Radboud Universiteit Nijmegen

Bachelorstage

# Kwantum Balletje Balletje

*Author:*
Jan-Willem Goossens

*Supervisor:*
prof. N.P. Landsman

30 maart 2013

# Inhoudsopgave



# 1 Voorwoord

Dit verslag is ontstaan als afsluiting van mijn bachelorstage Natuurkunde. Waar het oorspronkelijk begon als een project om meerdere no-go-theorema's in de kwantummechanica[1] samen te vatten en toegankelijk te maken voor een breder publiek is na de zomervakantie gebleken dat de planning van dat project niet goed was en dat derhalve het project herzien moest worden. Het nieuwe project wat hier slechts zijdelings mee te maken had was de 'Kwantum three-box paradox'. Vrijwel onmiddelijk wist dit mijn interesse te trekken en ik heb met veel plezier uitgezocht wat de paradox was en hoe groot het probleem van de paradox was. Het resultaat van deze literatuurstudie is te vinden in dit verslag. Een van de grote problemen van grondslagentheoretische kwantummechanische discussies is dat ze al snel verzanden in wiskundig ondoorgrondelijk jargon waardoor de filosofische punten de de schrijvers proberen te maken de gewone fysicus niet weten te bereiken. Dit heeft tot gevolg dat de gemiddelde fysicus je zal vertellen dat verborgen variabelen theorieën een onmogelijkheid zijn, terwijl reeds in 1952 David Bohm liet zien dat een dergelijke theorie wel degelijk bestaat. Daarom heb ik geprobeerd de redeneringen en berekeningen in dit verslag toegankelijk te houden en zo min mogelijk af te wijken van het Quantummechanische Bracket-formallisme. Op deze manier zou iedere fysicus in staat moeten zijn het artikel te lezen en zelf na te denken over de redeneringen en hun correctheid.

[1] Bell, Kochen-Specker, the Free Will-theorem

Ik wil graag Prof. Dr. Klaas Landsman bedanken voor zijn begeleiding van dit project. Af en toe heb ik het project onderschat, maar gelukkig wist hij het op de rails te houden, en daarmee denk ik dat dit onderzoek tot een goed einde is gekomen.

Jan-Willem Goossens

# 2 Quantummechanische paradoxen

Het bestuderen van paradoxen is al sinds de tijd van de Grieken een beproefde methode om een theorie te testen. Als een theorie met zichzelf in tegenspraak is, kan het immers geen correcte theorie zijn. Het oplossen van tegenspraken in een theorie is dus nodig om de theorie geloofwaardig te houden. Het oplossen van paradoxen levert ook de nodige kennis op over de theorie, waardoor het begrip van de theorie vergroot wordt. Wanneer er een niet op te lossen tegenspraak gevonden is, zal de theorie daar op aangepast moeten worden,[2] of zal de gehele theorie verworpen moeten worden.[3] Er zijn veel voorbeelden bekend van kwantummechanische systemen die zich anders gedragen dan intuïtief was verwacht. Een voorbeeld hiervan is de discussie rond de EPR-paradox, waardoor verstrengelde deeltjes een algemeen geaccepteerd gevolg van het kwantummechanische paradigma werden. Een voorbeeld uit de recente literatuur is de zogeheten 'Three-box paradox'. Deze paradox is onderdeel van een controverse onder fundamenteel theoretisch fysici.[**?**][**?**] In mijn bachelorscriptie zal ik proberen met een frisse blik naar deze controverse te kijken en voor de lezer duidelijkheid te scheppen in dit gebied.

[2] Het instorten van de golffunctie is hier een voorbeeld van. Het is onwenselijk dat twee metingen kort na elkaar twee verschillende resultaten geven, derhalve is een mechanisme ingevoerd om dit te voorkomen.

[3] Denk bijvoorbeeld aan het effect dat black-body-radiation had op de ontwikkeling van de klassieke natuurkunde in de richting van de kwantummechanica.

## 3 Het klassieke spel

Balletje balletje, of het dopjesspel, is een bekende manier om onwetende toeristen geld uit de zak te kloppen. De spelleider heeft drie identieke bekers en legt onder één van de drie een balletje. Vervolgens draait hij deze bekertjes om elkaar, laat het balletje met vingervlugheid overspringen en geeft de speler dan de mogelijkheid geld in te zetten. De speler moet dan vertellen waar het balletje ligt. Als de speler gelijk heeft, verdubbelt hij zijn inzet, als hij het balletje niet vindt verliest hij. In de praktijk verliest de speler bijna altijd, omdat er vaak überhaupt geen balletje meer onder de bekers ligt. Mocht de speler per ongeluk toch winnen dan zijn er vaak handlangers die achteraf hardhandig het verloren geld terug gaan vragen. In de kwantumwereld is er een spel denkbaar waarbij voorbijgangers worden opgelicht wat niet uitgaat van een in principe oneerlijke situatie, dit spel zal in het vervolg toegelicht worden.

# 4 Het quantum spel

Het kwantummechanische spel wat we in het vervolg gaan bestuderen kent twee spelers, de spelleider, en de deelnemer. Het decor van dit spel is een kwantumsysteem met een driedimensionale toestandruimte.[4] We nemen aan dat we een orthonormale basis kunnen kiezen, waarop in alle richtingen een projectieoperator kan worden toegepast.[5] Vervolgens kiezen we een orthonormale basis waarbij we de drie basisvectoren $|1\rangle$, $|2\rangle$ en $|3\rangle$ noemen. De toestand$|1\rangle$ is te interpreteren als de toestand waarbij het balletje in doosje 1 zit. Voor het begin van het spel wordt het systeem in een specifieke toestand gebracht, te weten $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle$. Dan begint het spel. De spelleider wordt geblinddoekt, en de deelnemer heeft twee opties, namelijk kijken of het systeem zich in toestand $|1\rangle$ bevindt, of kijken of het systeem zich in toestand $|2\rangle$ bevindt. Dit beïnvloedt het systeem. Als deze meting afgerond is, doet de spelleider zijn blinddoek af en mag hij een meting uitvoeren voor een toestand van zijn keuze gegeven door $c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle$. Als de spelleider nu het systeem in deze toestand vindt, is het spel afgelopen en is er een winnaar. Als de spelleider geen deeltje vindt is het spel onbeslist, oftewel:

| | S vindt het deeltje | S vindt het deeltje niet |
|---:|---:|---:|
| SL vindt het deeltje | SL wint | S wint |
| SL vindt het deeltje niet | onbeslist | onbeslist |

## Is het spel eerlijk?

Een belangrijke vraag in deze context is of een toevallige voorbijganger zou oordelen dat het spel eerlijk is. Hiertoe moeten we een aantal dingen bekijken.

**Gelijke kansen** De kans dat de deelnemer een deeltje in doosje 1, 2 of 3 vindt als hij daar kijkt, moet aan het begin van het spel $\frac{1}{3}$ zijn. Als dit immers niet het geval is, zou de quizmaster het systeem kunnnen prepareren in de $|3\rangle$-toestand, Hier is uiteraard aan voldaan, doordat

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 1| + \langle 2| + \langle 3|)|j\rangle\langle j|\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

voor alle j.

[4]In het vervolg ook wel een deeltje met 3 eigentoestanden/doosjes waar het in kan zitten.

[5]Hierbij is het eerste vanzelfsprekend, van de tweede uitspraak is veel onduidelijker of deze fysisch altijd waar is

**Er is precies één deeltje** Als we eerst kijken of er een deeltje in doosje 1 zit en daarna kijken of er een deeltje in doosje 2 zit, mag je hem maar in één van de twee vinden. Als we in doosje 1 kijken en daarna weer in doosje 1 kijken moeten we het deeltje of twee keer zien, of niet zien. Ook dit volgt eenvoudig doordat de instorting van de golfvergelijking gewoon in het spel wordt meegenomen.

**Ondetecteerbare meting** De kansen van de quizmaster mogen niet afhangen van het wel of niet meten van de deelnemer. Anders geformuleerd moet de kans dat de quizmaster het deeltje vindt als de deelnemer in een bepaald doosje heeft gekeken gelijk zijn aan de kans dat de quizmaster het deeltje vindt als de deelnemer niet in een doosje heeft gekeken. Voor de eindtoestand waarin wij geïnteresseerd zijn ($\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle$ kunnen we dit nu narekenen en gaat het goed. De kans dat we het deeltje bij de postselectie vinden als we tussendoor niet meten is gelijk aan:

$$|\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 1| + \langle 2| + \langle 3|)\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle|^2 = \frac{1}{9}. \tag{2}$$

De kans dat we het deeltje niet vinden als we tussendoor wel meten is gelijk aan:

$$|\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 1| + \langle 2| + \langle 3|)|j\rangle\langle j|\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle|^2 = \frac{1}{9} \tag{3}$$

als j=1 of 2.

# 5 De paradox met postselectie

In het volgende beginnen we met een kwantummechanisch systeem in $|init.\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle$. Vervolgens kan er in één van de 3 dozen gekeken worden. We noteren een meting van doos $j$ als $M_j$. De twee mogelijkheden na een dergelijke meting zijn dat het balletje in doos $j$ gevonden wordt, met als geassocieerde operator $\mid j\rangle\langle j \mid$, of dat het balletje niet in doos j gevonden wordt. Aangezien een observatie van een doosje een projectieoperator is, wordt het effect hiervan gegeven door $\hat{1} - \mid j\rangle\langle j \mid = \sum_{l\neq j} \mid l\rangle\langle l \mid$.[6] Hierna vindt er postselectie plaats door de projectieoperator $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mid 1\rangle\langle 1 \mid + \mid 2\rangle\langle 2 \mid - \mid 3\rangle\langle 3 \mid = \mid \psi_{fin}\rangle\langle\psi_{fin} \mid$ op het systeem los te laten en enkel de gevallen waarvoor deze meting niet nul oplevert mee te nemen.

| gebeurtenis | symbool | toestand na deze gebeurtenis |
|---|---|---|
| speler meet aan toestand $j$ | $M^j$ | — |
| postselectie slaagt | $d^{ps}$ | $\|\psi_{fin}\rangle$ |
| begintoestand is $\|init\rangle$ | $M^i$ | $\|\psi_{ini}\rangle$ |
| balletje is gevonden in doosje $j$ | $d_j$ | $\|j\rangle$ |
| balletje wordt niet gevonden in doosje $j$ | $\bar{d}^j$ | $\sum j = 2, 3\|j\rangle$ |
| Er is een balletje gezien | $d$ | — |

De kans die we willen bepalen laat zich als volgt schrijven:

$$P_s(d_1 \mid M^1 \wedge d^{ps}). \tag{4}$$

Oftewel gegeven dat de begintoestand en eindtoestand zijn zoals we willen dat ze zijn, wat is de kans dat we het balletje hebben gezien als we in doosje 1 hebben gekeken. Dit laat zich met behulp van de definitie van een voorwaardelijke kans schrijven als:

$$P_s(d_1 \mid M^1 \wedge d^{ps}) = \frac{P_s(d_1 \wedge M^1 \wedge d^{ps})}{P_s(M^1 \wedge d^{ps})}. \tag{5}$$

Hierbij is zowel de teller als de noemer weer te vereenvoudigen door $P(A \wedge B) = P(A \mid B)P(B)$ en vervolgens de twee $P(M^1)$ termen tegen elkaar weg te strepen. Hierdoor wordt de kans

$$P_s(d^1 \mid M^1 \wedge d^{ps}) = \frac{P_s(d^1 \wedge d^{ps} \mid M^1)}{P_s(d^{ps} \mid M^1)}. \tag{6}$$

[6]Merk op dat deze operator onafhankelijk is van de keuze van de twee andere basisvectoren waarover gesommeerd wordt

Als we ons nu beseffen dat $P(d^1|\neg(M^1)) = 0$ volgt voor de teller van de bovenstaande breuk:

$$P_s(d^1 \wedge d^{ps} \mid M^1) = P_s(d^1 \wedge d^{ps}) = P_s(d^{ps} \mid d^1)P_s(d^1). \tag{7}$$

Voor de noemer kunnen we een soortgelijke afleiding doen waarbij we gebruiken dat $M^j = d^j \vee \bar{d}^j$.

$$P_s(d^{ps} \mid M^1) = P_s(d^{ps} \mid d^1)P_s(d^1) + P_s(d^{ps} \mid \bar{d}^1)P_s(\bar{d}^1). \tag{8}$$

Vullen we de twee hiervoor gevonden uitdrukkingen in in onze formule voor de retrospectieve kans, dan krijgen we automatisch:

$$P_s(d^1 \mid M^1 \wedge d^{ps}) = \frac{P_s(d^{ps} \mid d^1)P_s(d^1)}{P_s(d^{ps} \mid d^1)P_s(d^1) + P_s(d^{ps} \mid \bar{d}^1)P_s(\bar{d}^1)}. \tag{9}$$

Een vraag die nu rijst is natuurlijk: hoe berekenen we $P_s(d^{ps}|d^1)$? Gegeven dat het balletje na de tussenliggende meting in doosje 1 zit, wat is de kans dat het balletje in de postselectietoestand gevonden wordt? Hiervoor gebruiken we de Born-regel en het instorten van de golfvergelijking, oftewel: $P_s(d^{ps}|d^1) = |\langle\psi_{fin} \mid 1\rangle|^2$. In termen van bra's en kets wordt de vergelijking voor de voorwaardelijke kans dan dus:

$$P_s(d^1 \mid M^1 \wedge d^{ps}) = \frac{|\langle\psi_{fin} \mid 1\rangle\langle 1 \mid \psi_{ini}\rangle|^2}{|\langle\psi_{fin} \mid 1\rangle\langle 1 \mid \psi_{ini}\rangle|^2 + |\sum\limits_{j=2,3}\langle\psi_{fin} \mid j\rangle\langle j \mid \psi_{ini}\rangle|^2}. \tag{10}$$

Als we deze formule invullen komt er 1 uit doordat

$$\sum_{j=2,3}\langle\psi_{fin} \mid j\rangle\langle j \mid \psi_{ini}\rangle = 0. \tag{11}$$

De hele afleiding zoals die hierboven staat is echter symmetrisch in een verwisseling van 1 en 2. Dus als we de kans $P_s(d^2 \mid M^1 \wedge d^{ps})$ berekenen geeft dit ook 1 als antwoord. Dit lijkt in tegenspraak te zijn met elkaar. Hoe kan het balletje in allebei de doosjes met zekerheid gevonden worden als we er in kijken?

Dit is uit te leggen doordat we maar in één van de twee doosjes tegelijk mogen kijken. Als je iets vindt, weet je de volledige toestand van het balletje. Als je niets vindt, kan je het balletje nog steeds in twee doosjes vinden. Meer specifiek is de crux van de paradox dat de kansen $P(M^1 \mid M^2) = P(M^2 \mid M^1) = 0$. Ook dat we na postselectie het balletje wel hebben moeten zien is eenvoudig in te zien. De inproducten $(\langle 1| + \langle 3|)(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle$ en $(\langle 2| + \langle 3|)(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle$ geven eenvoudig 0. De uitkomsten 'geen balletje in de geobserveerde toestand' en 'een succesvolle postselectie' zijn dus volledig incompatibel.

## Waarom is dit een paradox

Probeer, voor dit moment, het hele afgelopen verhaal te vergeten, onthoud alleen de conclusie. Dan hebben we dus de volgende feiten:

- Het systeem begint in toestand $|\psi_{ini}\rangle$.
- Het systeem eindigt in toestand $|\psi_{fin}\rangle$.
- Als ik nu tussendoor in doos 1 kijk, zie ik het balletje.
- Als ik daarentegen tussendoor in doos 2 kijk, zie ik het balletje ook.

Deze laatste twee uitspraken zijn duidelijk in tegenspraak met elkaar. Hoe kan het mogelijk zijn dat het deeltje op een bepaald moment met zekerheid in allebei de doosjes is? Op deze manier is helder dat het een paradox is. Dat het echter een oplosbare paradox is echter ook te beredeneren. Deze paradox onstaat namelijk door aan te nemen dat de meting die we uitvoeren onafhankelijk is van de postselectie en dat we deze zomaar mogen tussenvoegen. Dat is natuurlijk niet waar. Al vanaf het begin van de kwantummechanica is duidelijk dat metingen een belangrijke invloed hebben op de golffunctie van een deeltje, en we mogen natuurlijk zomaar een meting toevoegen op een willekeurig tijdstip, maar daarmee verandert het universum vanaf dat punt, en zijn conclusies die we eerder trokken niet meer terecht. Het uitspraken doen over metingen die niet gedaan zijn is leeg. We kunnen geen uitspraak doen over de waarde van een variabele als we hem niet meten. De paradox ontstaat dus als we op een niet tijdgeordende manier naar de kwantummechanica kijken. Als we dat wel doen, is er niks aan de hand. De volgende sectie zal dat laten zien

# 6 De paradox zonder postselectie

De berekingen waarbij postselectie wordt gebruikt rusten sterk op de kansrekeningaxioma's van Kolmogorov. Dat deze axioma's de quantummechanica echter niet helemaal kunnen vatten is al bekend sinds de quantummechanica de Bell-ongelijkheden bleek te schenden. Een helderder, maar minder elegante methode om de verschillende kansen uit te rekenen vinden we door voor elke stap in het proces te bepalen wat de kansen zijn. Het proces bestaat uit een aantal stappen.

**Initialiseren** Het initialiseren van de meetopstelling gebeurt in alle relevante processen, dit kunnen we in de berekening van kansen dus buiten beschouwing laten, als we ons maar beseffen dat na deze eerste stap de toestandsvergelijking gelijk is aan: $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$.

**Keuze van een meting** De mogelijke keuzes zijn hier kijken in $|1\rangle$ of kijken in $|2\rangle$.

**Uitkomst van de meting** De mogelijke uitkomsten zijn het balletje is gevonden, of het balletje is niet gevonden.

**Postselectie** Er wordt een meting gedaan in de richting $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle)$. Hierbij wordt het balletje wel of niet gevonden na deze meting.

Als we aannemen dat de keuze van een meting uniform wordt gedaan levert de tweede stap in het proces altijd een factor $\frac{1}{2}$ op. De uitkomst van de meting is interessanter. We doen de berekening eerst voor de uitkomst waarbij het balletje uiteindelijk gevonden wordt en we hebben gemeten aan toestand 1. De kans hierop is

$$|\langle 1|\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle)|^2 = \frac{1}{3}. \tag{12}$$

De kans dat het niet lukt wordt gegeven door

$$|\langle 2|(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)|^2 + |\langle 3|(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)|^2 = \frac{2}{3}. \tag{13}$$

Deze kansen tellen dus netjes op tot 1 en aangezien dit de enige mogelijkheden zijn is dit precies wat we verwachten. Laten we nu voor beide gevallen uitrekenen wat de kans op succes of falen van de postselectie is. Laten we eerst het geval waarin het balletje gevonden is bekijken. Het balletje zit in toestand $|1\rangle$, dus de kans dat het dan in toestand $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle)$ gevonden wordt is gelijk aan

$$|\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 1| + \langle 2| - \langle 3|)|1\rangle|^2 = \frac{1}{3}. \tag{14}$$

De kans dat het balletje niet in deze toestand gevonden wordt is gelijk aan[7]

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| - \langle 2|)|1\rangle|^2 + |\frac{1}{\sqrt{6}}(\langle 1| + \langle 2| + 2\langle 3|)|1\rangle|^2 = \frac{2}{3} \tag{15}$$

Ook deze twee kansen tellen dus netjes op tot 1. In het geval dat we in de meting aan doosje 1 geen balletje gevonden hebben, wordt de kans dat postselectie slaagt

$$(\langle 1| + \langle 2| - \langle 3|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle) = 0 \tag{16}$$

en de kans dat de postselectie niet slaagt wordt dan

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| - \langle 2|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)|^2 + |\frac{1}{\sqrt{6}}(\langle 1| + \langle 2| + 2\langle 3|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)|^2 = 1 \tag{17}$$

Als we de kansen nu op een rij zetten hebben we de volgende zaken net berekend:

| gebeurtenis | voorwaarde | kans |
|---|---|---|
| Er wordt bekeken in doosje $j$ | — | $\frac{1}{2}$ |
| Het balletje wordt gevonden in doosje $j$ | toestand is $\|\psi_{ini}\rangle$ en $M^j$ | $\frac{1}{3}$ |
| Het balletje wordt niet gevonden in doosje $j$ | toestand is $\|\psi_{ini}\rangle$ en $M^j$ | $\frac{2}{3}$ |
| Het balletje wordt gevonden in $\|\psi_{fin}\rangle$ | balletje zit in $\|j\rangle$ met $j = 1$ of 2 | $\frac{1}{3}$ |
| Het balletje wordt niet gevonden in $\|\psi_{fin}\rangle$ | balletje zit in $\|j\rangle$ met $j = 1$ of 2 | $\frac{2}{3}$ |
| Het balletje wordt gevonden in $\|\psi_{fin}\rangle$ | balletje zit in $\|j\rangle + \|3\rangle$ met $j = 1$ of 2 | 0 |
| Het balletje wordt niet gevonden in $\|\psi_{fin}\rangle$ | balletje zit niet in $\|j\rangle + \|3\rangle$ met $j = 1$ of 2 | 1 |

We kunnen hier bijvoorbeeld zien dat als we geen balletje zien tijdens de eerste meting, we ook geen balletje kunnen zien tijdens de postselectie oftewel: Als de postselectie slaagt, moet er wel een deeltje gezien zijn, onafhankelijk in welk doosje is gekeken. Oftewel $P(d \mid M^{ps}) = 1$ als we nu gebruiken dat $d = d^1 \vee d^2$ en het feit dat we nu willekeurige voorwaarden kunnen toevoegen

[7]Hierbij nemen we een orthonormale basis van $\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 1| + \langle 2| - \langle 3|)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| - \langle 2|)$ en $\frac{1}{\sqrt{6}}(\langle 1| + \langle 2| + 2\langle 3|)$

(de kans blijft 1, als het mogelijk is, anders is het ongedefiniëerd) Volgt hieruit eenvoudig dat $P(d \mid M^{ps}) = P(d^1 \vee d^2 \mid M^{ps} \wedge M^j)$ voor $j = 1, 2$en doordat $P(d^1 \mid M^2) = P(d^2 \mid M^1) = 0$ Volgt hieruit dat $P(d^j \mid M^{ps} \wedge M^j) = 1$. Dit volgt volledig uit traditionele kwantummechanische berekeningen zonder postselectie en retrospectieve berekeningen toe te passen.

‘

# 7 Maximale kans

Bij welke keuze van zijn toestand $|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle$ maakt de organisator nu de meeste kans om te winnen? Aangezien de kwantummechanica invariant is onder U(1)-transformaties, kunnen we deze U(1)-transformaties gebruiken om de derde coëfficient van de toestand reëel en positief te maken. Als we tegelijkertijd de golffunctie normeren krijgen we als resultaat:

$$c_3 = \sqrt{|c_1|^2 + |c^2|^2}. \tag{18}$$

Als we $c_1$ en $c_2$ nu schrijven als $c_j = a_j \times e^{i\theta_j}$ met $a_j > 0$ en $\theta_j, a_j \in \mathbb{R}$

dan kunnen we het inproduct met een andere arbitraire vector $|\phi\rangle$ bepalen:

$$\langle \phi \mid \psi \rangle = a_1 e^{i\theta_1} \langle \phi \mid 1 \rangle + a_2 e^{i\theta_2} \langle \phi \mid 2 \rangle + a_3 \langle \phi \mid 3 \rangle. \tag{19}$$

Omdat we bij het bepalen van de uiteindelijke kans geïnteresseerd zijn in het bepalen van

$$P_s(d^1 \mid M^1 \wedge d^{ps}) = \frac{|\langle \psi_{fin} \mid 1 \rangle \langle 1 \mid \psi_{ini} \rangle|^2}{|\langle \psi_{fin} \mid 1 \rangle \langle 1 \mid \psi_{ini} \rangle|^2 + |\sum_{j=2,3} \langle \psi_{fin} \mid j \rangle \langle j \mid \psi_{ini} \rangle|^2}. \tag{20}$$

gaan we deze formule nu invullen voor $|\psi_{ini}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$ en $|\psi_{fin}\rangle = |\psi\rangle$. Hierbij krijgen we als resultaat:

$$\frac{|c_1 \frac{1}{\sqrt{3}}|^2}{|c_1 \frac{1}{\sqrt{3}}|^2 + |(c_2 + c_3) \frac{1}{\sqrt{3}}|^2}. \tag{21}$$

Na uitschrijven van de c's wordt deze formule gegeven door

$$\frac{a_1^2}{3} \frac{3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_2 a_3 (e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_2})}, \tag{22}$$

Wat met behulp van de definitie van de cosinus gelijk is aan

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 \cos\theta_2}. \tag{23}$$

Als we nu op zoek gaan naar een maximum van deze functie ten opzichte van $\theta_2$ vinden we al snel dat dit maximum bereikt wordt voor $\theta_2 = \pi$. Door nu ook te kijken naar de formule voor $P_s(d^2 \mid M^2 \wedge d^{ps})$ vinden we dat $\theta_1 = \pi$.

Nu moeten we enkel nog op zoek naar waardes voor $a_1$, $a_2$ en $a_3$. We willen dit doen door

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3} \tag{24}$$

te maximaliseren. Deze functie is maximaal als $a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3$ minimaal is. Dat is echter minimaal als $(-a_2 + a_3)^2$ minimaal is, en dat is het geval als $a_2 = a_3$. Op eenzelfde manier kunnen we redeneren dat $a_1 = a_2 = a_3$ en als we de gevonden vector normeren vinden we dat de toestand waarmee de organisator de meeste kans maakt om te winnen (bij gegeven begintoestand) bepaalt wordt door

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(-|1\rangle - |2\rangle + |3\rangle) \tag{25}$$

Dit is op globale U(1)-symmetrie na ook de enige toestand met maximale kans.

# 8 Experimentele Realiseerbaarheid

Alhoewel de berekeningen in het voorgaande allemaal wellicht heel redelijk klinken, is er nog een vraag die beantwoord moet worden. Hebben we al de tijd gekeken naar een hersenschim, of is een systeem met de beschreven eigenschappen daadwerkelijk mogelijk? In de literatuur is echter een voorbeeld te vinden van een experiment dat zich gedraagt als de paradox die in het voorgaande uitgebreid behandeld is.[**?**] We nemen een 3-spletenexperiment zoals te zien in afbeelding 8. We hebben een laser die licht uitzend met een golflengte gegeven door $\lambda$. De spleten liggen een afstand $D$ uit elkaar en op een afstand $L$ van het scherm staat een detector.

Als we er nu voor zorgen dat geldt dat

$$\sqrt{L^2 + a^2} - L = \frac{\lambda}{2} \tag{26}$$

krijgen we een interferentiepatroon op bij de detector. Zolang we geen meting doen bij het scherm komen is de vorm van de golf die gemeten wordt in de detector gelijk aan een interferentiepatroon van de 3 deeltjes, waarbij 2 elkaar cancellen en de derde dus gemeten wordt. De deeltjes die door de 1 of de 2-spleet zijn gegaan komen immers een halve golflengte later aan en zijn dus precies in tegenfase, maar ze zijn wel met 2x zoveel, dus het cancelt niet volledig.

Als we nu een detector op spleet 1 (of 2 natuurlijk, die zijn inwisselbaar) zetten, en dan bekijken of we wat kunnen meten bij de detector, vinden we een andere voorspelling. Een deeltje gaat nu of door een superpositie van spleet 2 en spleet 3 heen, of door spleet 1. Als het deeltje nu door de superpositie heen gaat, ontstaat er in het interferentiepatroon op de muur een knoop. Als het deeltje dus niet wordt gemeten bij spleet 1, kan het ook niet gemeten worden in de detector. Hiermee is de situatie dus identiek aan het voorbeeld wat we behandeld hebben. Als we een deeltje in de eindtoestand (detector) meten, moet het ook gemeten zijn in de toestand gekozen door de speler (detector op spleet 1 of 2) ongeacht welke spleet de speler kiest.

Figuur 1: Voorbeeld van het klassieke spel, De persoon links is een handlanger die bezig is de beurs van de persoon in het midden te roven