Historisch overzicht van de Analyse

Klaas Landsman

Radboud Universiteit Nijmegen

landsman@math.ru.nl

College Analyse 1
6 februari 2007

Analyse tot de 20e eeuw: van concreet naar abstract

Tot 4e eeuw v.Chr. Meten en rekenen in alledaagse problemen (landmeetkunde, handel, belastinginning,...)

4e eeuw v.Chr. Ontstaan wiskunde in Athene (abstractie, axiomatisch-deductieve methode)

3e eeuw v.Chr. Archimedes (berekening van speciale lengtes, oppervlakten en volumes m.b.v. trucs)

Tot midden 17e eeuw Ook snelheden en versnellingen

17e eeuw Calculus Newton, Leibniz

18e eeuw Functie als basis analyse Euler

19e eeuw Axiomatiek analyse: verzamelingen, $\mathbb{R}$, ε en δ
Cauchy, Dirichlet, Weierstrass, Dedekind, Hilbert

Analyse in bacheloropleiding: van concreet naar abstract!

Eerste jaar

Calculus 1&2: 17e eeuw (functies van 1 veranderlijke)

Calculus 3&4: 18e eeuw (meer veranderlijken)

Analyse 1: 19e eeuw (functies van 1 veranderlijke)

Tweede jaar

Analyse 2&3: 20e eeuw (herformulering gehele analyse)

Derde jaar

Gewone differentiaalvergelijkingen 18-20e eeuw

Complexe functies 19-20e eeuw

Maat en integraal: 20e eeuw

Analyse in de 20e eeuw: van abstract naar toegepast!

Voor de hele wiskunde geldt:

Hoe groter de abstractie, hoe dieper de toepassingen

Calculus beschrijft klassieke mechanica
(tegelijk ontstaan tussen 1665–1687) Newton

Abstracte analyse beschrijft kwantummechanica
(tegelijk ontstaan tussen 1900–1932) von Neumann

Oneindig-dimensionale analyse beschrijft stringtheorie

Analyse in masteropleiding:

Hilbert-ruimten en kwantummechanica: 20e eeuw

Inleiding partiële differentiaalvergelijkingen: 18-20e eeuw

Stochastische analyse: 20e eeuw

17e eeuw: Calculus (Newton, Leibniz)

Bepaling lengtes, oppervlakten, volumes, snelheden, minima, Máxima, ... teruggevoerd tot twee operaties:

- **Differentiatie**
- **Integratie**

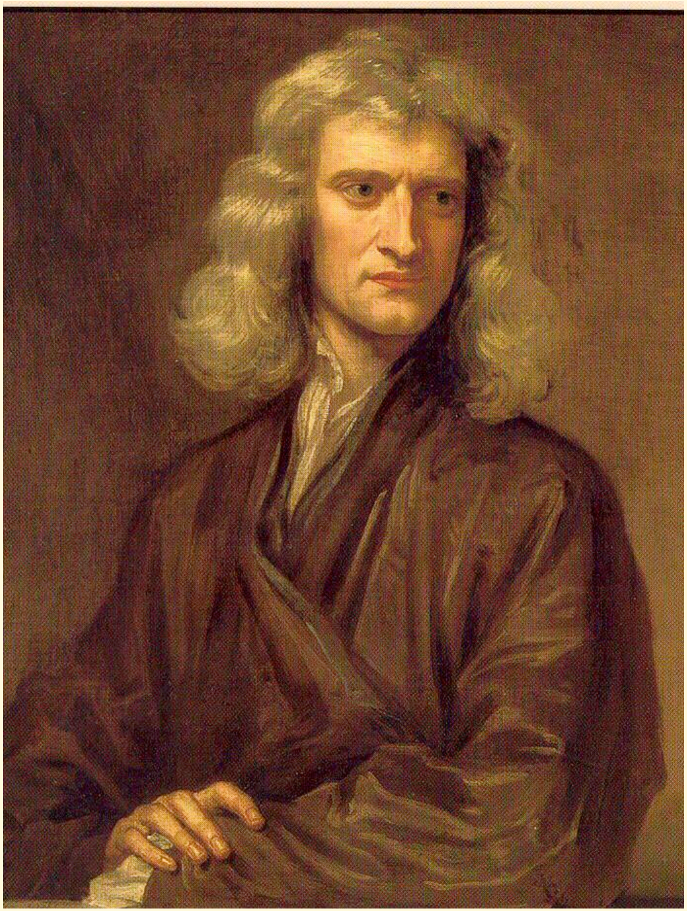
'Could this ever bee done all problems whatever might be resolved.' (Newton, 1666)

- **Hoofdstelling calculus (Newton, 1665–1666):**

Integratie en differentiatie zijn elkaars inverse

$$\frac{d}{dx}\int^x dy\, f(y) = f(x); \;\; \int^x dy\, f'(y) = f(x) + c$$

'Newton and Leibniz transformed mathematics'



Isaac Newton

1642–1727

natuurkundige
wiskundige
alchemist
theoloog
historicus

De wiskunde van Newton

Fysische en intuïtieve kijk op wiskundige grootheden:

- **Alle variabelen "functies" van de tijd**
- **Grafiek functie niet $y(x)$ maar $(x(t), y(t))$ (baan van deeltje in vlak)**
- **Afgeleide = snelheid**
- **'Dynamische' afleiding hoofdstelling calculus**

Achtergrond: Newton ontwikkelde gelijktijdig klassieke mechanica en calculus ('annus mirabilis' 1665–1666)

- **Veelvuldig gebruik machtreeksen (Taylor-reeks!)**

$$\int_0^x dy\, f(y) = \int_0^x \sum_k c_k y^k = \sum_k c_k \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

Gottfried W. Leibniz

1646–1716

diplomaat
jurist
filosoof
theoloog
logicus
wiskundige

18e eeuw: 'Functie' als basis analyse

Wat is een functie? 'Eerste' analyse-boek:

1. Euler, Introductio in analysin infinitorum (1748):

Expliciet voorschrift i.e. 'formule':

$\cos(x)$, $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\log(x)$, $\Gamma(x)$, **machtreeksen** $\sum_k c_k x^k$

Veel formules, geen convergentiebegrip, 'experimenten'

'Tweede' analyse-boek:

2. Euler, Institutiones caculi differentialis (1755):

Grootheid die van een andere grootheid afhangt
(nog niet: afbeelding tussen twee verzamelingen!)

$\rightarrow$ **Diepere vragen over begrip functie, convergentie,...**

Men kwam daar in de 18e eeuw niet uit:

Intuïtieve aanpak analyse stuit op haar grenzen

Leonhard Euler

1707–1783

De meest productieve wiskundige aller tijden!

19e eeuw: Grondslag van de analyse

- **Opkomst van de universiteiten:** **noodzaak analyse aan studenten uit te leggen**
- **Wiskunde als zelfstandig vak (los van toepassingen)**
- **Loskoppeling van aanschouwelijkheid en intuïtie**
- **Intuïtieve definities/bewijzen (Newton) verdacht**
- **Nadruk op formele eigenschappen en aannamen**

Voorbeeld: middelwaardestelling

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(0) < 0,\ f(1) > 0,\quad \exists ? x_0 : f(x_0) = 0$$

Newton, Euler: evident uit plaatje

Cauchy, Dirichlet: onder welke aannamen is het waar?

Conclusie (1900): f **moet continu zijn en** $\mathbb{R}$ **volledig**

A.L. Cauchy

1789–1857

De op één na meest productieve wiskundige aller tijden!

'Dirichlet allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauss, weiss, was ein vollkommen strenger Beweis ist, sondern wir lernen es erst von ihm. Wenn Gauss sagt, er habe etwas bewiesen, so ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist ebensoviel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiss.'
(Jacobi aan A. von Humboldt, 21 december 1846).

J.P.G.L. Dirichlet 1805–1859

1900: Grondslag analyse voltooid

1. Analyse-college K. Weierstrass in Berlijn, 1864– kroon op de 'nieuwe stijl' in de analyse:

    - College begint met definitie van $\mathbb{R}$ (obsoleet)
    - ε en δ definities continuïteit, convergentie, etc.
    - Puntsgewijze vs. uniforme convergentie etc.
    - Afbakening begrippen differentieerbaarheid etc. d.m.v. precieze definities en tegenvoorbeelden: Overal continue nergens differentieerbare functie

    $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(9^n \pi x)$$

    - Winst aan precisie, verlies aanschouwelijkheid
    - Abstractie ten koste van inituïtie

Karl Weierstrass

1815–1897

2. Invoer verzamelingenleer:

- **Cantor, 1871: concrete vraag over Fourier-analyse**
- **$\rightarrow$ 'Naïeve' verzamenlingenleer:**

Cantor, 1883:
Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre

Dedekind, 1888: Was sind und was sollen die Zahlen

- **Wiskunde = verzamelingen en afbeeldingen**
- **functie = afbeelding tussen twee verzamelingen**
- **Reëele analyse = studie van functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$**

Hilbert, 1900: Über den Zahlbegriff

- **Moderne definitie van $\mathbb{R}$ (ook in college!)**

Georg Cantor

1845–1918

Richard Dedekind

1831–1916

‘Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können’

David Hilbert, 1862–1943

Wir müssen wissen

wir werden wissen