijn. □

De stelling van Kadison beweert precies het omgekeerde.

Stelling 2.3. *Elke affiene bijectie $K : \mathscr{D}(H) \to \mathscr{D}(H)$ is van de vorm*

$$K(\rho) = u\rho u^*,$$

waar $u : H \to H$ unitair of anti-unitair is en door K uniek, op een complexe fase na, bepaald is.

We noemen zo'n affiene bijectie ook wel een **kadisonautomorfisme**. De stelling van Kadison beschrijft symmetrieën van dichtheidstoestanden, oftewel van toestanden in het algemeen. Het is dus algemener dan stelling Wigner. Het blijkt zelfs dat de stellingen van Wigner en de Kadison equivalent zijn, waarmee ik bedoel dat de één de ander impliceert. Dit wordt in het laatste hoofdstuk bewezen. Verder zijn ze equivalent met een derde stelling die we nu gaan behandelen.

2.3 De Jacobson-Rickart-Kadison stelling

De stellingen van Wigner en Kadison leggen eisen op deelruimtes van $B(H)$. We verwachten ook een bepaalde structuur op de gehele ruimte $B(H)$. Laat ons de volgende definities bekijken.

Definitie 2.4. *Zij $\alpha : B(H) \to B(H)$ een lineaire inverteerbare afbeelding die voldoet aan $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ en $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$, dan heet α een **automorfisme**. Wanneer $\alpha(ab) = \alpha(b)\alpha(a)$ en $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$, dan heet α een **anti-automorfisme**.*

Het is duidelijk dat voor een unitaire u de afbeelding

$$\alpha_u : B(H) \to B(H),\, u \mapsto uau^*, \tag{10}$$

een automorfisme van $B(H)$ is. Net zo is voor anti-unitaire u de afbeelding

$$\alpha_u : B(H) \to B(H),\, u \mapsto ua^*u^*, \tag{11}$$

een anti-automorfisme. Automorfismes en anti-automorfismes zijn voorbeelden van jordanafbeeldingen.

Definitie 2.5. *Een **jordanafbeelding** $\alpha : B(H) \to B(H)$ is een lineaire afbeelding die voldoet $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$ en $\alpha(a \circ b) = \alpha(a) \circ \alpha(b)$, waar het **jordanproduct** $\circ$ gedefinieerd is door*

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

*Een **jordanautomorfisme** is een bijectieve jordanafbeelding.*

De Jacobson-Rickart-Kadison stelling zegt dat er geen andere voorbeelden van jordanautomorfismes zijn.

Stelling 2.6. *Stel $\alpha : B(H) \to B(H)$ is een jordanautomorfisme. Dan is α gelijk aan vergelijking (10) voor een zekere unitaire u of gelijk aan vergelijking (11) voor een zekere anti-unitaire u. Deze u is in beide gevallen op een complexe fase na uniek bepaald.*

Deze stelling is equivalent met de stellingen van Wigner en Kadison, maar ik zal in het laatste hoofdstuk alleen laten zien dat de stelling van Wigner deze stelling impliceert.

3 Het tweedimensionale geval

We zullen als eerst de stellingen van Wigner en Kadison bewijzen voor $H = C^2$. Later gaan we het tweedimensionale geval van Wigner uitbreiden tot willekeurige eindig-dimensionale hilbertruimte. Voor nu willen we beginnen met de operatoren op $\mathbb{C}^2$ (dit zijn de complexe 2×2-matrices) op een effectievere manier te schrijven.

Een willekeurige 2×2-matrix a kunnen we schrijven door

$$a = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu \sigma_\mu,$$

voor zekere complexe getallen x_μ. Hier zijn σ_μ de **paulimatrices**, gedefinieerd als

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De paulimatrices hebben een aantal (triviaal te bewijzen) eigenschappen:

(i) $\sigma_\mu^2 = \sigma_0 = 1_2$ voor alle $\mu = 1, 2, 3$.

(ii) $\sigma_\mu^* = \sigma_\mu$ voor alle $\mu = 1, 2, 3$.

(iii) $-i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1_2$ waaruit meteen volgt dat:

(iv) $\sigma_{\alpha 1}\sigma_{\alpha 2} = i\sigma_{\alpha 3}$ voor alle cylische permutaties $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ van (123).

Voor ons zijn vooral de gevallen interessant waarin a een eendimensionale projectie of een dichtheidsoperator is. In beide gevallen is a zelf-geadjungeerd. We merken op dat $a^* = a$ precies geldt wanneer x_μ reëel zijn. Ook blijkt uit propositie 1.31 dat in beide gevallen moet gelden dat $x_0 = 1$ en dat $\|\mathbf{x}\| \leq 1$, waar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Voor de eendimensionale projecties moet dit worden aangescherpt tot $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Zij u een unitaire 2×2-matrix. Het is duidelijk dat uau^* ook een eendimensionale projectie of dichtheidsoperator is. Omdat σ_0 de identiteitsmatrix is, weten we dat $u\sigma_0 u^* = \sigma_0$. Hieruit volgt dat

$$u\left(\sum_{\mu=1}^{3} x_\mu \sigma_\mu\right) u^* = \sum_{\mu=1}^{3} (R\mathbf{x})_\mu \sigma_\mu,$$

voor een zekere afbeelding $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, waarvoor geldt dat $\|R\mathbf{x}\| \leq 1$. We kunnen ook $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ noemen, zodat we de uitdrukking compacter kunnen schrijven:

$$u(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})u^* = (R\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{12}$$

Aan de hand van deze uitdrukking kunnen we de afbeelding π maken, die u naar R stuurt. Het zal blijken dat $R \in SO(3)$.

Propositie 3.1. *Zij $\pi : U(2) \to SO(3)$, $u \mapsto R$, waar R impliciet gedefinieerd is door vergelijking (12). Dan is π een welgedefinieerde continue groepshomomorfisme en de restrictie van deze afbeelding tot $SU(2) \subseteq U(2)$ is een tweevoudige overdekking met kern $\{1_2, -1_2\}$.*

Voordat ik dit ga bewijzen, wil ik eerst een handig inproduct op de ruimte van complexe 2×2-matrices geven. Voor dit inproduct staan namelijk de paulimatrices orthogonaal op elkaar.

Propositie 3.2. *De afbeelding $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Tr} : M^2(\mathbb{C}) \times M^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^* B)$ is een inproduct en t.o.v. dit inproduct vormen de paulimatrices een orthogonale basis elk met norm $\sqrt{2}$.*

Bewijs. De sesquilineairiteit volgt uit de lineairiteit van het spoor en de anti-lineairiteit van de $*$-afbeelding. Stel dat a_{ij} de matrixelementen van een willekeurige matrix A zijn, dan is

$$\langle A, A \rangle_{Tr} = \mathrm{Tr}(A^* A) = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 \geq 0,$$

dus aan de positiviteit is ook voldaan. Stel nu dat $\langle A, A \rangle_{Tr} = 0$, dan moet dus gelden dat $a_{ij} = 0$ voor alle i, j, m.a.w. $A = 0$. We concluderen dat deze afbeelding ook positief-definiet is en dus een inproduct is.

Nu kunnen we simpelweg alle inproducten $\langle \sigma_\nu, \sigma_\mu \rangle_{Tr}$ berekenen:

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma_\mu, \sigma_\mu \rangle_{Tr} = 2 \quad \text{voor alle } \mu \in \{0, 1, 2, 3\}, \\
&\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle_{Tr} = \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle_{Tr} = 0, \\
&\langle \sigma_0, \sigma_3 \rangle_{Tr} = 1 - 1 = 0, \\
&\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{Tr} = i - i = 0, \\
&\langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle_{Tr} = \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle_{Tr} = 0.
\end{aligned}$$

We kunnen dus zeggen dat $\langle \sigma_\nu, \sigma_\mu \rangle_{Tr} = 2\delta_{\mu\nu}$. We wisten al dat elke matrix als een lineaire combinatie van paulimatrices kan worden geschreven, dus $\{\sigma_\mu\}$ vormt een orthogonale basis. $\square$

Nu volgt meteen dat R een lineaire afbeelding is met matrixelementen

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \langle \sigma_j, u \sigma_i u^* \rangle_{Tr}.$$

Ook geldt er dat $\|\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}\|_{Tr}^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Een belangrijke opmerking is dat voor unitaire of anti-unitaire u de afbeelding $A \mapsto uAu^*$ een isometrie t.o.v. dit inproduct is, want de absolute waarde van het spoor is behouden onder unitaire en anti-unitaire transformaties.

Als laatste wil ik graag opmerken dat de samenstelling van $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ met $\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ kan worden geschreven als,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu \sigma_\mu \sigma_\nu \\
&= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\,\sigma_0 + \sum_{\mu}\sum_{\nu\neq\mu} x_\mu y_\nu \sigma_\mu \sigma_\nu \\
&= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\,\sigma_0 + i((x_2y_3 - x_3y_2)\sigma_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\sigma_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\sigma_3),
\end{aligned}$$

d.m.v. de vierde eigenschap van de paulimatrices (die ik aan het begin van het hoofdstuk heb genoemd). Hieruit volgt dat

$$(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\,\sigma_0 + i(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Nu kan propositie 3.1 relatief gemakkelijk bewezen worden.

Bewijs. Zij $u \in U(2)$. We weten dat de afbeelding $A \mapsto uAu^*$ een isometrie is. Hieruit volgt voor willekeurige $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\|R\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2}\|(R\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}\|_{Tr}^2 = \frac{1}{2}\|u(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})u^*\|_{Tr}^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}\|_{Tr}^2 = \|\mathbf{x}\|^2,$$

oftewel $R \in O(3)$.

We merken op dat π continu is, want de matrixelementen van R zijn uit te drukken m.b.v. het spoor en dit is slechts een sommatie en vermenigvuldiging van matrixelementen van u, wat continue operaties zijn. Omdat $U(2)$ samenhangend is [6], π continu is en $\pi(1_2) = 1_3$, moet het beeld van π in het samenhangende component van $O(3)$, die de eenheid bevat, liggen. Deze component is $SO(3)$ en dus is π welgedefinieerd.

Het is duidelijk dat π een groepshomomorfisme is, want

$$uu'(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})u'^*u^* = u((R'\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\sigma})u^* = (RR'\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

m.a.w. $\pi(uu') = \pi(u)\pi(u)$.

Nu laten we zien dat π surjectief is. Zij $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ een willekeurige eenheidsvector. Dan definiëren we de unitaire 2×2-matrix u door

$$u = \cos(\frac{1}{2}\theta)\,\sigma_0 + i\sin(\frac{1}{2}\theta)\,\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Unitairiteit volgt uit het samenstellen van u met $u^* = \cos(\frac{1}{2}\theta)\,\sigma_0 - i\sin(\frac{1}{2}\theta)\,\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned}
uu^* &= \cos^2(\frac{1}{2}\theta)\,\sigma_0 - i\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)\,\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
&\quad + i\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)\,\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \sin^2(\frac{1}{2}\theta)\,(\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 \\
&= \cos^2(\frac{1}{2}\theta)\,\sigma_0 + \sin^2(\frac{1}{2}\theta)\,(\|\mathbf{y}^2\|\sigma_0 + i(\mathbf{y}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&= (\cos^2(\frac{1}{2}\theta) + \sin^2(\frac{1}{2}\theta))\sigma_0 \\
&= 1_2.
\end{aligned}$$

Dezelfde berekening geldt ook voor u^*u, dus $u^* = u^{-1}$. Verder is het snel te zien dat $\det(u) = 1$. Nu willen we berekenen hoe voor willekeurige $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ de matrix $u(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})u^* = (R\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}$ eruit ziet.

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})u^* &= (\cos(\frac{1}{2}\theta)\,\sigma_0 + i\sin(\frac{1}{2}\theta)\,\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\cos(\frac{1}{2}\theta)\,\sigma_0 - i\sin(\frac{1}{2}\theta)\,\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \cos^2(\frac{1}{2}\theta)\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma} + 2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
&\quad + \sin^2(\frac{1}{2}\theta)((\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{y}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \cos^2(\frac{1}{2}\theta)(\mathbf{y}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&\quad + 2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
&\quad + \sin^2(\frac{1}{2}\theta)((\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{y}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\,\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \cos(\theta)\,\mathbf{y}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma} + \sin(\theta)(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\sigma},
\end{aligned}$$

oftewel $R\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\,\mathbf{y} + \cos(\theta)\,\mathbf{y}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) + \sin(\theta)(\mathbf{x}\times\mathbf{y})$. Dit is precies een rotatie rondom de as langs de vector $\mathbf{y}$ met een hoek θ. Omdat dit soort afbeeldingen heel $SO(3)$ genereren, is π surjectief, zelfs wanneer π beperkt wordt tot $SU(2)$ (want $u \in SU(2)$).

Als laatste bekijken we de kern van π. Stel $u \in \ker(\pi)$, dan volgt uit definitie (12) dat u moet commuteren met alle σ_μ. Maar als dit geldt, dan moet u met alle 2×2-matrices commuteren, want (σ_μ) is een basis voor de 2×2-matrices. Dit kan alleen als $u = z\,1_2$, voor een zekere $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$. Stel dat $u \in SU(2)$, dan $z = \pm 1$. Dus de kern van π is $\ker(\pi_{|SU(2)}) = \{1_2, -1_2\}$, waaruit volgt dat $\pi_{|SU(2)}$ een tweevoudige overdekking van $SO(3)$ is. □

Als we toelaten dat u ook anti-unitair mag zijn, dan kunnen we de afbeelding π uitbreiden tot π'. Nu is π' nog steeds impliciet gedefinieerd via uitdrukking (12), maar wanneer u anti-unitair is, moet de anti-lineaire geadjungeerde worden gekozen. Het beeld van π' moet worden uitgebreid tot $O(3)$.

Gevolg 3.3. *De uitbreiding* $\pi' : U(2) \cup U_a(2) \to O(3)$, $u \mapsto R$ *van* π, *waar* R *op dezelfde manier (via uitdrukking 12) is gedefinieerd, is een surjectieve groepshomomorfisme. Verder is* $\ker(\pi') = \mathbb{T} \cdot 1_2$.

Bewijs. Zij $u \in U(2) \cup U_a(2)$. We weten al dat $\pi'(u) = R \in SO(3)$, wanneer u unitair is. Stel nu dat u anti-unitair is, dan

$$\|R\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2}\|u(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})u^*\|_{Tr}^2 = \frac{1}{2}\|(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})^*\|_{Tr}^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}\|_{Tr}^2 = \|\mathbf{x}\|^2,$$

dus er geldt nog steeds dat $R \in O(3)$. Ook is het duidelijk dat π' nog steeds een groepshomomorfisme om precies dezelfde reden als π.

Nu beargumenteren we dat π' surjectief is. Omdat π' een groepshomomorfisme is, moet het beeld van π' een ondergroep van $O(3)$ zijn. Ook weten we dat dit beeld $SO(3)$ bevat, want π' is een uitbreiding van π. Verder is $SO(3)$ een normaaldeler van $O(3)$ met index 2, dus het beeld van π' moet $SO(3)$ of $O(3)$ zijn. Dus we moeten laten zien dat het beeld van π' een element uit $O(3)\backslash SO(3)$ bevat. Dan volgt direct dat π' surjectief is.

Stel u is de anti-unitaire operator J (de operator die de componenten van een vector naar hun complex-geconjungeerde stuurt). Dan is $J^* = J^{-1} = J$, want $J^2 = 1_2$. Er valt ook snel in te zien dat $J\sigma_1 J = \sigma_1, J\sigma_2 J = -\sigma_2$ en dat $J\sigma_3 J = \sigma_3$, dus de corresponderende reële 3×3-matrix is $R = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$, zodat $R \in O(3)\backslash SO(3)$, want $\det(R) = -1$. Dus π' is surjectief.

We bepalen nu nog de kern van π'. We weten al dat wanneer $u \in \ker(\pi')$ unitair is, dan $u = z \cdot 1_2$ voor een zekere $z \in \mathbb{T}$, want $\mathbb{T} \cdot 1_2 = \ker(\pi)$. Stel dat u anti-unitair is, dan commuteert u niet met σ_2, want $u\sigma_2 = -\sigma_2 u$. Dus wanneer u anti-unitair geldt automatisch dat $u \notin \ker(\pi')$, waaruit volgt dat $\ker(\pi') = \ker(\pi) = \mathbb{T} \cdot 1_2$. □

3.1 Bewijs van de stelling van Wigner

We kunnen nu bijna de stelling van Wigner in het tweedimensionale geval bewijzen. Er is nog één lemma dat ik wil geven, voordat ik de stelling bewijs.

Lemma 3.4. *Zij* $\psi, \varphi \in \mathbb{C}^2$ *twee eenheidsvectoren met de bijbehorende eendimensionale projecties*

$$e_\psi = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad e_\phi = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}).$$

Dan geldt de gelijkheid

$$\mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi) = \langle e_\psi, e_\varphi\rangle_{Tr} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}).$$

Bewijs. Dit is een kwestie van uitrekenen m.b.v. de orthogonaliteit van de paulimatrices t.o.v. het spoor, d.w.z. $\langle\sigma_\mu, \sigma_\nu\rangle_{Tr} = 2\delta_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
\langle e_\psi, e_\varphi\rangle_{Tr} &= \frac{1}{4}\langle\sigma_0 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0 + \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}\rangle_{Tr} \\
&= \frac{1}{4}(2 + \langle\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma}\rangle_{Tr}) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

□

Nu bewijzen we de stelling van Wigner voor $H = \mathbb{C}^2$.

Bewijs. Zij $W : \mathscr{P}_1(\mathbb{C}^2) \to \mathscr{P}_1(\mathbb{C}^2)$ een wignerautomorfisme, d.w.z. een bijectie, waarvoor geldt dat

$$\langle We_\psi, We_\varphi\rangle_{Tr} = \mathrm{Tr}(We_\psi We_\varphi) = \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi) = \langle e_\psi, e_\varphi\rangle_{Tr}.$$

Zij e_μ de standaardbasisvectoren van $\mathbb{R}^3$ (waar $\mu = 1, 2, 3$). We definiëren een lineaire afbeelding $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door het beeld van elke e_μ als volgt vast te leggen:

$$Re_\mu = \sum_{\nu=1}^{3}\langle\sigma_\nu, W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu))\rangle_{Tr} e_\nu.$$

Omdat $\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu)$ een eendimensionale projectie is, is het tweede argument van de inproductterm goed gedefinieerd (en is zelf ook een eendimensionale projectie).

We laten nu zien dat R orthogonaal is. Zij $\mu, \nu \in \{1, 2, 3\}$, dan geldt er m.b.v. lemma 3.4 dat

$$\begin{aligned}
(Re_\mu)\cdot(Re_\nu) &= 2(\sum_{\alpha,\beta}\langle W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu)), \sigma_\alpha\rangle_{Tr}\langle\sigma_\beta, W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\nu))\rangle_{Tr}\delta_{\alpha\beta} - 1) \\
&= 2(\sum_{\alpha}\langle W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu)), \sigma_\alpha\rangle_{Tr}\langle\sigma_\alpha, W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\nu))\rangle_{Tr} - 1) \\
&= 2\langle W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu)), W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\nu))\rangle_{Tr} - 1) \\
&= 2\langle\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu), \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\nu)\rangle_{Tr} - 1 \\
&= e_\mu\cdot e_\nu = \delta_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

oftewel R beeldt de standaardbasis af op een nieuwe basis en is dus orthogonaal. Merk op dat er is gebruikt dat (σ_α) een basis is, zodat i.h.a. geldt dat

$$\langle u, v\rangle_{Tr} = \sum_{\sigma_\alpha}\langle u, \sigma_\alpha\rangle_{Tr}\langle\sigma_\alpha, v\rangle_{Tr} \quad \text{voor alle } u, v \in B(\mathbb{C}^2),$$

want $\sum_\alpha |\sigma_\alpha\rangle_{Tr}\langle\sigma_\alpha|_{Tr} = \mathrm{id}_{B(H)}$ (zie vergelijking 3).

De afbeelding π' is surjectief, dus er is een $u \in U(2) \cup U_a(2)$ zodanig dat $\pi'(u) = R$. We beweren dat voor elke eenheidsvector $\psi \in \mathbb{C}^2$ de uitdrukking $ue_\psi u^* = W(e\psi)$ geldt. Om dit te laten zien is het voldoende te bewijzen dat

$$\langle \sigma_\alpha, ue_\psi u^* \rangle_{Tr} = \langle \sigma_\alpha, W(e_\psi) \rangle_{Tr},$$

voor alle $\alpha = 1, 2, 3$, want elke 2×2-matix kan als een lineaire combinatie van de paulimatrices worden geschreven.

Stel dat $e_\psi = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ voor een zekere eenheidsvector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, dan geldt

$$\begin{aligned} \langle \sigma_\alpha, ue_\psi u^* \rangle_{Tr} &= \langle \sigma_\alpha, u(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}))u^* \rangle_{Tr} \\ &= \frac{1}{2} \langle \sigma_\alpha, u(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})u^* \rangle_{Tr} \\ &= \frac{1}{2} \langle \sigma_\alpha, (R\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Tr} \\ &= (R\mathbf{x})_\alpha. \end{aligned}$$

Als we nu de definitie van R toepassen valt gemakkelijk te berekenen dat

$$\begin{aligned} (R\mathbf{x})_\alpha &= \sum_{\mu=1}^{3} x_\mu \langle \sigma_\alpha, W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu)) \rangle_{Tr} \\ &= 2 \sum_{\mu=1}^{3} x_\mu \left(\langle \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\alpha), W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu)) \rangle_{Tr} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \sum_{\mu=1}^{3} x_\mu \left(\langle W^{-1}(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\alpha)), \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\mu) \rangle_{Tr} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \sum_{\mu=1}^{3} x_\mu \langle W^{-1}(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\alpha)), \frac{1}{2}\sigma_\mu \rangle_{Tr} \\ &= 2 \langle W^{-1}(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\alpha)), \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Tr} \\ &= 2 \langle W^{-1}(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\alpha)), \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Tr} - 1 \\ &= 2 \langle \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\alpha), W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})) \rangle_{Tr} - 1 \\ &= \langle \sigma_\alpha, W(e_\psi) \rangle_{Tr}, \end{aligned}$$

en dit was wat we wilden laten zien. We concluderen dat $ue_\psi u^* = We_\psi$.

Merk nu op dat de matrix R uniek door W is gedefinieerd via zijn matrixelementen

$$R_{\mu\nu} = \langle \sigma_\mu, W(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_\nu)) \rangle_{Tr} = \frac{1}{2} \langle \sigma_\mu, u\sigma_\nu u^* \rangle_{Tr}.$$

Stel dat $v \in U(2) \cup U_a(2)$ zodanig dat $ve_\psi v^* = We_\psi$ voor alle eenheidsvectoren $\psi \in \mathbb{C}^2$, dan moet er gelden dat $\pi'(u) = \pi'(v) = R$. Hieruit volgt meteen dat

$u^{-1}v \in \ker(\pi)$, oftewel $u = z\,v$ voor een zekere $z \in \mathbb{T}$. We hebben dus dat u op een complexe fase na uniek gedefinieerd is. $\square$

3.2 Bewijs van de stelling van Kadison

Eerst geef ik twee handige lemma's die iets zeggen over convexe sommen en affiene afbeeldingen op de gesloten eenheidsbol B^3 in $\mathbb{R}^3$.

Lemma 3.5. *Zij $\rho, \rho' \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$ met bijbehorende vectoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$, d.w.z.*

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \rho' = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

Dan correspondeert de convexe som $t\rho + (1-t)\rho'$ met de convexe som $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}'$ voor alle $t \in [0,1]$.

Bewijs. Zij $\rho, \rho' \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$ met bijbehorende vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ en stel dat $t \in [0,1]$. Dan volgt onmiddelijk (uit de lineairiteit van matrices en het standaardinproduct op $\mathbb{R}^3$) dat

$$t\rho + (1-t)\rho' = \frac{1}{2}(\sigma_0 + (t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

oftwel de convexe som van de twee dichtheidsoperatoren correspondeert met de convexe som van hun bijbehorende 3-dimensionale reële vectoren. $\square$

Lemma 3.6. *Elke affiene bijectie $f : B^3 \to B^3$ (hier is $B^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ de gesloten eenheidsbol) heeft een unieke extensie tot een lineaire afbeelding $R \in O(3)$.*

Bewijs. Zij $f : B^3 \to B^3$ een affiene bijectie. Dan is de inverse f^{-1} ook een affiene bijectie, want

$$t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} = tf(f^{-1}(\mathbf{x})) + (1-t)f(f^{-1}(\mathbf{y})) = f(tf^{-1}(\mathbf{x}) + (1-t)f^{-1}(\mathbf{y}))$$

en door op beide zijden van de vergelijking f^{-1} toe te passen volgt hieruit dat

$$f^{-1}(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) = tf^{-1}(\mathbf{x}) + (1-t)f^{-1}(\mathbf{y}).$$

We willen nu laten zien dat f de rand ∂B^3 op zichzelf afbeeldt. Zij $\mathbf{x} \in \partial B^3$, $t \in [0,1]$ en $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in B^3$ zodanig dat $f(\mathbf{x}) = t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{z}$, dan geldt er dat

$$\mathbf{x} = f^{-1}(f(\mathbf{x})) = f^{-1}(t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{z}) = tf^{-1}(\mathbf{y}) + (1-t)f^{-1}(\mathbf{z}).$$

Echter, $\mathbf{x}$ is een extreem punt, wat impliceert dat $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{y}) = f^{-1}(\mathbf{z})$, oftwel $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \mathbf{z}$, dus $f(\mathbf{x})$ is een extreem punt. Hieruit volgt dat $f(\partial B^3) \subseteq B^3$. Bovendien is f^{-1} een affiene afbeelding, dus met dezelfde redenering geldt dat $f^{-1}(\partial B^3) \subseteq \partial B^3$. We concluderen dat $f(\partial B^3) = \partial B^3$.

Ook gaan we laten zien dat $f(0) = 0$, d.m.v. een bewijs vanuit het ongerijmde. Stel $f(0) \neq 0$. Dan is $\mathbf{x} = \|f(0)\|^{-1} f(0) \in \partial B^3$ gedefinieerd en

$$f(0) = \frac{1}{2}(1 + \|f(0)\|)\,\mathbf{x} + \frac{1}{2}(1 - \|f(0)\|)(-\mathbf{x}).$$

We merken op dat $0 \notin \partial B^3$, dus $f(0) \notin \partial B^3$, waaruit volgt dat $\|f(0)\| < 1$. Wanneer wef^{-1} op beide zijden van de vergelijking toepassen, volgt er dat

$$0 = \frac{1}{2}(1 + \|f(0)\|)\, f^{-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(1 - \|f(0)\|) f^{-1}(-\mathbf{x}).$$

Dit omschrijven en dan de norm nemen geeft

$$\|f^{-1}(-\mathbf{x})\| = \frac{1 + \|f(0)\|}{1 - \|f(0)\|}\|f^{-1}(\mathbf{x})\| > \|f^{-1}(\mathbf{x})\|,$$

maar $\mathbf{x} \in \partial B^3$, dus $f^{-1}(\mathbf{x}), f^{-1}(-\mathbf{x}) \in \partial B^3$. Hieruit volgt een tegenspraak, want $\|f^{-1}(\mathbf{x})\| = \|f^{-1}(-\mathbf{x})\| = 1$ is niet met de bovenstaande ongelijkheid verenigbaar. Dus $f(0) = 0$.

Nu moet er worden aangetoond dat f de restrictie tot B^3 van een zekere $R \in O(3)$ is. Voordat we deze R definiëren, moeten we eerst laten zien dat f lineair is. Zij $\mathbf{x} \in B^3$ en $t \in \mathbb{R}$ zodanig dat $t\mathbf{x} \in B^3$. Stel $t \in [0, 1]$, dan

$$f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{x} + (1-t)0) = tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(0) = tf(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Stel $t > 0$, dan is $t^{-1} \in [0, 1]$, dus door gebruik te maken van vergelijking (13) op t^{-1} vinden we dat

$$f(t\mathbf{x}) = t \cdot t^{-1} f(t\mathbf{x}) = tf(t^{-1}t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}).$$

Verder geldt voor alle $\mathbf{x} \in B^3$ dat

$$f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) = 2(\frac{1}{2}f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}f(-\mathbf{x})) = 2f(\frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}) = 2f(0) = 0,$$

oftewel $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$. Nu weten we dat $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\mathbf{x}, t\mathbf{x} \in B^3$. Zij nu $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B^3$ zodanig dat $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in B^3$, dan volgt uit wat we zojuist hebben gevonden dat

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(2(\frac{1}{2}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{y})) = 2 \cdot f(\frac{1}{2}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{y}) = 2 \cdot (\frac{1}{2}f(\mathbf{x})+\frac{1}{2}f(\mathbf{y})) = f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}).$$

Nu is duidelijk dat f lineair is.

Nu definiëren we R door vast te leggen hoe de standaardbasisvectoren van $\mathbb{R}^3$ worden afgebeeld, namelijk $R(e_\mu) = f(e_\mu)$ voor $\mu = 1, 2, 3$, en deze afbeelding lineair uit te breiden tot heel $\mathbb{R}^3$. Het is duidelijk dat $R_{|B^3} = f$. Stel dat $\mathbf{x} = \sum_{\mu=1}^{3} x_\mu e_\mu \in B^3$, dan is $x_\mu e_\mu \in B^3$ voor alle μ en is $x_\mu e_\mu + x_\nu e_\nu \in B^3$ voor alle μ en $\nu \neq \mu$. Dus we kunnen de gevonden lineairiteit van f gebruiken om te concluderen dat

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{\mu=1}^{3} x_\mu R(e_\mu) = \sum_{\mu=1}^{3} x_\mu f(e_\mu) = \sum_{\mu=1}^{3} f(x_\mu e_\mu) = f(\mathbf{x}).$$

Dus R is een unieke lineaire extensie van f. Bovendien is $R \in O(3)$, want $R(\partial B^3) = f(\partial B^3) = \partial B^3$, m.a.w. R is een isometrie. $\square$

Nu kunnen we de stelling van Kadison in het geval $H = \mathbb{C}^2$ gaan bewijzen.

Bewijs. Zij $K : \mathscr{D}(\mathbb{C}^2) \to \mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$ een affiene bijectie. We kunnen elke dichtheidsoperator $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$ schrijven als $\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ en $K(\rho)$ als $K(\rho) = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ voor zekere $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B^3$. We kunnen $\mathbf{y}$ berekenen met het spoorinproduct, namelijk

$$\mathbf{y} = \sum_{\mu=1}^{3} \langle \sigma_\mu, K(\rho)\rangle_{Tr} e_\mu = \sum_{\mu=1}^{3} \langle \sigma_\mu, K(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}))\rangle_{Tr} e_\mu.$$

Dit geeft aanleiding tot de afbeelding $f : B^3 \to B^3$ die gedefinieerd is door

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mu=1}^{3} \langle \sigma_\mu, K(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}))\rangle_{Tr} e_\mu.$$

Merk op dat K affien is, d.w.z. hij behoudt convexe sommen. Uit lemma 3.5 volgt dan dat f ook convexe sommen behoudt en dus dat f een affiene afbeelding is. Verder herkennen we dat $f = \varphi^{-1} \circ K \circ \varphi$, waar $\varphi : B^3 \to \mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$ het isomorfisme is uit propositie 1.31. Verder is K een bijectie en φ een isomorfisme, dus f is een bijectie. We passen nu lemma 3.6 toe, waaruit volgt dat f een unieke extensie heeft tot een $R \in O(3)$. We weten dat π' surjectief is, dus er bestaat een $u \in U(2) \cup U_a(2)$ zodanig dat $\pi'(u) = R$.

Nu willen we laten zien dat $u\rho u^* = K(\rho)$ voor alle $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^2)$. Als we ρ weer als $\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ schrijven, dan geldt voor alle $\alpha = 1, 2, 3$ dat

$$\begin{aligned}\langle \sigma_\alpha, u\rho u^*\rangle_{Tr} &= \langle \sigma_\alpha, u\left(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right)u^*\rangle_{Tr} = \frac{1}{2}\langle \sigma_\alpha, u(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})u^*\rangle_{Tr} \\ &= \frac{1}{2}\langle \sigma_\alpha, (R\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}\rangle_{Tr} = (R\mathbf{x})_\alpha.\end{aligned}$$

We kunnen de definitie van R toepassen en gebruiken dat $\mathbf{x} \in B^3$ om te vinden dat

$$\begin{aligned}(R\mathbf{x})_\alpha &= e_\alpha \cdot f(\mathbf{x}) = \langle \sigma_\alpha, K(\frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}))\rangle_{Tr} \\ &= \langle \sigma_\alpha, K(\rho)\rangle_{Tr}.\end{aligned}$$

Omdat (σ_α) een basis voor 2×2-matrices is, geldt er dus dat $u\rho u^* = K(\rho)$.

Laten zien dat u op een comlexe fase na uniek door K gedefinieerd is, gaat precies hetzelfde als voor de stelling van Wigner (stel $\pi'(u) = \pi'(v) = R$, dan $u^{-1}v \in \ker(\pi') = \mathbb{T}\cdot 1_2$, dus $u = z\,v$ voor een zekere $z \in \mathbb{T}$). $\square$

4 Wigner in willekeurige eindig-dimensionale hilbertruimte

Nu we $H = \mathbb{C}^2$ rond hebben, kunnen we hier gebruik van maken om de stellingen voor H willekeurige eindige dimensie te bewijzen. Als eerst wil ik de stelling van Wigner naar het driedimensionale geval uitbreiden.

We zullen wat voorwerk verrichten om straks de bewijzen soepel te laten verlopen. We willen laten zien dat projecties van k-dimensionale deelruimtes door wignerautomorfismes op projecties van k-dimensionale deelruimtes worden afgebeeld.

Propositie 4.1. *Zij $W : \mathscr{P}_1(H) \to \mathscr{P}_1(H)$ een wignerautomorfisme en zij V een k-dimensionale deelruimte van H. Dan is er een k-dimensionale deelruimte $\tilde{V} \subseteq H$ zodanig dat $W(e_\psi)H \subseteq \tilde{V} \iff \psi \in V$, $\|\psi\| = 1$.*

Bewijs. Zij $(v_1, .., v_k)$ een basis van V. Kies voor elke $i = 1, ...n$ een eenheidsvector $w_i \in (We_{v_i})H$ en laat $\tilde{V}$ hun lineaire span zijn. Omdat W een wignerautomorfisme is, weten we voor $i, j \in \{1, ..., k\}$ dat $|\langle w_i, w_j\rangle| = |\langle v_i, v_j\rangle| = \delta_{ij}$, dus $(w_1, ..., w_k)$ is een k-dimensionale basis voor $\tilde{V}$.

Stel $\psi \in H$ en $\tilde{\psi} \in (We_\psi)H$ zijn eenheidsvectoren, dan geldt er dat

$$\psi \in V \iff \sum_{i=1}^{k} |\langle v_i, \psi\rangle|^2 = 1 \iff \sum_{i=1}^{k} |\langle w_i, \tilde{\psi}\rangle|^2 = 1 \iff \tilde{\psi} \in \tilde{V},$$

m.a.w. $(We_\psi) \subseteq \tilde{V}$ dan en slechts dan als $\psi \in V$, $\|\psi\| = 1$. □

Voor alle $\psi \in V$ ligt het beeld van e_ψ in V (want $e_\psi H = \text{span}(\{\psi\})$). We kunnen e_ψ zien als de projectie $e_\psi : V \to V$, m.a.w. $e_\psi \in \mathscr{P}_1(V)$. De notatie $\mathscr{P}_1(V) \subseteq \mathscr{P}_1(H)$ voor zulke projecties valt nu te begrijpen. Uit propositie 4.1 volgt dus dat de beperking van wignerautomorfisme W tot projecties e_ψ, $\psi \in V$ in essentie een afbeelding $U_{|\mathscr{P}_1(V)} : \mathscr{P}_1(V) \to \mathscr{P}_1(\tilde{V})$ is.

Propositie 4.2. *Zij W een wignerautomorfisme. Voor elke tweedimensionale deelruimte $V \subseteq H$ bestaat er een unitaire of anti-unitaire $u : V \to \tilde{V}$ (waar $\tilde{V}$ zoals in propositie 4.1) waarvoor geldt dat*

$$We_\psi = ue_\psi u^* = e_{u\psi}$$

voor alle $\psi \in V$. Deze u is op een complexe fase na uniek.

Bewijs. Stel (v_1, v_2) is een basis voor V. Kies eenheidsvectoren $w_1 \in (We_{v_1})H$ en $w_2 \in (We_{v_2})H$, zodat w_1 en w_2 een orthonormale basis voor $\tilde{V}$ vormen. We definiëren een unitaire $\tilde{u} : \tilde{V} \to V$ door $\tilde{u}w_i = v_i$ voor $i = 1, 2$. Dan is $\tilde{W} : \mathscr{P}_1(V) \to \mathscr{P}_1(V)$ met $\tilde{W}e_\psi = \tilde{u}(We_\psi)\tilde{u}^*$ een wignerautomorfisme. Nu kunnen we de stelling van Wigner voor het tweedimensionale geval toepassen om een unitaire of anti-unitaire $\hat{u} : V \to V$ te vinden zodanig dat voor alle $\psi \in V$

$$\tilde{W}e_\psi = \hat{u}e_\psi\hat{u}^* = e_{\hat{u}\psi}.$$

Zij $u : V \to \tilde{V}$ gedefinieerd door $u = \tilde{u}^* \hat{u}$. Deze u is unitair of anti-unitair, want $\tilde{u}$ is unitair en $\hat{u}$ is unitair of anti-unitair. Verder geldt er voor alle $\psi \in V$ dat

$$ue_\psi u^* = \tilde{u}^* \hat{u} e_\psi \hat{u}^* \tilde{u} = \tilde{u}^* (\tilde{W} e_\psi) \tilde{u} = W e_\psi,$$

dus hij voldoet aan de gezochte eigenschap. u is op een complexe fase na uniek, omdat de keuzes van w_1, w_2 en $\hat{u}$ op een complexe fase na uniek waren. □

Definitie 4.3. *Een wignerautomorfisme heet* ***unitair*** *resp.* ***anti-unitair****, wanneer m.b.v. de stelling van Wigner een unitaire resp. anti-unitaire operator kan worden verkregen.*

We kunnen voorlopig een wignerautomorfisme alleen unitair/anti-unitair noemen wanneer we het over een tweedimensionale deelruimte van H hebben.

Lemma 4.4. *Wanneer een wignerautomorfisme W unitair resp. anti-unitair voor één tweedimensionale $V \subseteq H$ is, dan is hij unitair resp. anti-unitair voor alle tweedimensionale deelruimtes van H.*

Bewijs. We definiëren een metriek d op $\mathscr{P}_1(H)$ door

$$d(e_\psi, e_\varphi) = 1 - \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - |\langle \psi, \varphi \rangle|,$$

voor $e_\psi, e_\varphi \in \mathscr{P}_1(H)$. Laat ons eerst controleren dat d echt een metriek is.

- De ongelijkheid van Cauchy impliceert $|\langle \psi, \varphi \rangle| \leq 1$, dus d is positief.
- Het is duidelijk dat d symmetrisch is, want $|\langle \psi, \varphi \rangle| = |\langle \varphi, \psi \rangle|$.
- Er geldt dat $d(e_\psi, e_\varphi) = 0$ desda $|\langle \psi, \varphi \rangle| = 1$ desda $\psi = z\varphi$ voor een zekere $z \in \mathbb{T}$ desda $e_\psi = e_\varphi$, dus d heeft de scheidingeigenschap.
- Merk op dat i.h.a. voor eenheidsvectoren ψ, φ geldt dat

  $$\frac{1}{2}\|\psi - \varphi\|^2 = 1 - \mathrm{Re}(\langle \psi, \varphi \rangle) \geq d(e_\psi, e_\eta),$$

  en wanneer ψ, φ zo worden gekozen dat $\langle \psi, \varphi \rangle > 0$ volgt hieruit dat

  $$\frac{1}{2}\|\psi - \varphi\|^2 = d(e_\psi, e_\eta). \tag{14}$$

  Stel $e_\psi, e_\varphi, e_\eta \in \mathscr{P}_1(H)$ en de eenheidsvectoren ψ, φ, η zodanig gekozen dat $\langle \psi, \eta \rangle > 0$ en $\langle \varphi, \eta \rangle > 0$ (dit is mogelijk omdat we de complexe fase van ψ en φ vrij kunnen kiezen), dan

  $$\begin{aligned} d(e_\psi, e_\varphi) &\leq \frac{1}{2}\|\psi - \varphi\|^2 \leq \frac{1}{2}\|\psi - \eta\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta - \varphi\|^2 \\ &= 1 - |\langle \psi, \eta \rangle| + 1 - |\langle \psi, \varphi \rangle| \\ &= d(e_\psi, e_\eta) + d(e_\varphi, e_\eta). \end{aligned}$$

  Aan de driehoeksongelijkheid is voldaan.

Het is duidelijk dat wignerautomorfismes isometrisch en dus continu zijn voor deze metriek. Laat ons nu voor gegeven $e_\psi, e_\varphi, e_\eta \in \mathscr{P}_1(H)$ het getal $\chi(e_\psi, e_\varphi, e_\eta)$ definiëren door

$$\chi(e_\psi, e_\varphi, e_\eta) = \langle \psi, \varphi \rangle \langle \varphi, \eta \rangle \langle \eta, \psi \rangle.$$

Deze χ is onafhankelijk van de keuze van de representanten van de projecties en continu in elk van de argumenten, want gegeven een rij $e_n \to e_\psi$ voor metriek d, dan kunnen we $\psi_n \in e_n H$ kiezen zodanig dat $\langle \psi_n, \psi \rangle > 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, zodat $\|\psi_n - \psi\| \to 0$ m.b.v. vergelijking 14.

Zij $V, V' \subseteq H$ willekeurige tweedimensionale deelruimtes opgespannen door orthonormale vectoren v_1, v_2 en v_1', v_2' respectievelijk. Laat ons vectoren ψ, φ, η definiëren door

$$\psi = v_1, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - iv_2).$$

Op dezelfde manier definiëren we ψ', φ', η' aan de hand van v_1' en v_2'. Uit een korte berekening volgt dat $\chi(e_\psi, e_\varphi, e_\eta) = \frac{1}{4}(1+i)$. De afbeelding u uit propositie 4.2 is unitair desda

$$\chi(e_{u\psi}, e_{u\varphi}, e_{u\eta}) = \frac{1}{4}(1+i),$$

en anti-unitair desda

$$\chi(e_{u\psi}, e_{u\varphi}, e_{u\eta}) = \frac{1}{4}(1-i).$$

Met behulp van een unitaire (en dus continue) operator kunnen we v_1, v_2 afbeelden op v_1', v_2'. Door de continuïteit van χ is dan $\chi(e_{u\psi'}, e_{u\varphi'}, e_{u\eta'}) = \frac{1}{4}(1+i)$ desda $\chi(e_{u\psi}, e_{u\varphi}, e_{u\eta}) = \frac{1}{4}(1+i)$.

Hieruit volgt dat u voor beide ruimtes unitair of voor beide ruimtes anti-unitair is. Omdat dit voor twee willekeurige tweedimensionale ruimtes geldt, is W voor alle tweedimensionale ruimtes unitair of voor alle tweedimensionale ruimtes anti-unitair. □

4.1 Uitbreiding naar driedimensionale hilbertruimte

Lemma 4.5. *Zij H een driedimensionale ruimte met basis (v_1, v_2, v_3) en zij W een wignerautomorfisme op H. Als de afbeelding W beperkt tot de deelverzamelingen $\mathscr{P}_1(\text{span}(v_1, v_2))$ en $\mathscr{P}_1(\text{span}(v_1, v_3))$ de identiteit is, dan is W de identiteit voor heel H.*

Bewijs. Zij $\psi = av_1 + bv_2 + cv_3$ een eenheidsvector in H. We kunnen ψ zo kiezen dat a reeël is. Stel $a \neq 0$. We laten eerst zien dat $We_\psi = e_\psi$. Kies $\psi' \in (We_\psi)H$ met $\langle v_1, \psi' \rangle = a$ en $b' = \langle v_2, \psi' \rangle$. Nu is W op $\mathscr{P}_1(\text{span}(v_1, v_2))$ de identiteit, dus $|\langle \psi, \varphi \rangle| = |\langle \psi', \varphi \rangle|$ voor $\varphi \in \text{span}(v_1, v_2)$. Uit de gevallen $\varphi = v_2$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + iv_2)$ volgt

$$|b| = |b'|, \quad |a + b| = |a + b'| \quad |a - ib| = |a - ib'|.$$

Voor vaste a en b eisen deze vergelijkingen dat b' op drie verschillende cirkels in het complexe vlak ligt. Dit geeft aan dat er één oplossing is, namelijk $b' = b$. Op eenzelfde manier kan worden verkregen dat $c = c'$, dus $\psi = \psi'$.
Om het geval $a = 0$ te krijgen, moet er worden gekeken naar de rij eenheidsvectoren $\psi_n = a_n v_1 + b_n v_2 + c_n v_3$, waar $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, en $\psi_n \to \psi$. Omdat het inproduct in beide argumenten continu is, zal er gelden dat $a_n \to 0$, $b_n \to b$, $c_n \to c$. Voor elke n kan zoals hierboven een ψ'_n worden gedefinieerd, waaruit volgt dat $b'_n = b_n$ en $c'_n = c_n$, zodat $\psi'_n = \psi_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Het is duidelijk dat ψ'_n convergeert dus, $\psi' = \lim_n \psi'_n = \lim_n \psi_n = \psi$. □

Nu bewijzen we de stelling van Wigner in het driedimensionale geval.

Bewijs. Zij W een wignerautomorfisme op H met $\dim(H) = 3$. Laat ons voor een gegeven $u \in U(H) \cup U_a(H)$ het wignerautomorfisme W_u definiëren door $W_u e_\psi = u e_\psi u^* = e_{u\psi}$. We gaan $u_1, u_2, u_3 \in U(H) \cup U_a(H)$ zoeken zodanig dat $W_{u_3} \circ W_{u_2} \circ W_{u_1} \circ W = \mathrm{id}$, want dan is $W = W_u$, waar $u = u_1^{-1} u_2^{-1} u_3^{-1}$.

Zij (v_1, v_2, v_3) een basis voor H en kies $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$, zodat $e_{\tilde{v}_i} = W e_{v_i}$ voor $i = 1, 2, 3$. Kies nu $u_1 \in U(H) \cup U_a(H)$ zodanig dat $u_1 \tilde{v}_i = v_i$. Deze u_1 is unitair resp. anti-unitair, wanneer W voor alle tweedimensionale deelruimtes unitair resp. anti-unitair is. We definiëren $W_1 = W_{u_1} \circ W$. Voor dit wignerautomorfisme geldt dat $W_1 e_{v_i} = e_{v_i}$ (voor $i = 1, 2, 3$) en is op alle tweedimensionale deelruimtes van H unitair (samenstellingen van een even aantal anti-unitaire operatoren zijn unitair). M.b.v. propositie 4.2 kunnen we voor W_1 een unitaire $\tilde{u}_1 : \mathrm{span}(v_1, v_2) \to \mathrm{span}(v_1, v_2)$ vinden zodanig dat $W_{1|\mathscr{P}_1(\mathrm{span}(v_1,v_2))} = W_{\tilde{u}_1}$. Laat ons nu $u_2 \in U(H)$ vastleggen door

$$u_2 = \begin{cases} \tilde{u}_1^{-1} & \text{op } \mathrm{span}(v_1, v_2), \\ \mathrm{id} & \text{op } \mathrm{span}(v_3). \end{cases}$$

Het is duidelijk dat $W_2 = W_{u_2} \circ W_1$ unitair en de identiteit op $\mathscr{P}_1(\mathrm{span}(v_1, v_2))$ en $\mathscr{P}_1(\mathrm{span}(v_3))$ is. We kunnen weer, via propositie 4.2, een unitaire operator $\tilde{u}_2 : \mathrm{span}(v_1, v_3) \to \mathrm{span}(v_1, v_3)$ vinden zodanig dat $W_{2|\mathscr{P}_1(\mathrm{span}(v_1,v_3))} = W_{\tilde{u}_2}$. We kunnen de complexe fase van $\tilde{u}_2$ zo vastleggen dat $\tilde{u}_2 v_1 = v_1$. Laat ons nu de unitaire operator u_3 definiëren via

$$u_3 = \begin{cases} \tilde{u}_2^{-1} & \text{op } \mathrm{span}(v_1, v_3), \\ \mathrm{id} & \text{op } \mathrm{span}(v_2). \end{cases}$$

Merk op dat u_3 de identiteit op heel $\mathrm{span}(v_1, v_2)$ is, want $u_3 v_1 = \tilde{u}_2^{-1} v_1 = v_1$. Per constructie is

$$W_3 = W_{u_3} \circ W_2 = W_{u_3} \circ W_{u_2} \circ W_{u_1} \circ W$$

de identiteit op $\mathscr{P}_1(\mathrm{span}(v_1, v_2))$ en $\mathscr{P}_1(\mathrm{span}(v_1, v_3))$. Uit lemma 4.5 volgt dat W_3 op heel H de identiteit is, dus $W = W_3^{-1} = W_u$, waar $u = u_1^{-1} u_2^{-1} u_3^{-1}$ unitair of anti-unitair is (bepaald door u_1).

In deze constructie van u leggen de keuzes van $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ de operator u_1 uniek vast en we de complexe fase van u_2 (via $\tilde{u}_1$) is vrij gekozen. We hebben meer keuzevrijheid dan verwacht, dus we willen laten zien dat u alleen op een complexe fase na uniek is. Stel er is een operator $v : H \to H$ zodanig dat $e_{u\psi} = e_{v\psi} = W(e_\psi)$ voor alle $\psi \in H$, dan $u\psi = z\, v\psi$ voor alle $\psi \in H$ en een zekere $z \in \mathbb{T}$, m.a.w. u en v kunnen alleen een complexe fase verschillen. $\square$

Gevolg 4.6. *Zij W een wignerautomorfisme op H, dan bestaat er voor elke driedimensionale deelruimte $V \subseteq H$ een unitaire of anti-unitaire $u : V \to \tilde{V}$ (met $\tilde{V}$ zoals in propositie 4.1) zodat $e_{u\psi} = W(e_\psi)$ voor alle $\psi \in V$.*

Het bewijs van dit gevolg gaat precies zoals in propositie 4.2, maar dan voor drie dimensies. Ik zal het hier niet herhalen.

4.2 Bewijs van de stelling van Wigner

Bewijs. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat W een unitaire wignerautomorfisme is op alle tweedimensionale deelruimtes van H. Kies een vaste eenheidsvector $\psi \in H$. Nu kunnen we een eenheidsvector $\tilde{\psi} \in e_\psi H$ kiezen (merk op dat voor $\tilde{\psi}$ alleen zijn complexe fase willekeurig is). Stel $\varphi \in H$ zodanig dat $\varphi \notin \mathrm{span}(e_\psi H)$. Zij V het lineaire span van ψ en φ, dan is er een unitaire $u_V : V \to \tilde{V}$ zodanig dat $e_{u_V\chi} = W(e_\chi)$ voor alle $\chi \in V$. Leg zijn complexe fase vast door de eis $u_V\psi = \tilde{\psi}$. Definieer de afbeelding $u : H \to H$ door $u\varphi = u_V\varphi$ voor alle $\varphi \in H$.

We willen laten zien dat u lineair is. Stel $\varphi_1, \varphi_2 \in H$ en zij M de lineaire span van ψ, φ_1 en φ_2. Stel M is eendimensionaal, dan is M een deelruimte van een tweedimensionale ruimte V en dus beperkt u zich tot u_V, maar u_V is unitair en dus lineair, dus u is lineair op M. Stel M is tweedimensionaal, dan $M = V$ voor een tweedimensionale V en dus beperkt u zich tot u_V. Met hetzelfde argument is u lineair op M. Stel M is driedimensionaal, dan kunnen we een unitaire $u_M : M \to \tilde{M}$ vinden (dankzij de stelling van Wigner in het driedimensionale geval) zodanig dat $e_{u_M\chi} = W(e_\chi)$ voor alle $\chi \in M$. Merk op dat u_M unitair moet zijn omdat zijn beperking tot elke tweedimensionale deelruimte unitair is. Door de juiste complexe fase te kiezen, kunnen we eisen dat $u_M\psi = \tilde{\psi}$. Nu zal er voor alle tweedimensionale $V \subseteq M$ gelden dat $u_{M|V} = u_V$ en dus dat $u_{|M} = u_M$. Omdat u_M lineair is, geldt er dat $u(a\varphi_1 + b\varphi_2) = au(\varphi_1) + bu(\varphi_2)$ voor alle $a, b \in \mathbb{C}$, oftewel u is lineair op heel H.

Per constructie is u unitair. Verder is alleen de keuze van $\tilde{\psi}$ willekeurig, dus u is uniek op een complexe fase na. Het anti-unitaire geval gaat helemaal analoog. $\square$

5 Kadison en Jacobson et al. via Wigner

We hebben de stelling van Wigner bewezen voor willekeurige eindig-dimensionale hilbertruimte H. Dit laat ons de andere twee stellingen bewijzen.

5.1 Equivalentie van de stellingen van Wigner en Kadison

De equivalentie van de stellingen van Wigner en Kadison volgt uit de equivalentie van hun aannames, gegeven door de volgende propositie.

Propositie 5.1. *Er bestaat een bijectieve correspondentie tussen wigner- en kadisonautomorfismes. Deze correspondentie wordt gegeven door*

$$W = K_{|\mathscr{P}_1(H)} \tag{15}$$

en

$$K(\rho) = \sum_i \lambda_i W(e_{v_i}), \tag{16}$$

waar $\rho = \sum_i \lambda_i e_{v_i}$ *een expansie van* $\rho \in \mathscr{D}(H)$ *in termen van de basis van eigenvectoren* v_i *en eigenwaarden* λ_i*. Deze correspondentie is uit te breiden tot een isomorfisme tussen de groep van alle wignerautomorfismes* $\mathrm{Aut}(\mathscr{P}_1(H))$ *en de groep van alle kadisonautomorfismes* $\mathrm{Aut}(\mathscr{D}(H))$*.*

Om te laten zien dat deze correspondentie bijectief is, laten we zien dat de constructies, die door vergelijkingen (15) en (16) zijn gedefinieerd, elkaars inverse zijn. Het is duidelijk dat, gegeven een wignerautomorfisme W, dit waar is, want

$$W(e_\psi) = K_{|\mathscr{P}_1(H)}(e_\psi) = K(e_\psi) = W(e_\psi)$$

voor alle $e_\psi \in \mathscr{P}_1(H)$. Om straks hetzelfde te kunnen doen voor een gegeven kadisonautomorfisme K, moeten we het volgende bewijzen.

Lemma 5.2. *Zij K een kadisonautomorfisme en zij (v_i) een basis van H. Stel coëfficiënten $\lambda_i \geq 0$ zodanig dat $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, dan geldt er*

$$K(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_{v_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i K(e_{v_i}).$$

Bewijs. We gaan gebruik maken van volledige inductie naar n. Het is duidelijk dat de gelijkheid geldt voor $n = 1$. Stel dat de gelijkheid geldt voor $n-1$. Merk op dat

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{v_i}\right) + \lambda_n e_{v_n} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{v_i}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right)} + \lambda_n e_{v_n}$$

een convexe som is, dus

$$\begin{aligned}
K\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_{v_i}\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right) K\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i e_{v_i}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)}\right) + \lambda_n K(e_{v_n}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)}K(e_{v_i})\right) + \lambda_n K(e_{v_n}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i K(e_{v_i})\right) + \lambda_n K(e_{v_n}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K(e_{v_i})\right).
\end{aligned}$$

We zien dat de gelijkheid ook voor n geldt, waarmee de volledige inductie afgerond is. $\square$

Uit dit lemma volgt dat er voor willekeurige $\rho = \sum_i \lambda_i e_{v_i}$ geldt

$$K(\rho) = \sum_i \lambda_i W(e_{v_i}) = \sum_i \lambda_i K(e_{v_i}) = K\left(\sum_i \lambda_i e_{v_i}\right) = K(\rho).$$

Hiermee hebben we bijectiviteit van de correspondentie rond. Nu willen we laten zien dat de correspondentie überhaupt welgedefinieerd is. Laten we beginnen met vergelijking (15). We zullen eerst aantonen dat $K_{|\mathscr{P}_1(H)}$ een bijectie van $\mathscr{P}_1(H)$ op zichzelf is m.b.v. het volgende lemma.

Lemma 5.3. *Zij C een convexe verzameling met rand ∂C en zij $U : C \to C$ een affiene bijectie. Dan is $U_{|\partial C}$ een bijectie van ∂C op zichzelf.*

Bewijs. U is een bijectie op heel C, dus ook op ∂C. We hoeven alleen te laten zien dat U de rand op zichzelf afbeeldt.

Merk op dat U^{-1} ook een affiene bijectie op C is, want voor willekeurige $y, z \in C$ en $t \in [0,1]$ geldt dat

$$ty + (1-t)z = tU(U^{-1}(y)) + (1-t)U(U^{-1}(z)) = U(tU^{-1}(y) + (1-t)U^{-1}(z)),$$

en door op links en rechts U^{-1} toe te passen vinden we dat

$$U^{-1}(ty + (1-t)z) = tU^{-1}(y) + (1-t)U^{-1}(z).$$

Zij x een element van de rand ∂C, dan voldoet het aan de eis:

als $x = ty + (1-t)z$ voor zekere $y, z \in C$ en $t \in (0,1)$, dan $x = y = z$.

Stel $U(x) = ty + (1-t)z$ voor zekere $y, z \in C$ en $t \in (0,1)$, dan vinden we met de bijectiviteit van U dat $x = U^{-1}(ty + (1-t)z) = tU^{-1}(y) + (1-t)U^{-1}(z)$. Maar dan $U^{-1}(y) = U^{-1}(z) = x$ en dus $U(x) = y = z$. Hieruit volgt dat $U(x) \in \partial C$, oftewel $U(\partial C) \subseteq \partial C$. We weten al dat U^{-1} een affiene bijectie is, dus met hetzelfde argument is $U^{-1}(\partial) \subseteq \partial C$. We concluderen dat $U(\partial C) = \partial C$. $\square$

Weten al dat de rand van $\mathscr{D}$ de projecties $\mathscr{P}_1(H)$ zijn (zie lemma 1.32), dus is duidelijk dat $K_{|\mathscr{P}_1(H)}$ een bijectie van $\mathscr{P}_1(H)$ op zichzelf is. Nu rest ons nog te laten zien dat het aan vergelijking (8) voldoet. Om efficiënt te kunnen schrijven, gebruiken we de volgende definitie.

Definitie 5.4. *We definiëren de uitdrukking* $\|\cdot\|_1 : B(H) \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \mathrm{Tr}(|a|)$. *Hier is* $|a|$ *gedefinieerd door*

$$|a| = \sqrt{a^* a},$$

waar $\sqrt{c}$ *van een positieve operator* c *gedefinieerd is door*

$$\sqrt{c} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} e_{v_i}$$

m.b.v. de spectrale decompositie van c*.*

De reden dat we de suggestieve normnotatie gebruiken is omdat dit een norm definieert. We hebben niet nodig dat dit een norm is en het bewijs van dat feit laat ik achterwege. Merk op dat $\sqrt{c}$ de unieke positieve operator is waarvoor geldt dat $(\sqrt{c})^2 = c$. Voor positieve operatoren geldt er natuurlijk dat $\|c\|_1 = \mathrm{Tr}(c)$.

Propositie 5.5. *Een affiene bijectie* $K : \mathscr{D}(H) \to \mathscr{D}(H)$ *is uit te breiden tot een isometrisch isomorfisme* $\mathscr{K} : B(H)_{sa} \to B(H)_{sa}$ *t.o.v. de norm* $\|\cdot\|_1$*.*

Bewijs. We definiëren $\mathscr{K}(0) = 0$ en voor positieve operator $a \neq 0$

$$\mathscr{K}(a) = \|a\|_1 K(a/\|a\|_1).$$

Dit is per constructie isometrisch en behoudt positiviteit van de operator. Voor $a \in B(H)_{sa}$ defniëren we eerst $a_\pm = \frac{1}{2}(|a| \pm a)$ zodat $a = a_+ - a_-$ en $a_\pm \geq 0$. Laat ons nu $\mathscr{K}$ over heel $B(H)_{sa}$ defiëren door

$$\mathscr{K}(a) = \mathscr{K}(a_+) - \mathscr{K}(a_-).$$

We laten zien dat $\mathscr{K}$ isometrisch en lineair is (de bijectiviteit van $\mathscr{K}$ volgt direct uit de bijectiviteit van K). Merk als eerst op dat $|a_+ - a_-| = a_+ + a_-$, want

$$|a_+ - a_-|^2 = (a_+ + a_-)^2$$

en $(a_+ + a_-)$ is een positieve operator, wat de gelijkheid impliceert. Nu volgt isometrie door

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{K}(a)\|_1 &= \mathrm{Tr}(|\mathscr{K}(a_+) - \mathscr{K}(a_-)|) = \mathrm{Tr}(\mathscr{K}(a_+) + \mathscr{K}(a_-)) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathscr{K}(a_+)) + \mathrm{Tr}(\mathscr{K}(a_-)) = \mathrm{Tr}(a_+) + \mathrm{Tr}(a_-) = \mathrm{Tr}(a_+ + a_-) \\
&= \mathrm{Tr}(|a_+ - a_-|) = \mathrm{Tr}(|a|) = \|a\|_1.
\end{aligned}$$

Lineairiteit van $\mathscr{K}$ volgt uit de affieniteit van K. Voor $a, b \in B(H)_{sa}$ geldt dat

$$a + b = (\|a\|_1 + \|b\|_1)\left(\frac{\|a\|_1}{\|a\|_1 + \|b\|_1}\frac{a}{\|a\|_1} + \frac{\|b\|_1}{\|a\|_1 + \|b\|_1}\frac{b}{\|b\|_1}\right)$$

We herkennen het gedeelte van deze uitdrukking tussen grote haken als een convexe som (met $t = \frac{\|a\|_1}{\|a\|_1+\|b\|_1}$ en $(1-t) = \frac{\|b\|_1}{\|a\|_1+\|b\|_1}$). Dit geldt i.h.b. voor $a_\pm$ en $b_\pm$, dus we weten dat $\mathscr{K}(a_\pm + b_\pm) = \mathscr{K}(a_\pm) + \mathscr{K}(b_\pm)$ en dus dat

$$\mathscr{K}(a+b) = \mathscr{K}(a) + \mathscr{K}(b).$$

Stel $\lambda \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathscr{K}(\lambda a_\pm) = \|\lambda a_\pm\|_1 K(\lambda a_\pm / \|\lambda a_\pm\|_1) = \lambda \|a_\pm\|_1 K(a_\pm/\|a_\pm\|_1) = \lambda \mathscr{K}(a_\pm),$$

dus $\mathscr{K}(\lambda a) = \mathscr{K}(\lambda a_+ - \lambda a_-) = \lambda\mathscr{K}(a_+) - \lambda\mathscr{K}(a_-) = \lambda\mathscr{K}(a)$. Dus $\mathscr{K}$ is lineair. □

Lemma 5.6. *Voor alle $e_\psi, e_\varphi \in \mathscr{P}_1(H)$ geldt dat*

$$\|e_\psi - e_\varphi\|_1 = 2\sqrt{1 - \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi)}.$$

Bewijs. Stel $e_\psi = e_\varphi$, dan $\mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi) = |\langle \psi, \varphi\rangle|^2 = 1$, dus de vergelijking

$$\|e_\psi - e_\varphi\|_1 = 0 = 2\sqrt{1 - \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi)}.$$

klopt. Stel nu dat $e_\psi \neq e_\varphi$, dan spannen ψ en φ een tweedimensionale ruimte op. Het spoor van de operator $|e_\psi - e_\varphi|$ is volledig in deze ruimte vastgelegd. Stel dat ψ, ψ' een orthonormale basis voor deze ruimte is, dan kunnen we e_ψ en e_φ met matrixnotatie voor deze ruimte schrijven als

$$e_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi) & \langle\psi,\varphi\rangle\langle\varphi,\psi'\rangle \\ \langle\psi',\varphi\rangle\langle\varphi,\psi\rangle & 1 - \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi) \end{pmatrix}.$$

De uitdrukking van e_φ volgt uit het berekenen van $\langle\psi, e_\varphi\psi\rangle$, $\langle\psi', e_\varphi\psi\rangle$ en $\langle\psi, e_\varphi\psi'\rangle$ en het feit te gebruiken dat voor e_φ de diagonaalelementen tot 1 moeten optellen. Nu is $|e_\psi - e_\varphi|^2 = e_\psi - e_\psi e_\varphi - e_\varphi e_\psi + e_\varphi$ snel te berekenen, namelijk

$$|e_\psi - e_\varphi|^2 = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi) & 0 \\ 0 & 1 - \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi) \end{pmatrix}.$$

Het is duidelijk dat $|e_\psi - e_\varphi| = \mathrm{diag}(\sqrt{1 - \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi)})$ en het spoor hiervan is precies wat we zochten. □

Nu kunnen we het behoud van het spoor van $K_{\mathscr{P}_1(H)}$ aantonen. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(K(e_\psi)K(e_\varphi)) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\|K(e_\psi) - K(e_\varphi)\|_1\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}\|\mathscr{K}(e_\psi) - \mathscr{K}(e_\varphi)\|_1^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4}\|\mathscr{K}(e_\psi - e_\varphi)\|_1^2 = 1 - \frac{1}{4}\|e_\psi - e_\varphi\|_1^2 = \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi).\end{aligned}$$

Laat ons nu naar vergelijking (16) kijken. Wanneer we voor elke $i \in \{1, ..., n\}$ een $\tilde{v}_i$ kiezen zodanig dat $e_{\tilde{v}_i} = W(e_{v_i})$, dan is $(\tilde{v}_i)$ een orthonormale basis van H (want $|\langle v_i, v_j \rangle| = |\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_j \rangle|$). Hieruit volgt dat

$$\mathrm{Tr}(K(\rho)) = \sum_i \langle \tilde{v}_i, K(\rho)\tilde{v}_i \rangle = \sum_i \lambda_i = \mathrm{Tr}(\rho) = 1,$$

dus de correspondentie is welgedefinieerd. Het behoud van convexe sommen is bijna triviaal, namelijk stel $\rho = \sum_i \lambda_i W(e_{v_i})$ en $\rho' = \sum_i \lambda'_i W(e_{v'_i})$ voor willekeurige $\rho, \rho' \in \mathscr{D}(H)$ en stel $t \in [0,1]$, dan

$$\begin{aligned} K(t\rho + (1-t)\rho') &= \left(\sum_i t\lambda_i W(e_{v_i}) \right) + \left(\sum_i (1-t)\lambda'_i W(e_{v'_i}) \right) \\ &= t \left(\sum_i \lambda_i W(e_{v_i}) \right) + (1-t) \left(\sum_i \lambda'_i W(e_{v'_i}) \right) \\ &= tK(\rho) + (1-t)K(\rho)'. \end{aligned}$$

We hoeven nu alleen nog te laten zien dat deze correspondentie de groepsstructuur behoudt, d.w.z. dat de volgende vergelijkingen voor alle wignerautomorfismen W, W' en kadisonautomorfismen K, K' gelden:

$$W' \circ W = (K' \circ K)_{|\mathscr{P}_1(H)}, \tag{17}$$

$$K'(K(\rho)) = \sum_i \lambda_i W'(W(e_{v_i})). \tag{18}$$

Merk op dat deze constructies elkaars inverse zijn, dus het is voldoende één van beide vergelijkingen aan te tonen. We zullen vergelijking (18) laten zien, want dit is bijna triviaal. Kies weer $\tilde{v}_i$ zodanig dat $e_{\tilde{v}_i} = e_{v_i}$, zodat $(\tilde{v}_i)$ een nieuwe basis is. Dan is het een kwestie van netjes uitschrijven:

$$\begin{aligned} K'(K(\rho)) &= K' \left(\sum_i \lambda_i W(e_{v_i}) \right) = K' \left(\sum_i \lambda_i e_{\tilde{v}_i} \right) = \sum_i \lambda_i W'(e_{\tilde{v}_i}) \\ &= \sum_i \lambda_i W'(W(e_{v_i})). \end{aligned}$$

□

5.2 Bewijs van de stelling van Kadison

Met de gevonden correspondentie is het bewijs van de stelling van Kadison bijna triviaal.

Bewijs. Zij K een kadisonautomorfisme, dan is $W = K_{|\mathscr{P}_1(H)}$ een wignerautomorfisme. Pas een de stelling van Wigner toe om een $u \in U(H) \cup U_a(H)$ te vinden zodat $W(e) = ueu^*$ voor alle $e \in \mathscr{P}_1(H)$. Dan is

$$K(\rho) = \sum_i \lambda_i W(e_{v_i}) = \sum_i \lambda_i u e_{v_i} u^* = u\rho u^*$$

en dankzij de stelling van Wigner is de operator u op een complexe fase na uniek. $\square$

5.3 Bewijs van de Jacobson-Rickart-Kadison stelling

Om de stelling van Jacobson et al. te bewijzen hebben we het volgende lemma nodig.

Lemma 5.7. *Jordanautomorfismen beelden projecties op projecties af. Bovendien worden eendimensionale projecties op eendimensionale projecties afgebeeld.*

Bewijs. Zij $\alpha : B(H) \to B(H)$ een jordanautomorfisme en zij $e \in B(H)$ een projectie. Voor projectie geldt dat $e = e^2 = e^*$, dus $\alpha(e)^* = \alpha(e^*) = \alpha(e)$. Verder geldt er, wanneer we $\circ$ als het jordanproduct definiëren, dat

$$\alpha(e) = \alpha(e^2) = \alpha(e \circ e) = \alpha(e) \circ \alpha(e) = \alpha(e)^2.$$

We zien dat $\alpha(e)$ aan de eisen van een projectie voldoet, dus α beeldt projecties op projecties af.

We nemen nu aan dat e een eendimensionale projectie is. Omdat $e \neq 0$, weten we door de lineairiteit en injectiviteit van α dat $\alpha(e) \neq 0$, want $\alpha(a) = 0$ alleen voor $a = 0 \in B(H)$. We weten dat $\alpha(e)$ een projectie op H is, dus $U = eH \subseteq H$ is een lineaire deelruimte van H met $\dim(U) \geq 1$. We laten met een bewijs uit het ongerijmde zien dat $\dim(U) = 1$.

Stel $\dim(U) > 1$. Dan dan bestaat er een lineaire deelruimte V van H zodanig dat $V \subsetneq U$ (V is strikt bevat in U) met $\dim(V) = 1$. Zij f de projectie op V. We gaan gebruiken dat $0 \neq f = f\alpha(e) = \alpha(e)f \neq \alpha(e)$ (dit volgt uit dat $V \subsetneq U$) en dus dat $f \circ e = f^2 = f$. Merk op dat de inverse van een jordanautomorfisme ook een jordanautomorfisme is (volgt triviaal uit de definitie). Uit wat we hierboven bewezen hebben volgt dat $f' = \alpha^{-1}(f)$ een projectie is. Nu weten we dat

$$f' \circ e = \alpha^{-1}(\alpha(f') \circ \alpha(e)) = \alpha^{-1}(f \circ \alpha(e)) = \alpha^{-1}(f) = f'.$$

Schrijf nu de definitie van het jordanproduct uit:

$$f' = f' \circ e = \frac{1}{2}(f'e + ef').$$

De vergelijking kan van links of rechts met e worden vermenigvuldigd om te vinden dat $ef' = ef'e$ en $f'e = ef'e$ respectievelijk. Nu weten we dat $ef' = f'e$, waaruit volgt dat

$$f' = e \circ f' = ef'.$$

Maar e en f' zijn projecties, dus het beeld van f' is bevat in het beeld van e. Per aanname is het beeld van e eendimensionaal, dus $f' = 0$ of $f' = e$. Dit betekent dat $f = 0$ of $f = \alpha(e)$, maar $0 \neq f \neq \alpha(e)$, dus we hebben een tegenspraak. Dit heeft als gevolg dat $\dim(U) = 1$, m.a.w. $\alpha(e)$ is een eendimensionale projectie. $\square$

Nu kunnen we de Jacobson-Rickart-Kadison stelling m.b.v. de stelling van Wigner gaan bewijzen.

Bewijs. Zij $\alpha : B(H) \to B(H)$ een jordanautomorfisme. Dankzij lemma 5.7 weten we dat de restrictie van α tot de eendimensionale projectie leidt tot de bijectie $W : \mathscr{P}_1(H) \to \mathscr{P}_1(H), e_\phi \mapsto \alpha(e_\phi)$. We willen voor willekeurige $e_\psi, e_\varphi \in \mathscr{P}_1(H)$ laten zien dat

$$\mathrm{Tr}(W(e_\psi)W(e_\varphi)) = \mathrm{Tr}(e_\psi e_\varphi).$$

Merk op dat

$$\mathrm{Tr}(W(e_\psi)W(e_\varphi)) = \mathrm{Tr}(\alpha(e_\psi)\alpha(e_\varphi)) = \mathrm{Tr}(\alpha(e_\psi) \circ \alpha(e_\varphi)) = \mathrm{Tr}(\alpha(e_\psi \circ e_\varphi)),$$

dus we hoeven alleen aan te tonen dat $\mathrm{Tr}(W(e_\psi)W(e_\varphi)) = \mathrm{Tr}(\alpha(e_\psi \circ e_\varphi))$.

De projecties e_ψ en e_φ zijn per definitie hermitisch dus $e_\psi \circ e_\varphi$ is ook hermitsch en valt daarom te ontbinden in eigenwaarden. Zij $\sum_i \lambda_i e_{v_i}$ deze spectrale decompositie. Dan beeldt α elke e_{v_i} af op een eendimensionale projectie, dus $\mathrm{Tr}(\alpha(e_{v_i})) = 1 = \mathrm{Tr}(e_{v_i})$. Hieruit volgt wat we wilden aantonen, want

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\alpha(e_\psi \circ e_\varphi)) &= \mathrm{Tr}(\alpha(\sum_i \lambda_i e_{v_i})) = \mathrm{Tr}(\sum_i \lambda_i \alpha(e_{v_i})) = \sum_i \lambda_i \mathrm{Tr}(\alpha(e_{v_i})) \\
&= \sum_i \lambda_i \mathrm{Tr}(e_{v_i}) = \mathrm{Tr}(e_\psi \circ e_\varphi).
\end{aligned}$$

Dankzij de stelling van Wigner weten we nu dat er een unitaire of anti-unitaire u is zodanig dat $ue_\psi u^* = W(e_\psi)$ voor eenheidsvectoren $\psi \in H$. We weten dat zelfgeadjungeerde operatoren diagonaliseerbaar zijn, dus we kunnen ze uitschrijven als een eindige lineaire som van eendimensionale projectie. Verder zijn α en $a \mapsto uau^*$ $\mathbb{R}$-lineaire afbeeldingen op $B(H)_{sa}$, dus we kunnen W lineair uitbreiden tot $B(H)_{sa}$, zodat $uau^* = \alpha(a)$ voor alle $a \in B(H)_{sa}$.

Stel $a \in B(H)$, dan zijn er unieke $b, c \in B(H)_{sa}$ zodanig dat $a = b + ic$. Als u unitair (dus lineair) is, dan

$$uau^* = u(b + ic)u^* = ubu^* + iucu^* = \alpha(b) + i\alpha(c) = \alpha(b + ic) = \alpha(a).$$

Als u anti-unitair, dan

$$ua^*u^* = u(b - ic)u^* = ubu^* + iucu^* = \alpha(b) + i\alpha(c) = \alpha(b + ic) = \alpha(a).$$

Dus de gevonden $u \in U(H) \cup U_a(H)$ voldoet aan $\alpha(a) = uau^*$ als u unitair en $\alpha(a) = ua^*u^*$ als u anti-unitair. Verder is u op een complexe fase na uniek, want u was gegevonden m.b.v. de stelling van Wigner. □

Nawoord

Wanneer ik terugkijk op het schrijven van deze scriptie ben ik tevreden. Ik heb veel geleerd over het onderwerp, over mathematische fysica i.h.a. en over het scherp, kritisch en helder opschrijven van een wiskundige tekst. Een periode van een half jaar lijkt aan het begin tijd genoeg, maar blijkt toch te kort te zijn om alles te behandelen. Zo had ik graag iets willen zeggen over het oneindig-dimensionale geval en over de gevolgen dat de stellingen.

Naast academische vaardigheden heb ik ook mezelf dit half jaar beter leren kennen. Hoewel ik de natuurkunde erg interessant vind en ik er misschien wel beter in ben, trekken de rigiditeit, de correctheid en de schoonheid van de wiskunde me erg aan. In het afgelopen anderhalf jaar is mijn interesse verschoven van voornamelijk natuurkunde naar de wiskundige structuur hierachter. Het schrijven van een mathematisch-fysische scriptie heeft zeker aan deze ontwikkeling bijgedragen.

Verder wil prof. dr. Klaas Landsman bedanken, omdat hij, mijn scriptiebegeleider zijnde, altijd meteen voor mij klaarstond, mij adequaat en gericht kon helpen wanneer ik vastliep in een bewijs en precies het artikel wist te noemen dat goed zou aansluiten op mijn reeds geschreven deel van de scriptie. Ook wil ik Ruben Stienstra (studentassistent van het mastervak Advanced Mathematical Physics) bedanken, omdat hij me met een paar opgaven heeft geholpen.

Referenties

[1] E.P. Wigner, *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, translation from German by J. J. Griffin, New York: Academic Press, 1959

[2] B.P. Rynne and M.A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Springer, 2008, pp. 56-57, 123

[3] K. Jänich, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1994, pp. 166-167

[4] N.P. Landsman, Dictaat bij Advanced Mathematical Physics, 2015

[5] N.P. Landsman, Dictaat bij Inleiding Functionaalanalyse, 2015, pp. 31-32

[6] B.C. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*, Springer, 2013, pp. 336-338

[7] B. Simon,"Quantum dynamics: from automorphism to hamiltonian", *Studies in Mathematical Physics. Essays in Honor of Valentine Bargmann*, 1976, pp. 327-349.

[8] R.V. Kadison, *Transformation of states in operator theory and dynamics*, Topology 3, 1965, pp. 177-198

[9] N. Jacobson, C.E. Rickart, *Jordan homomorphisms of rings*, Transactions of the American Mathematical Society 69, 1950, pp. 479–502

[10] R.V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. of Math. 54, 1951, pp. 325-338

[11] J.E. Roberts, G. Roepstorff, *Some basic concepts of algebraic quantum theory*, Commun. Math. Phys. 11, 1969, pp. 321–338

[12] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. Vol. I: C^*- and W^*-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*, 2nd Ed., Berlin: Springer, 1987

[13] V. Bargmann, *Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations*, Journal of Mathematical Physics 5, 1964, pp. 862-868

[14] G. Cassinelli, E. De Vito, P.J. Lahti, A. Levrero, *The theory of symmetry actions in quantum mechanics*, Springer, 2004