Toeval en/of determinisme in de natuurwetenschap

Het Bohr-Einstein debat

Klaas Landsman

HOVO-cursus: 14 en 21 januari 2010

Radboud Universiteit Nijmegen
Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics
Heyendaalseweg 135, 6525 AJ Nijmegen

CONCEPT: 11 JANUARI 2010
landsman@math.ru.nl

1
Toeval

Dit onderdeel van de cursus gaat over de vraag of toeval 'echt' bestaat. Het zal u waarschijnlijk niet meteen duidelijk zijn wat deze vraag precies betekent. We zullen daarom eerst de interpretatie van het woord 'toeval' nader onderzoeken. Daarna gaan we proberen helder te formuleren wat wij onder 'echt' toeval verstaan. Dit doen we aan de hand van enkele voorbeelden van toevalsprocessen.

Voordat we u dit allemaal gaan vertellen, mag u eerst zelf aan de slag:

1. Probeer zo helder mogelijk te formuleren wat u onder het begrip 'toeval' verstaat.
2. Vergelijk uw antwoord met uw buurman of buurvrouw en bespreek met elkaar de eventuele verschillen.

Waarschijnlijk hebt u hierbij gemerkt dat er verschillende interpretaties van het woord toeval bestaan. *'Toeval is een gebeurtenis die plaatsvindt met een hele kleine kans'* en *'Toeval is een gebeurtenis die niet te voorspellen is'* zijn beide aannemelijke uitspraken over toeval, maar komen niet op hetzelfde neer. De betekenis van het begrip toeval is vaak afhankelijk van de persoon die het gebruikt en van de context waarin het gebruikt wordt. De vraag 'Bestaat toeval?' kan dus niet zonder meer worden gesteld - laat staan beantwoord - zonder deze betekenis precies te maken.

De verschillende interpretaties van het woord toeval maken het ook moeilijk om een wiskundige redenering over dit onderwerp op te zetten. Omdat we dit wel van plan zijn gaan we, tegen beter weten in, toch een poging doen een definitie van het begrip toeval te vinden. Met behulp van de Van Dale vinden we het volgende:

toe·val^1 *(het ∼), gebeurtenis of omstandigheid die vooraf niet te voorzien, niet te berekenen is geweest.*
toe·val^2 *(het, de ∼ (m.)), aanval van epilepsie*

De tweede betekenis is voor ons niet van belang en wordt ook zelden nog gebruikt. De eerste lijkt aardig in de richting te komen van waar we naar op zoek zijn. Met deze betekenis van toeval in ons achterhoofd gaan we verder en bekijken we enkele voorbeelden van toevalsprocessen.

Opgooien van een munt
Als íets in het dagelijks leven als toeval beschouwd wordt, dan is het wel het opgooien van een munt. Bij een eerlijke munt dacht iedereen tot voor kort dat de kans op kop en munt beide gelijk zijn aan 1/2. In 2007 verscheen echter het artikel *Dynamical bias in the coin toss* van de gezaghebbende Californische wiskundigen Persi Diaconis (een voormalig goochelaar), Susan Holmes (een statisticus en tevens de echtgenote van Diaconis), en Richard Montgomery (een expert in de klassieke mechanica van Newton), waarin zij zowel wiskundig als experimenteel lieten zien dat de kans dat de munt valt op de zijde die voor de worp boven lag, 0.51 is! Zie `http://comptop.stanford.edu/preprints/heads.pdf` en voor een inleiding ook `http://en.wikipedia.org/wiki/Coin-flipping`.

Hoe dan ook weten we voordat we gaan gooien nog niet wat de uitkomst zal zijn. Het lijkt dus om een gebeurtenis te gaan waarvan de uitkomst (door ons) *niet te berekenen is geweest* en volgens de definitie van de Van Dale gaat het in dat geval om toeval. We kunnen ons echter afvragen of het wel juist is om te stellen dat de uitkomst van een worp met een munt niet te berekenen is. Als we op de hoogte zouden zijn geweest van alle details van we worp, dan zouden we met behulp van Newtons wetten van de mechanica wel degelijk in staat zijn geweest de uitkomst met zekerheid te voorspellen. Diaconis, Holmes en Montgomery laten dat ook wiskundig zien, en bovendien vertonen ze een machine die een munt zo kan lanceren dat de worp er volkomen toevallig uitziet, maar in werkelijkheid altijd op dezelfde manier eindigt. Met andere woorden, het ogenschijnlijke toeval van de worp wordt veroorzaakt door het feit dat wij niet over voldoende informatie beschikken om de uitkomst te berekenen.

In dit geval bestaat deze informatie in principe uit:

- de verticale beginsnelheid van de munt op het moment van het loslaten ervan;
- de verdere beweging van de munt, met name de rotatie om een bepaalde as, eveneens op het moment van het loslaten;
- de beweging van alle moleculen in de lucht tijdens de worp.

Het laatste blijkt in de praktijk verwaarloosbaar te zijn. Als we dus de begincondities van de worp precies zouden kennen en bovendien zeer goed zouden kunnen rekenen, zouden we de uitkomst van de worp kunnen voorspellen. Helemaal los van het begrip 'voorspellen' kunnen we zeggen: de uitkomst van de worp is in principe *bepaald*, en wel door de beginvoorwaarden. Dit is een wezenlijke eigenschap van de klassieke mechanica van Newton, die bijvoorbeeld ook de loop der planeten bepaalt. We gaan hier in het volgende hoofdstuk nader op in.

De weerkaatsing van licht

U hebt vast wel eens de volgende situatie meegemaakt: u staat in een verlichte kamer en buiten is het donker. De gordijnen zijn open. Als u voor het raam gaat staan zult u uw spiegelbeeld in de ruit zien. Op hetzelfde moment zal iemand die buiten staat u ook kunnen zien. Blijkbaar wordt een gedeelte van het licht in de kamer door het raam teruggekaatst (dat gedeelte geeft uw spiegelbeeld), terwijl tegelijkertijd een ander gedeelte wordt doorgelaten (waardoor de voorbijganger u kan zien).
Misschien zou u op het eerste gezicht niet verwachten dat aan deze ervaring een toevalsproces ten grondslag ligt. De moderne natuurkunde leert echter dat licht uit kleine, ondeelbare deeltjes bestaat, genaamd ***fotonen***. Met geavanceerde apparatuur is het in principe mogelijk één enkel foton naar het raam te schieten, en dan blijkt dat het soms wordt doorgelaten en soms wordt weerkaatst: de uitkomst is vooraf niet te voorspellen.

We hebben nu twee voorbeelden van toevalsproccessen gezien. De *oorzaak* van het toeval is in het eerste voorbeeld een bepaald gebrek aan informatie en rekenkracht. Een belangrijke opmerking hierbij is dat deze informatie *in principe* wel beschikbaar is. Hoe zit het met het tweede voorbeeld?

Wordt elk toevalsproces veroorzaakt door een gebrek aan informatie die in principe wel voorhanden is? In het vervolg zullen we gebruik maken van de formele term *zuiver toeval*.

Definitie 1.1 *(Voorlopige versie) We noemen een toevalsproces **zuiver** als het ogenschijnlijk toevallige karakter **niet** wordt veroorzaakt door onwetendheid over natuurwetten of details, en/of door gebrekkige rekenkracht.*

Met deze definitie kunnen we de bovenstaande vraag herformuleren tot de vraag '*Bestaat zuiver toeval?*'. Deze vraag was tussen 1927 en 1949 het onderwerp van een verhit debat tussen Albert Einstein (1879–1955) en Niels Bohr (1885–1962), de twee grootste natuurkundigen van de twintigste eeuw. Meer hierover leest u in het volgende hoofdstuk. Maar hopelijk bent u nu zelf ook nieuwsgierig geworden naar het antwoord op de vraag!

2

Het debat tussen Einstein en Bohr

In het begin van de twintigste eeuw was de vraag of zuiver toeval bestaat een belangrijk onderwerp van debat in de wetenschap. Men ontwikkelde nieuwe theorieën om verschijnselen als radioactiviteit te kunnen verklaren. Voor het eerst kregen kansen een belangrijke plaats in de natuur en uiteindelijk mondde dit uit in het ontstaan van de kwantummechanica. In dit hoofdstuk bespreken we de belangrijkste gebeurtenissen en personen die een bijdrage hebben geleverd aan deze ontwikkeling.

U hebt in het vorige hoofdstuk een paar voorbeelden gezien van schijnbaar toevallige gebeurtenissen die toch van tevoren al vastlagen, zoals het resultaat van een worp met een munt.

Is alles wat gebeurt in principe al bepaald? De beroemde islamitische geleerde Omar Khayyam (1048–1131) drukte deze mogelijkheid als volgt uit:

> "De eerste dag van de schepping schreef
> Wat de Dag des Oordeels zal lezen."

Het idee dat iedere gebeurtenis in principe al bepaald is door het verleden heet ***determinisme***. Een minder vaak gebruikt maar even goed woord voor determinisme is ***bepaaldheid***. Tot de wetenschappelijke revolutie in de zeventiende eeuw was het argument voor determinisme dat God alles wist: toeval zou een belediging zijn voor zijn alwetendheid en volmaaktheid.
Met de klassieke natuurkunde van Isaac Newton (1642–1727), die bijvoorbeeld de planeetbanen beschrijft, verschoof het accent van God naar de natuurwetten. Piere-Simon Laplace (1749-1827), een zeer zelfverzekerd persoon die zich als de opvolger van Newton beschouwde, zei op zekere dag tegen zijn baas Napoleon zelfs dat hij God niet meer nodig had.[1] Laplace formuleerde het deterministische karakter van de wetten van Newton (en daarmee de bepaaldheid van de natuur) op de volgende manier:

> "Voor een intelligent wezen dat op een bepaald moment zowel alle krachten in de natuur kent als de toestand van alle deeltjes zou niets onzeker zijn, en zouden zowel de toekomst als het verleden bekend zijn."

Met de wetten van Newton leek het in principe dus mogelijk de toekomst te voorspellen. Preciezer gezegd, wat de de gang van zaken in de natuur betreft geldt:

> *zekerheid is de combinatie van determinisme en alwetendheid.*

Want al zijn Newtons wetten van de mechanica in principe nog zo deterministisch, men moet naast deze wetten en de krachten die daarin voorkomen ook de begincondities van een systeem kennen en perfect kunnen rekenen om exact te kunnen voorspellen hoe dit systeem zich in de toekomst zal gedragen (denk bijvoorbeeld aan het voorbeeld van de munt).[2]

---

1. Newton zelf daarentegen was zeer religieus en plaatste God boven zijn wetten.
2. Bij deeltjes worden de begincondities gegeven door de plaatsen en snelheden op een bepaalde tijd. Dit is wat Laplace met de

De mens wikt, God beschikt[3]
Tot de twintigste eeuw dachten de meeste mensen dat alles door God of de natuurwetten (of allebei) bepaald was. Waar komt toeval vandaan in een dergelijke deterministische wereld? Als zekerheid de combinatie is van determinisme en **al**wetendheid en determinisme niet ter discussie staat, moet wel gelden:

> **on***zekerheid is de combinatie van determinisme en* **on***wetendheid.*

Toeval is in een deterministisch wereldbeeld dus altijd een gevolg van een gebrek aan informatie of kennis. Voor gelovigen is alles door God bepaald, alleen weten wij mensen het niet. Voor natuurkundigen geldt dat gebeurtenissen voor ons ogenschijnlijk toevallig zijn als wij de begincondities niet precies kennen en ook niet goed genoeg kunnen rekenen en voorspellen. Volgens de klassieke natuurkunde is het bestaan van toeval dus eigenlijk een puur menselijke illusie!

De kansrekening werd in ieder geval door alle partijen als iets vulgairs gezien, en werd dan ook in eerste instantie ontwikkeld in de context van gokspelen - over menselijke onvolmaaktheid gesproken! De eerste wiskundige verhandling over kansrekening werd in het midden van de zeventiende eeuw geschreven door onze landgenoot Christiaan Huygens (1629-1695). Een eeuw later zou gek genoeg juist Laplace er ook een belangrijk werk over schrijven. Begrippen als kansverdeling en verwachtingswaarde stammen al uit die tijd.

Het ontstaan van de kwantumtheorie
Pas in de twintigste eeuw kwam de gedachte op dat zuiver toeval zou kunnen bestaan (zoals gedefinieerd in het vorige hoofdstuk). Men begon te betwijfelen of de natuurwetten wel deterministisch waren, zodat de oude verklaring van onzekerheid als combinatie van determinisme en onwetendheid werd vervangen door een nieuw scenario: onzekerheid zou een gevolg kunnen zijn van *in*determinisme.
Rond 1900 waren namelijk enige verschijnselen bekend, zoals radioactiviteit en de precieze eigenschappen van warmtestraling, die niet zo één twee drie door de klassieke natuurkunde verklaard konden worden. Dit leidde tot grote verwarring over de rol van toeval in de natuur. Het resultaat van deze periode van verwarring, die duurde van ongeveer 1900 tot 1925, was de kwantumtheorie.

Het werk van Max Planck (1858–1947) aan warmtestraling wordt vaak gezien als het begin van de ontwikkelingen die uiteindelijk tot de kwantumtheorie zouden leiden. Planck gebruikte in zijn theorie van warmtestraling uit 1900 geheel onverwacht een statistische aanpak om dit verschijnsel te beschrijven.[4]
Ook in het atoommodel van Bohr uit 1913, waarin de elektronen om de kern zwermen als planeten om de zon, spelen kansen een fundamentele rol. Dit zit hem in de 'kwantumsprong' die een elektron af en toe en volkomen onvoorspelbaar van de ene naar de andere baan kan maken. In 1918 beschreef Einstein deze kwantumsprongen op systematische wijze met behulp van de kanstheorie. We zullen hier later nog op terugkomen, omdat kwantumsprongen van elektronen de oorsprong zijn van licht dat atomen uitzenden.

Planck en Einstein gingen er echter beiden vanuit dat toeval altijd veroorzaakt wordt door een gebrek aan informatie en dachten dat het statistische element in hun aanpak slechts een voorlopig karakter had. Ook andere natuurkundigen in die tijd verwachtten dat spoedig een definitieve, deterministische theorie van de microscopische wereld zou worden ontdekt. In deze theorie zou, net als in Newtons theorie van de macroscopische natuur, geen ruimte zijn voor zuiver toeval.

In januari 1926 waren er inderdaad twee nieuwe theorieën op de markt. De ene, opgesteld door Werner Heisenberg (1901–1976), was zeer wiskundig van aard. Deze theorie bevatte niets dat men zich ook maar bij benadering natuurkundig kon voorstellen. Heisenberg was daar zelfs trots op, omdat hij al lang het idee had dat de microscopische natuur in principe niet voorstelbaar kon zijn. Bovendien kwam het revolutionaire karakter van zijn theorie zo duidelijk naar voren.
De andere theorie, afkomstig van Erwin Schrödinger (1887–1961), was eveneens op geavanceerde wiskunde gebaseerd, maar ging uit van de eenvoudige voorstelling dat alle vormen van materie (en dus ook deeltjes zoals elektronen) golven zijn. Schrödinger was veel conservatiever dan Heisenberg. Hij benadrukte niet alleen het aanschouwelijke karakter van zijn theorie, maar ook zijn visie dat deze deterministisch zou zijn. Hij bleek echter niet in staat deze visie wiskundig waar te maken.

'toestand' bedoelt.
3. Van dit Vlaamse gezegde bestaat ook een Islamitische versie: "Allah laat dwalen wie hij wil."
4. Deze aanpak bleek alleen goed te werken in combinatie met het postulaat dat energie uit kleine pakketjes ofwel kwanta bestaat; vandaar de naam kwantumtheorie of kwantummechanica.

Zuiver toeval!
Toen vond een beslissende ontwikkeling plaats. Max Born (1882–1970) stelde nog in datzelfde jaar (1926) voor om de 'materiegolven' van Schrödinger niet als werkelijk bestaande golven te interpreteren, maar als *kansen*. We zullen later in dit boekje in een eenvoudige situatie zien hoe dit in zijn werk gaat. Het voorstel van Born was een keerpunt in de geschiedenis van de natuurwetenschappen: het was de eerste keer dat kansen een fundamentele plaats kregen in de natuur, en niet slechts gebruikt werden om 'een gebrek aan informatie' op te vangen.

Dit idee vond vrijwel algehele instemming, en vormt tot op de dag van vandaag de basis voor ons begrip van de microscopische wereld. In 1927 lieten de natuurkundige Paul Dirac (1902–1984) en de wiskundige John von Neumann (1903–1957) zien hoe de theorieën van Heisenberg en Schrödinger samenhingen. Ze stelden een algemene theorie op die nu als *kwantummechanica* bekend staat. De materiegolven van Schrödinger werden nu geïnterpreteerd als *toestanden* van een kwantummechanisch systeem, te vergelijken met het geheel van alle plaatsen en snelheden van deeltjes dat de toestand van een klassieke systeem bepaalt. Het voorstel van Born om kansen een fundamentele plaats te geven werd daarmee sterk uitgebreid: niet alleen materiegolven maar alle toestanden in de kwantumtheorie spelen sindsdien een zuiver kanstheoretische rol.
De kwantummechanica vervangt op microscopische schaal de klassieke mechanica van Newton, en is volgens de interpretatie van Born, Dirac en von Neumann *geen* deterministische theorie.

Zuiver toeval?
Schrödinger en Einstein waren echter niet tevreden met deze uitkomst. Eind 1926 schreef Einstein in een brief aan Born, met wie hij bevriend was, de volgende beroemde woorden over de kwantummechanica:

> *"Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt."*

In vertaling:

> "De theorie levert veel op, maar brengt ons nauwelijks dichter bij het geheim van God. In ieder geval ben ik er van overtuigd dat hij niet dobbelt."

Bohr daarentegen schaarde zich (net als Heisenberg) onmiddellijk achter Born en begon zich zelfs als de kampioen van het indeterminisme te manifesteren. Volgens Bohr was het niet aan Einstein om te vertellen wat God had te doen en laten. Bohr en Einstein voerden tussen 1927 en 1949 een verhit debat over het bestaan van zuiver toeval in de natuur, maar werden het nooit met elkaar eens. Tot hun dood waren er ook geen harde argumenten om de een of de ander gelijk te geven: hun debat leek filosofisch en onoplosbaar.

Hoe nu verder?
Samengevat bestonden er in de tijd van Einstein en Bohr twee mogelijke scenario's:

1. De wereld is deterministisch; de toekomst ligt volledig vast door het verleden en er is geen ruimte voor zuiver toeval. Alle schijnbare toevalligheden worden veroorzaakt door een gebrek aan informatie die in principe wel voorhanden is. Einstein was een aanhanger van dit scenario.
2. De wereld is *niet* deterministisch; in de natuur bestaat zuiver toeval. Er zijn gebeurtenissen die onmogelijk te voorspellen zijn. Zelfs met de de meest geavanceerde meetapparatuur en toekomstige theorieën is niets te zeggen over de uitkomst. Dit was het standpunt van Bohr.

We zullen straks gaan kijken hoe het debat na de dood van de beide tegenstanders verder verliep (en volgens velen werd beslist in het voordeel van Bohr). Maar eerst is wat wiskunde nodig. Het microscopische proces dat het sterkste argument voor het bestaan van zuiver toeval levert, is het tollen van een piepklein muntje. Om dat proces te beschrijven, zowel in de klassieke mechanica als in de kwantummechanica, moet u snel leren rekenen met vectoren in de ruimte.

We sluiten dit hoofdstuk af met de volgende preciezere versie van Definitie 1.1:

Definitie 2.1 *(Definitieve versie) We noemen een gebeurtenis **zuiver toevallig** als er geen deterministisch proces aan ten grondslag ligt. Met andere woorden, er bestaat geen deterministische theorie die de gebeurtenis bij optimale kennis en rekenkracht voorspelt.*

3

Vectoren

In dit hoofdstuk maakt u kennis met de rekenregels en eigenschappen van vectoren in de ruimte. Daarnaast introduceren we het inproduct tussen twee vectoren. In het volgende hoofdstukken zult u zien op welke manier u deze wiskundige begrippen terugvindt in de kwantummechanica.

Vectoren in the platte vlak
Zoals u misschien weet wordt het platte vlak in de wiskunde ook wel $\mathbb{R}^2$ genoemd. De reden hiervoor is dat een punt in dit vlak kan worden aangeduid met twee reële getallen. Deze getallen zijn bepaald ten opzichte van een willekeurig gekozen punt $(0,0)$ dat we ook wel de *oorsprong* noemen. Ieder punt (v_1, v_2) dat niet gelijk is aan de oorspong bepaalt een pijl van het punt $(0,0)$ naar het punt (v_1, v_2). Een dergelijke pijl noemen we een *vector*. Om de vector (v_1, v_2) niet te verwarren met het punt (v_1, v_2) noteren we een vector meestal met $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ of $\vec{v}$. Het pijltje boven de letter v geeft aan dat een vector een *richting* heeft en dus niet hetzelfde is als het punt (v_1, v_2).

Voorbeeld: De vector $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ is een pijl van het punt $(0,0)$ naar het punt $(3,4)$.

Een vector heeft naast een richting (de richting waarin de pijl wijst) ook een *lengte*, namelijk de lengte van de pijl. Deze kunt u eenvoudig bepalen met de stelling van Pythagoras. De lengte van een vector $\vec{v}$ geven we aan met $\|\vec{v}\|$. We krijgen zo de formule:

$$\left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{3.1}$$

Rekenen met vectoren
U kunt twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ optellen volgens:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

In een plaatje betekent dit dat u de 'staart' van de ene vector achter de 'punt' van de andere vector plaatst. Het maakt niet uit in welke volgorde u vectoren optelt. Met andere woorden:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}. \tag{3.3}$$

De meetkundige betekenis van het optellen van vectoren $\vec{v} + \vec{w}$ is als volgt: teken $\vec{w}$ niet met het nulpunt $(0,0)$ als begin, maar vanuit het eindpunt van $\vec{v}$. De vector van $(0,0)$ naar het eindpunt van deze nieuwe vector is precies $\vec{v} + \vec{w}$.

We kunnen een vector $\vec{v}$ ook met een getal t vermenigvuldigen. Er geldt per definitie:

$$t \cdot \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Als u nu de relatie (3.2) en (3.4) gebruikt, ziet u onmiddellijk in dat

$$t \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = t \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}. \tag{3.5}$$

We zullen het symbool $\cdot$ vaak weglaten, zodat (3.5) eenvoudigweg luidt $t(\vec{v}+\vec{w}) = t\vec{v}+t\vec{w}$. De meetkundige betekenis van deze vermenigvuldiging $t\vec{v}$ is als volgt: als $t > 0$ heeft $t\vec{v}$ dezelfde richting als $\vec{v}$, maar lengte $t\|\vec{v}\|$. Als $t < 0$, heeft $t\vec{v}$ de tegengestelde richting van $\vec{v}$, en lengte $-t\|\vec{v}\|$. In beide gevallen kan men dus schrijven dat $\|t\vec{v}\| = |t|\|\vec{v}\|$.

Het inproduct
In het vervolg is het *inproduct* tussen twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ van groot belang. Het inproduct van twee vectoren wordt genoteerd met $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ en is als volgt gedefinieerd:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2. \tag{3.6}$$

Let op: het inproduct van twee vectoren is zelf geen vector maar gewoon een getal. Bij het rekenen met inproducten is de volgende stelling vaak erg handig.

Stelling 3.1 *Voor willekeurige vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, en $\vec{w}$ geldt:*

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle; & (3.7) \\ \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle; & (3.8) \\ \langle t\vec{v}, \vec{w} \rangle &= t\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle; & (3.9) \\ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{v}\|^2; & (3.10) \\ \langle \vec{u}, t\vec{v} + \vec{w} \rangle &= t\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle & (3.11) \end{aligned}$$

Het gaat one vooral om de volgende eigenschap van het inproduct:

Stelling 3.2 *Twee vectoren staan dan en slechts dan loodrecht op elkaar als hun inproduct gelijk is aan nul.*

We zullen deze stelling niet bewijzen, maar slechts illustreren in een paar voorbeelden:

1. Definieer $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$ en $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$. Dan zien we door een korte berekening dat $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 1$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 1$, en $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$.
2. Definieer $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ en $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Dan volgt $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle = 1$, $\langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = 1$, en $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$.

Vectoren in de ruimte
Tot nu toe hebben we vectoren van dimensie 2 bekeken, die dus in $\mathbb{R}^2$ 'leven'. Precies hetzelfde verhaal geldt echter in dimensie 3, waar een vector er uitziet als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Een dergelijke vector in de ruimte $\mathbb{R}^3$ kan in werkelijkheid bijvoorbeeld optreden als de snelheid van een vliegtuig of een ander voorwerp dat niet aan de grond gebonden is.

Alle bovenstaande stellingen gelden ook in drie dimensies; de formuler voor het inproduct is nu uiteraard

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \tag{3.12}$$

We passen dit nu toe om het begrip *frame* (ook wel *assenstelsel* genaamd) in te voeren.

Definitie 3.1 *Een frame in de ruimte $\mathbb{R}^3$ bestaat uit drie vectoren $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ met de volgende eigenschappen:*

1. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 1$*; met andere woorden: ieder van de drie vectoren heeft lengte 1.*
2. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$*; met andere woorden, de drie vectoren staan loodrecht op elkaar.*

De volgende triples van vectoren vormen bijvoorbeeld een frame:

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

4

Draai-impuls en kwantummechanica

In dit hoofdstuk maakt u kennis met de fysische grootheid waarop het (tot nu toe) beste argument voor zuiver toeval geformuleerd is. Dit is de draai-impuls, die in de klassieke mechanica al een grote rol speelt, maar in de kwantummechanica bijzondere eigenschappen heeft.

Vectoren in $\mathbb{R}^3$ kunnen de rol van een lineaire snelheid spelen. Er is echter een subtieler gebruik van ruimtelijke vectoren in de natuurkunde: de draaisnelheid van bijvoorbeeld een munt. Deze kan met een bepaalde hoeksnelheid om een centrale as draaien; we kunnen deze beide grootheden in één enkele vector $\vec{J}$ stoppen, genaamd de *draai-impuls*:

- $\vec{J}$ heeft als richting de draai-as, waarbij we afspreken dat de munt rechtsom de as roteert, dus als $\vec{J}$ van u af wijst ('in het bord', zoals wiskundigen plegen te zeggen), dan draait de munt met de klok mee);
- $\vec{J}$ heeft als lengte de draaisnelheid (in radialen per seconde) keer een constante die van eigenschappen van de munt afhangt, zoals de massa en de straal; we kiezen deze eigenschappen in het vervolg zo dat deze constante gelijk aan 1 is. De lengte van $\vec{J}$ is dan dus gelijk aan de draaisnelheid.

De componenten van de draai-impuls

Zoals gebruikelijk schrijven we $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$; de componenten J_i zijn meetbare grootheden in de natuurkunde die experimenteel bepaald kunnen worden (bijvoorbeeld door een draaiende munt te filmen). In het algemeen, zoals bij het werpen van een munt, wordt de draaibeweging gecombineerd met een beweging van de munt als geheel; we zullen deze laatste verder vergeten en dus alleen naar draaiende munten kijken waarvan het massamiddelpunt niet beweegt.

We moeten nu iets preciezer worden over de betekenis van de componenten J_i. In feite maken we hier een impliciete keuze voor een frame, namelijk

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

zodat *ten opzichte van dit frame*

$$\vec{J} = J_1\vec{u} + J_2\vec{v} + J_3\vec{w}. \tag{4.2}$$

We kunnen de expansie (4.2) echter ten opzichte van een willekeurig frame $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ opschrijven. Dan veranderen de componenten J_i uiteraard van waarde. Om de frame-afhankelijkheid van deze getallen aan te geven, schrijven we soms $J_i^{(\mathbf{f})}$, waarbij $\mathbf{f} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ een bepaald frame is. Als deze extra notatie wordt weggelaten, bedoelen we meestal het standaard-frame (4.1). De vector $\vec{J}$ hangt zelf niet van het gekozen frame af; alleen zijn componenten doen dit!

Stelling 4.1 *Kies een frame* $\mathbf{f} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *en schrijf*

$$\vec{J} = J_1^{(\mathbf{f})}\vec{u}_1 + J_2^{(\mathbf{f})}\vec{u}_2 + J_3^{(\mathbf{f})}\vec{u}_3. \tag{4.3}$$

Dan geldt voor $i = 1, 2, 3$*:*

$$J_i^{(\mathbf{f})} = \langle \vec{J}, \vec{u}_i \rangle, \tag{4.4}$$

en

$$\|\vec{J}\|^2 = (J_1^{(\mathbf{f})})^2 + J(_2^{(\mathbf{f})})^2 + (J_3^{(\mathbf{f})})^2. \tag{4.5}$$

Hier volgt i.h.b. uit dat het rechterlid niet van het gekozen frame $\mathbf{f}$ *afhangt (zijnde de gekwadrateerde lengte van* $\vec{J}$*, die daar tenslotte ook niet van afhangt).*

Dit volgt uit een expliciete rekenpartij, met herhaaldelijk gebruik van de rekenregels voor het inproduct in het vorige hoofdstuk. Zo volgt (4.4) uit (4.3) door voor iedere i het inproduct $\langle \vec{u}_i, \vec{J} \rangle$ te bepalen, en volgt (4.5) uit (3.10) en (4.3).

Uiteraard zijn de componenten $J_i^{(\mathbf{f})}$ ten opzichte van ieder frame $\mathbf{f}$ meetbare grootheden. In de klassieke mechanica kunnen die in principe alle mogelijke waarden aannemen.

De draai-impuls in de kwantummechanica
In de kwantummechanica gebeurt er echter iets bijzonders: de draai-impuls is gekwantiseerd! Dit betekent dat de componenten $J_i^{(\mathbf{f})}$ van de draai-impuls ten opzichte van een willekeurig frame $\mathbf{f}$ een heel- of halftallig veelvoud van de constante van Planck $\hbar$ moeten zijn. In het dagelijks leven merken we daar weinig van, omdat $\hbar$ in 'dagelijkse' eenheden (zoals SI-eenheden) bijzonder klein is, nl. ongeveer 10^{-34} Js, terwijl de getallen $J_i^{(\mathbf{f})}$ in dezelfde eenheden van orde 1 zijn, dus zo'n 10^{34} keer $\hbar$. En dan ziet u al nauwelijks het verschil tussen zeg $10^{34} \times \hbar = 1$ en $(10^{34} + 1) \times \hbar = 1 + 10^{-34}$, laat staan dat het opvalt dat waarden tussen deze twee getallen niet aangenomen worden.

Dit is heel anders op zeer kleine schaal. Behalve een massa hebben elementaire (of meer algemeen: subatomaire deeltjes) een *spin*. Dit betekent dat u ze in zeker opzicht als piepkleine draaiende muntjes kunt beschouwen. De componenten $J_i^{(\mathbf{f})}$ van de bijbehorende draai-impuls zijn dan van de orde van $\hbar$. En dan blijkt zeer duidelijk dat waarden tussen zeg $\frac{1}{2} \times \hbar$ en $\hbar$ niet in de natuur voorkomen.

We drukken de spin van een (massief) deeltje uit als een geheel of halftallig getal.[1]

1. Het zogenaamde *Higgs-boson* heeft spin nul, wat betekent dat het niet draait (mocht het bestaan, wat vermoedelijk dit jaar zal blijken uit experimenten met de LHC van CERN in Genève). Ook de zgn. pionen uit de jaren '60 hebben spin nul. Voor alle frames $\mathbf{f}$ en alle $i = 1, 2, 3$ geldt $J_i^{(\mathbf{f})} = 0$ en dus ook

$$\|\vec{J}\|^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = 0. \tag{4.6}$$

2. Het *elektron* daarentegen heeft spin $\frac{1}{2}$, evenals alle soorten *quarks*. Dat betekent *per definitie* dat iedere component slechts $J_i^{(\mathbf{f})}$ de waarden $\pm\frac{1}{2}\hbar$ aan kan nemen, zodat vanwege (4.5), geldt

$$\|\vec{J}\|^2 = \frac{3}{4}\hbar^2. \tag{4.7}$$

3. De *W-bosonen* $W^{\pm}$ en het Z^0*-boson*, die in 1983 op CERN ontdekt zijn, hebben spin 1. Dit betekent *per definitie* dat iedere component $J_i^{(\mathbf{f})}$ de waarden $\pm\hbar$ of 0 aan moet nemen, onder de eis dat

$$\|\vec{J}\|^2 = 2\hbar^2. \tag{4.8}$$

Zo kunnen we doorgaan: voor een deeltje met spin $j/2$ (voor $j = 0, 1, 2, \ldots$) kunnen de componenten $J_i^{(\mathbf{f})}$ in principe de waarden $-j\hbar$, $(-j + 1)\hbar$, ..., $j\hbar$ aannemen (de waarden lopen dus met heeltallige sprongen ter grootte van $\hbar$ van $-j\hbar$ tot $+j\hbar$), onder de voorwaarde dat

$$\|\vec{J}\|^2 = j(j + 1)\hbar^2. \tag{4.9}$$

1. Massaloze deeltjes, zoals het foton en het graviton hebben ook spin, maar in dat geval moet de rotatie-as loodrecht op de bewegingsrichting liggen, een beperking die voor massieve deeltjes niet geldt. Men spreekt dan van *heliciteit* i.p.v. spin. Als de waarde van de heliciteit j is, kunnen de componenten van de draai-impuls die loodrecht op de bewegingsrichting liggen slechts de waarden $\pm j$ aannemen, zonder de tussenliggende waarden zoals bij massieve deeltjes. Het foton en graviton hebben heliciteit resp. 1 en 2.

Voor $j = 0$, $j = 1/2$, en $j = 1$ geeft dit de bovenstaande resultaten terug.[2] Een deeltje met een bepaalde spin $\neq 0$ kan er dus niet voor 'kiezen' om helemaal niet te draaien: de *lengte* van de draai-impuls $\vec{J}$ is bepaald door de 'aard' van het deeltje. Het kan wél de *richting* van de draai-impuls 'kiezen'. En deze richting bepaalt weer de componenten van $\vec{J}$. De volgende consequentie daarvan zal in het volgende hoofdstuk een cruciale rol spelen in het argument voor zuiver toeval.

Stelling 4.2 *Voor een deeltje met spin 1 kunnen voor ieder frame* $\mathbf{f}$ *de drie getallen* $((J_1^{(\mathbf{f})})^2, (J_2^{(\mathbf{f})})^2, (J_3^{(\mathbf{f})})^2)$ *uitsluitend de waarden* $(\hbar^2, \hbar^2, 0)$*,* $(\hbar^2, 0, \hbar^2)$*, of* $0, \hbar^2, \hbar^2)$ *aannemen. In eenheden waarin* $\hbar = 1$ *zijn dit dus de mogelijke combinaties* $(1, 1, 0)$*,* $(1, 0, 1)$*, en* $(0, 1, 1)$.

Dit is (hopelijk) duidelijk: met $\hbar = 1$ kan ieder van de drie getallen $(J_1^{(\mathbf{f})}, J_2^{(\mathbf{f})}, J_3^{(\mathbf{f})})$ volgens punt 3 boven slechts -1, 0, of $+1$ zijn. Daarnaast geldt volgens (4.9) dat $(J_1^{(\mathbf{f})})^2 + (J_2^{(\mathbf{f})})^2 + (J_3^{(\mathbf{f})})^2 = 2$. Dit leidt tot de gegeven combinaties.

Er is echter iets merkwaardigs aan de hand, dat nog vreemder is dan de kwantisatie van de componenten van de spin. Het blijkt dat de componenten J_1, J_2, en J_3 (en meer in het algemeen $J_1^{(\mathbf{f})}$, $J_2^{(\mathbf{f})}$, en $J_3^{(\mathbf{f})}$ voor een frame $\mathbf{f}$) *niet gelijktijdig gemeten kunnen worden*. Dit komt (volgens Bohr en Heisenberg) omdat een experimentele opstelling die zeg J_1 meet, altijd een verstorende invloed heeft op een opstelling die J_2 of J_3 meet. Dit blijkt *in het speciale geval van spin 1* echter niet voor de *kwadraten* van deze componenten te gelden! Voor ieder gegeven frame $\mathbf{f}$ kunnen de drie getallen $(J_1^{(\mathbf{f})})^2$, $(J_2^{(\mathbf{f})})^2$, en $(J_3^{(\mathbf{f})})^2$ dus tegelijk gemeten worden, in overeenstemming met Stelling 4.2. Men kan dus zonder problemen bepalen of ieder van deze drie kwadraten de waarde 0 of 1 neemt, maar in het laatste geval kan men niet ook nog bepalen of deze 1 het kwadraat van -1 of van +1 is. Wat echter weer *niet* kan, is het gelijktijdig meten van deze drie kwadraten voor een bepaald frame $\mathbf{f}$, én de corresponderende kwadraten voor een ander frame $\mathbf{f}'$.

Wat gebeurt er in de praktijk nu bij een meting van J_1, J_2, en J_3 (voor het gemak nemen het standaardframe)? Dat hangt af van de toestand van het deeltje. Er bestaat een toestand waarin het meetresultaat altijd $(1, 1, 0)$ is, en zo bestaan er ook toestanden waarin het resultaat altijd $(1, 0, 1)$ of $(0, 1, 1)$ is. Maar nu komt het: in de meeste toestanden komt er voortdurend een andere uitkomst, ook als de toestand bij ieder experiment heel nauwkeurig steeds hetzelfde is! Zo is er een toestand waarin in ongeveer 1/3 van de experimenten $(1, 0, 1)$ wordt gemeten, bij 1/3 wordt het $(1, 0, 1)$, en eveneens in 1/3 van de gevallen komt er $(0, 1, 1)$. En daarbij is ook de volgorde waarin de verschillende uitkomsten optreden volslagen onvoorspelbaar.

De kwantummechanica geeft precies de juiste kansen op bepaalde uitkomsten, maar kan niet, voor een gegeven experiment, voorspellen welke uitkomst in *dat* experiment optreedt. Zoals we al in hoofdstuk 2 hebben gezien, vond Bohr dit prima, terwijl Einstein dacht dat er wel degelijk een deterministische theorie moest bestaan die de uitkomst per experiment met zekerheid zou kunnen bepalen. Volgens hem was ten eerste de begintoestand toch niet nauwkeurig genoeg vastgelegd, zodat de illusie ontstond dat bij een gegeven toestand verschillende meetuitkomsten mogelijk waren. Ten tweede achtte hij de kwantummechanica niet de ultieme theorie en vond hij dat deze vervangen zou moeten worden door een preciezere theorie, die geen kansen op bepaalde meetuitkomsten voorspelt, maar de uitkomsten zelf.

Had Einstein, onlangs verkozen tot de grootste fysicus uit de geschiedenis,[3] gelijk?

2. Let op het verschil tussen (4.7) en (4.8): de eerste vergelijking volgt uit de kwantisatieconditie op de componenten $J_i^{(\mathbf{f})}$, terwijl de tweede een aparte eis is.
3. Zie `www.grootstenatuurkundige.nl`.

5

De stelling van Kochen en Specker

We formuleren en bewijzen nu de stelling van Kochen en Specker uit 1967, die onder twee aannamen het bestaan van zuiver toeval aantoont. De eerste aanname is dat een experimentator zelf kan kiezen wat hij meet. Gegeven deze keuze gaat de andere aanname over de mogelijke invloed van het meetproces op de uitkomst van een meting. In de uiteindelijke stelling van Conway en Kochen komt deze tweede aanname ook weer terug, zij het in een wezenlijk andere vorm. De stelling van Kochen en Specker is ook dan nog van belang, namelijk als hulpstelling (lemma).

Om de volgende stelling te begrijpen moet u heel goed weten wat er in Stelling 4.2 is gebeurd. Ook het einde van hoofdstuk 2 komt nu terug. Kijk daar dus nog even goed naar.

Het is de bedoeling van de stelling van Kochen en Specker om de aanname dat de wereld deterministisch is te weerleggen. Dat gebeurt door een *reductio ad absurdum* argument, oftewel eenbewijs uit tegenspraak. De abstracte vorm hiervan is als volgt. *Stelling:* A is niet het geval. *Bewijs:* Stel dat A wél het geval is. Dan volgt een tegenspraak. Met andere woorden: A is onmogelijk. Einde bewijs.

Determinisme
De aanname dat de wereld deterministisch is, leidt echter op zich niet tot een tegenspraak en is volgens alle bekende inzichten in principe ook houdbaar. Wat volgens Kochen en Specker niet houdbaar blijkt te zijn is de volgende *combinatie*:

KS1: determinisme op het niveau van elementaire deeltjes;
KS2: het idee dat een experimentator zelf kan kiezen wat hij/zij meet, i.h.b. dat deze keuze niet wordt beïnvloed door het systeem waar hij/zij aan meet (dit is een vorm van vrije wil);[1]
KS3: het idee dat de uitkomst van een meting van een bepaalde grootheid niet afhangt van het plaatsvinden van mogelijke andere metingen die tegelijk worden uitgevoerd (in het geval dat deze metingen elkaar niet verstoren). Met andere woorden: de uitkomst van een meting hangt niet af van de specifieke meetopstelling (zolang deze de gewenste grootheid maar correct meet).

De laatste aanname is zeer voorzichtig geformuleerd: er wordt alleen onafhankelijkheid geëist van metingen die volgens de kwantummechanica gelijktijdig en zonder wederzijdse verstoring kunnen worden uitgevoerd. De ene meetopstelling is geschikt om naast een gegeven grootheid x ook y en z te meten, de andere meet behalve x ook y' en z'. Dit mag voor de gevonden waarde voor x volgens **KS3** dus niet uitmaken, ook niet als met de ene opstelling wel y en z maar niet y' en z' gemeten kunnen worden. Kort samengevat mag de gevonden waarde van x niet afhangen van de gekozen meetopstelling (en daarmee, onder de aanname **KS1** van determinisme, ook niet van de uitkomsten van alle andere metingen).

1. Het postulaat van vrije wil is in principe verenigbaar met dat van determinisme; hierover bestaat een uitgebreide filosofische literatuur. Zoek maar eens op internet onder *Compatibilism*. Dan komt u terecht op websites als `http://plato.stanford.edu/entries/compatibilism/`.

Om de situatie goed te begrijpen geven we nog de volgende toelichting.

In de klassieke natuurkunde à la Newton leest een (goed uitgevoerde) meting een *al bestaande waarde* van een grootheid af. Een planeet *is* ergens in de hemel, of u er nu naar kijkt of niet. Een deterministische theorie voorspelt dan dergelijke meetwaarden, die samenvallen met werkelijke waarden die niet door de meting zijn beïnvloed. Het is deze zeer natuurlijke vorm van determinisme, die door de stelling van Kochen en Specker wordt uitgesloten. Als een op deterministische wijze tot stand gekomen waarde van een grootheid namelijk slechts door een meting wordt 'afgelezen', dan wordt deze waarde uiteraard niet beïnvloed door wat er op dat moment nog meer in het laboratorium gebeurt: welke muziek er toevallig aanstaat, of de experimentator tijdens de meting een boterham eet, en wat hij/zij nog meer aan het meten is.

De aannamen in de stellling van Kochen en Specker

We gaan de aannamen **KS1** - **KS3** nu in wiskundige vorm gieten. We bekijken daarvoor een deeltje met spin 1, zoals uitgelegd in het vorige hoofdstuk. Voor een gegeven frame **f** kunnen de componenten $(J_1^{(\mathbf{f})})^2$, $(J_2^{(\mathbf{f})})^2$, en $(J_3^{(\mathbf{f})})^2$ van de draai-impuls gelijktijdig gemeten worden, en een dergelijke meting moet volgens Stelling 4.2 één van de volgende antwoorden geven: $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, of $(0,1,1)$. We nemen hierbij voor het gemak aan dat $\hbar = 1$; deze aanname heeft geen enkele invloed op het resultaat en bespaart ons slechts wat schrijfwerk.

Stel nu dat de wereld op microscopisch niveau deterministisch is (**KS1**) en dat een experimentator tevens kan kiezen ten opzichte van welk frame **f** hij/zij de componenten $(J_1^{(\mathbf{f})})^2$, $(J_2^{(\mathbf{f})})^2$, en $(J_3^{(\mathbf{f})})^2$ van de draai-impuls meet (**KS2**). Dan bestaat er dus een functie V, die aan ieder frame **f** één van de drie combinaties $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, of $(0,1,1)$ toekent. Deze functie V voorspelt de uitkomst van de meting van de draai-impuls t.o.v. het frame **f**. We noteren dit als volgt:

$$V(\mathbf{f}) = (V_1(\mathbf{f}), V_2(\mathbf{f}), V_3(\mathbf{f})), \tag{5.1}$$

waarbij $V_i(\mathbf{f})$ de gevonden waarde van $(J_i^{(\mathbf{f})})^2$ weergeeft, met $\mathbf{f} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ en $J_i^{(\mathbf{f})} = \langle \vec{J}, \vec{u}_i \rangle$. Ten overvloede: we kunnen dit met het oog op (4.4) opschrijven als

$$\begin{aligned} V_1(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= W(\langle \vec{J}, \vec{u}_1 \rangle^2 \mid \vec{u}_2, \vec{u}_3); && (5.2)\\ V_2(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= W(\langle \vec{J}, \vec{u}_2 \rangle^2 \mid \vec{u}_1, \vec{u}_3); && (5.3)\\ V_1(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= W(\langle \vec{J}, \vec{u}_3 \rangle^2 \mid \vec{u}_1, \vec{u}_2), && (5.4) \end{aligned}$$

waarbij het rechterlid van bijvoorbeeld (5.2) staat voor: "de uitkomst van een meting van $\langle \vec{J}, \vec{u}_1 \rangle^2$ in een experiment waarin tevens $\langle \vec{J}, \vec{u}_2 \rangle^2$ en $\langle \vec{J}, \vec{u}_3 \rangle^2$ worden gemeten". We zullen in het bewijs echter geen gebruik maken van de functies W, die hier alleen zijn ingevoerd om de notatie $V_i(\mathbf{f})$ te verduidelijken.

Let op: in een totaal deterministisch universum, waarin de experimentator geen vrije keuze heeft, hoeft een dergelijke functie niet te bestaan! Want dan ligt de keuze van **f** *voor het werkelijk uitgevoerde experiment* vast en hoeft V dus slechts aan dat ene frame één van de tripels $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, of $(0,1,1)$ toe te kennen. Het is essentieel voor het bewijs dat **f** een *variabele* is, en dat wordt dus afgedwongen door aanname **KS2**. Hierbij moet u zich goed realiseren dat de functie V slaat op een *gegeven* experiment: een deterministische theorie wil tenslotte voor *dat* experiment een bindende uitspraak doen. Om de resultaten van een serie experimenten te voorspellen, moet de functie V dus nog een index n krijgen, V_n dus, zodat V_n de uitkomst van het n'de experiment geeft. We kiezen n nu vast en laten deze notatie verder weg. De crux van aanname **KS2** is in dit verband dat de experimentator voor zijn/haar meting weliswaar **f** kiest, maar ook een ander frame $\mathbf{f}'$ *had kunnen kiezen*, en dat de theorie dus ook voor die alternatieve keuze een voorspelling voor moet doen.

Gegeven **KS1** en **KS2** vertalen we aanname **KS3** nu als volgt.

> **KS1** + **KS2** + **KS3**: *als twee frames* $\mathbf{f} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *en* $\mathbf{f}' = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$ *een vector gemeen hebben, in de zin dat* $\vec{u}_i = \vec{u}'_j$ *voor zekere waarden van* i *en* j*, dan geldt*
>
> $$V_i(\mathbf{f}) = V_j(\mathbf{f}'). \tag{5.5}$$

Dit is inderdaad een vertaling van **KS3**: er wordt namelijk beweerd dat als er twee verschillende meetopstellingen zijn waarin de gekwadrateerde component $\langle \vec{J}, \vec{u} \rangle$ van de draai-impuls $\vec{J}$ in de richting van $\vec{u}$ wordt gemeten, de desbetreffende twee metingen dezelfde uitkomst moeten hebben. Stel bijvoorbeeld dat

$i = 1$ en $j = 2$, zodat $\vec{u}_1 = \vec{u}'_2 = \vec{u}$; dan betekent (5.5) expliciet dat

$$V_1(\vec{u}, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = V_2(\vec{u}'_1, \vec{u}, \vec{u}'_3), \tag{5.6}$$

oftewel

$$W(\langle \vec{J}, \vec{u}\rangle^2 \mid \vec{u}_2, \vec{u}_3) = W(\langle \vec{J}, \vec{u}\rangle^2 \mid \vec{u}'_1, \vec{u}'_3), \tag{5.7}$$

voor alle vectoren $\vec{u}_2$ en $\vec{u}_3$ die samen met $\vec{u}$ een frame vormen, en alle vectoren $\vec{u}'_1$ en $\vec{u}'_3$ die samen met $\vec{u}$ een frame vormen. U zult straks zien hoe groot de rol van (5.5) in het bewijs is.

De stellling van Kochen en Specker
Nu komt de oorspronkelijke stellling van Kochen en Specker uit 1967.

Stelling 5.1 *Er bestaat geen functie V die aan ieder frame $\mathbf{f}$ één van de drie combinaties $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, of $(0,1,1)$ toekent, en die met de notatie $V(\mathbf{f}) = (V_1(\mathbf{f}), V_2(\mathbf{f}), V_3(\mathbf{f}))$ tevens voldoet aan* (5.5).

Bewijs van de stellling van Kochen en Specker
Bekijk de volgende 10 frames:

no.	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$
1	$(0,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,0)$
2	$(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$	$(0,1,0)$
3	$(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$	$(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$	$(1,0,0)$
4	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1/\sqrt{2})$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$
5	$(1/\sqrt{3},0,\sqrt{2/3})$	$(-\sqrt{2/3},0,1/\sqrt{3})$	$(0,1,0)$
6	$(1/\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
7	$(\sqrt{2/3},0,1/\sqrt{3})$	$(0,1,0)$	$(-1/\sqrt{3},0,\sqrt{2/3})$
8	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1/\sqrt{2})$
9	$(0,1/\sqrt{3},\sqrt{2/3})$	$(1,0,0)$	$(0,-\sqrt{2/3},1/\sqrt{3})$
10	$(\frac{1}{2},1/\sqrt{2},\frac{1}{2})$	$(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$	$(\frac{1}{2},-1/\sqrt{2},\frac{1}{2})$.

Dit zijn inderdaad allemaal frames, zoals een lange maar eenvoudige berekening aantoont. Met andere woorden: voor iedere rij geldt $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i\rangle = 1$ voor $i = 1,2,3$ en $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3\rangle = \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle = 0$.

De essentie van het argument is dat een gegeven vector in meerdere frames voorkomt. Stel dat er wél zo'n functie V is. We zullen zeggen dat een vector $\vec{u}_i$ in een frame $\mathbf{f} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ op 0 (of 1) wordt afgebeeld, of naar 0 (of 1) wordt gestuurd, als $V_i(\mathbf{f}) = 0$ (of 1). Om het onderstaande argument goed te kunnen volgen, kunt u vectoren die naar 0 gaan in de tabel bijvoorbeeld rood omcirkelen en vectoren die naar 1 gaan groen.

1. Als eerste stap beelden we in het eerste stelsel $\vec{u}_1 = (0,0,1)$ af op 0 en de andere twee vectoren op 1. Hier kunnen uiteraard ook andere keuzes worden gemaakt, maar die geven een soortgelijk bewijs (zie opgave 5.**??**).
2. In het tweede stelsel moet dan ofwel $\vec{u}_1 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$ ofwel $\vec{u}_2 = (-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$ naar 0 (en de andere naar 1). Het maakt niet uit welke keuze wordt gemaakt; we sturen $(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$ naar 0.
3. In de derde rij ligt het beeld van $\vec{u}_3$ vast, omdat deze vector al voorkwam als $\vec{u}_2$ in rij 1 en volgens (5.5) dus dezelfde waarde (i.e. 1) moet krijgen. Dan kunnen we ofwel $\vec{u}_1$ ofwel $\vec{u}_1$ naar 0 sturen; we kiezen $\vec{u}_1$. De vector $\vec{u}_2$ gaat dus naar 1. De omgekeerde keuze geeft een soortgelijk bewijs (ga na).
4. In de vierde rij staat $\vec{u}_3 = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$. Het beeld van deze vector ligt ook vast door de eerdere keuzen, ofschoon hij niet eerder voorkomt. Het punt is dat $\vec{u}_3$ in rij 4 loodrecht staat op $\vec{u}_1$ uit rij 1 (ga na), en dat deze laatste naar 0 ging. We completeren nu $\vec{u}_3$ in rij 4 en $\vec{u}_1$ uit rij 1 tot een nieuw frame $\mathbf{f}$ door er een vector aan toe te voegen die loodrecht op beide staat (daar zijn slechts twee mogelijkheden voor). Van dit frame $\mathbf{f}$ moeten twee vectoren naar 1 gaan en één naar 0. We weten dat $\vec{u}_1$ uit rij 1 naar 0 gaat, en dus moet $\vec{u}_3$ in rij 4 naar 1. Dit geeft nog steeds een vrije keuze of $\vec{u}_1$ of $\vec{u}_2$ in rij 4 naar 0 gaat. We kiezen we er opnieuw voor om $\vec{u}_1$ naar 0 te sturen (en de andere keuze geeft, het wordt saai, een soortgelijke tegenspraak).
5. In de vijfde rij kwam $\vec{u}_3 = (0,1,0)$ al eerder voor als $\vec{u}_3$ in rij 2 en staat $\vec{u}_2 = (-\sqrt{2/3},0,1/\sqrt{3})$ loodrecht op $\vec{u}_1 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1/\sqrt{2})$ uit de vierde rij; omdat die laatste naar 0 gaat, moet $(-\sqrt{2/3},0,1/\sqrt{3})$ naar 1.
6. Ook daarna ligt alles vast: met soortgelijke argumenten moeten alle vectoren $\vec{u}_1$ naar 0 en alle $\vec{u}_2$ en $\vec{u}_3$ naar 1.

7. Nu komt het slotakkoord: de vectoren $(1,0,0)$, $(0,\sqrt{2/3},1/\sqrt{3})$ en $(0,-1/\sqrt{3},\sqrt{2/3})$ vormen een frame $\mathbf{f}$. De eerste gaat naar 1 omdat hij samenvalt met $\vec{u}_2$ uit rij 1, de tweede staat loodrecht op $\vec{u}_1 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1/\sqrt{2})$ uit rij 4, die zoals we net hebben gezien op 0 wordt afgebeeld; $(0,\sqrt{2/3},1/\sqrt{3})$ moet volgens het argument in stap 4 dus naar 1. De derde vector in $\mathbf{f}$ staat loodrecht op $\vec{u}_1 = (\frac{1}{2},1/\sqrt{2},\frac{1}{2})$ uit rij 10, die naar 0 ging, zodat met hetzelfde argument uit stap 4 $(0,-1/\sqrt{3},\sqrt{2/3})$ eveneens op 1 moet worden afgebeeld. We zien dus dat $V(\mathbf{f}) = (1,1,1)$ en dat is geen toegestane waarde. Tegenspraak!

Deze stelling impliceert dat er geen deterministische theorie bestaat die de uitkomst van alle mogelijke metingen aan de draai-impuls van een deeltje met spin 1 voorspelt en in overeenstemming is met (5.5).

6

De stelling van Conway en Kochen

We formuleren en bewijzen nu de stelling van Kochen en Specker uit 2009, die, nog steeds onder de aanname dat een experimentator zelf kan kiezen wat hij meet, het bestaan van zuiver toeval aantoont. De derde aanname van Kochen en Specker, namelijk dat het meetproces de uitkomst van de meting niet beïnvloedt, is nu vervangen door een veel zwakkere aanname: de uitkomst van een meting van een bepaalde grootheid mag niet afhangen van wat er tegelijk wordt gemeten in ver verwijderde melkwegstelsels.

De aanname **KS3** uit hoofdstuk 5 was in de klassieke fysica plausibel, omdat een goed uitgevoerd experiment daar slechts een al van tevoren bestaande waarde van een grootheid afleest. Volgens Bohr en Heisenberg was de kwantummechanica in twee opzichten een vernieuwing:

1. Meetresultaten worden in zekere zin door de metingen zelf gecreeërd en bestonden dus van tevoren nog niet;
2. De meetuitkomsten kunnen niet door een deterministische theorie worden beschreven: er bestaat zuiver toeval.

De tweede bewering staat in principe echter los van de eerste, en een vastberaden determinist zou een positie tussen de klassieke en de kwantummechanica in kunnen nemen door vol te houden dat meetresultaten weliswaar vóór de meting nog niet bestonden, maar wel degelijk voorspeld kunnen worden door middel van een deterministische theorie die dieper graaft dan de kwantummechanica en het meetproces in detail beschrijft (juist dat laatste is volgens Bohr en Heisenberg onmogelijk). Hierbij wordt in het bijzonder erkend dat een meetresultaat van de gekozen meetopstelling af kan hangen.

De stelling van Kochen en Specker sluit deze positie niet uit: het bewijs van deze stelling draait volledig om de eis (5.5), die juist uitdrukt dat het resultaat van een meting *niet* van de algehele meetopstelling af mag hangen. Dat is dan ook de reden dat in de stelling van Conway en Kochen de aanname **KS3** vervangen door de volgende:

CK3: de *uitkomst* van een meting aan een deeltje hangt niet af van de *meetopstelling* van mogelijke experimenten die tegelijkertijd op grote afstand worden uitgevoerd.

Dit is inderdaad een veel zwakkere aanname dan **KS3**; het lijkt zelfs een open deur!

EPR-correlaties

Om te laten zien waarom Conway en Kochen (en vóór hen vele onderzoekers van de grondslagen van de natuurkunde) deze aanname toch doen, willen we iets vertellen over zogenaamde *EPR-correlaties*. De afkorting *EPR* is in de natuurkunde legendarisch; de letters staan voor de namen van Einstein, Podolsky, en Rosen. Dit drietal publiceerde in 1935 een artikel dat een totaal nieuwe draai gaf aan Einsteins debat met Bohr. Opmerkelijk is daarbij dat hun artikel destijds door Bohr c.s. werd beschouwd als een wanhoopspoging van een achterhaalde figuur om een al verloren discussie nog ten goede te keren, terwijl het nu het meest geciteerde werk uit de 20e eeuwse natuurkunde is! Moderne onderzoeksgebieden als kwantumcomputers en kwantumcryptografie zijn bijvoorbeeld grotendeels op EPR gebaseerd.

Ofschoon het de bedoeling van EPR was om de kwantummechanica te weerleggen, is wat van dit artikel overblijft de ontdekking van een hoogst onverwachte eigenschap (niet de enige!) van deze theorie. Einstein en zijn maten zagen namelijk in dat het volgende in de kwantummechanica mogelijk is. Twee spin 1-deeltjes kunnen *perfect gecorreleerd* zijn, in de zin dat ze in een toestand zijn geprepareerd waarin, voor een willekeurige vector $\vec{u}$, een meting van de component $\langle \vec{J}, \vec{u} \rangle$ van de draai-impuls van het ene deeltje *altijd* hetzelfde resultaat oplevert als een meting van *dezelfde* component van de draai-impuls van het andere deeltje, ofschoon in de gegeven perfect gecorreleerde toestand de uitkomst van de meting niet vastligt! Het gaat hier om een toestand waarin voor iedere $\vec{u}$ de kans op de uitkomst $\langle \vec{J}, \vec{u} \rangle = 1$ gelijk is aan 1/3, evenals de kans op de uitkomsten -1 en 0. De kans op de uitkomst $\langle \vec{J}, \vec{u} \rangle^2 = 1$ is dus 2/3.

Het bizarre is nu dat deze correlatie ook bij een willekeurige onderlinge afstand van de twee deeltjes optreedt, bijvoorbeeld wanneer het ene deeltje op aarde is en het andere in de Andromeda-nevel (mocht daar iemand aan experimentele fysica doen). Dit zou nog wel te pruimen zijn als de meetresultaten voorspelbaar waren, omdat deze dan een eigenschap van de begintoestand zouden reflecteren: een dergelijk perfect gecorreleerd paar wordt namelijk in een atoom geproduceerd, zodat de twee deeltjes ooit samen waren. Toen hadden ze als het ware kunnen afspreken wat hun antwoord op door de experimentator gestelde vragen zou zijn (in de metafoor dat een meting een vraag aan de natuur is). Maar dat impliceert dat hun antwoorden op een gegeven vraag (dezelfde aan beide deeltjes gesteld) *bij dezelfde begintoestand* ook steeds hetzelfde zouden moeten zijn, wat in een perfect gecorreleerde toestand niet het geval blijkt te zijn.

Perfecte correlaties in een deterministische theorie

Stel nu dat we de uitkomsten van metingen aan een perfect gecorreleerd paar van spin 1-deeltjes met behulp van een deterministische theorie willen voorspellen. Ofschoon er al indices genoeg in omloop zijn, moeten we er nu nog een toevoegen: bij een frame $\mathbf{f} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ moeten we aangeven op welk deeltje het slaat, en ook bij de functie V en diens componenten V_i moeten we dit doen. We labelen de deeltjes met A en B en schrijven daarom $\mathbf{f}^A = (\vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A)$ en analoog met B i.p.v. A, evenals V^A en V^B. Het getal $V_1^A(\vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A)$ geeft dus de uitkomst van een meting van de component $\langle \vec{J}, \vec{u}_1^A \rangle^2$ van de draai-impuls van deeltje A in een opstelling waarin tevens de componenten $\langle \vec{J}, \vec{u}_2^A \rangle^2$ en $\langle \vec{J}, \vec{u}_3^A \rangle^2$ gemeten worden, enzovoort.

Maar let op! Deze uitkomst op aarde zou in principe ook van de gang van zaken op de Andromeda-nevel kunnen afhangen! Eigenlijk moeten we voor deze uitkomst dus schrijven: $V_1^A(\vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A, \vec{u}_1^B, \vec{u}_2^B, \vec{u}_3^B)$, en navenant voor het andere deeltje: daar moeten we bijvoorbeeld de uitkomst van een meting van de component $\langle \vec{J}, \vec{u}_2^B \rangle^2$ van de draai-impuls van deeltje B in een opstelling waar eveneens $\langle \vec{J}, \vec{u}_1^B \rangle^2$ en $\langle \vec{J}, \vec{u}_3 \rangle^2$ worden bepaald, schrijven als $V_2^B(\vec{u}_1^B, \vec{u}_2^B, \vec{u}_3^B, \vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A)$.

Als nu ons deeltjespaar perfect gecorreleerd is, geldt dus, in het geval dat $\vec{u}_i^A = \vec{u}_j^B$ voor bepaalde i en j:

$$V_i^A(\vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A, \vec{u}_1^B, \vec{u}_2^B, \vec{u}_3^B) = V_j^B(\vec{u}_1^B, \vec{u}_2^B, \vec{u}_3^B, \vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A). \tag{6.1}$$

Met $\mathbf{f}^A = (\vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A)$ en $\mathbf{f}^B = (\vec{u}_1^B, \vec{u}_2^B, \vec{u}_3^B)$ kunnen dit uiteraard ook schrijven als: $\vec{u}_i^A = \vec{u}_j^B$ impliceert

$$V_i^A(\mathbf{f}^A, \mathbf{f}^B) = V_j^B(\mathbf{f}^B, \mathbf{f}^A). \tag{6.2}$$

De lokaliteitsaanname

De aanname **CK3** maakt een hoop van deze notatie overbodig: de wiskundige vorm van deze aanname is namelijk precies dat voor alle $i = 1, 2, 3$ geldt

$$\begin{aligned} V_i^A(\mathbf{f}^A, \mathbf{f}^B) &= V_i^A(\mathbf{f}^A); & (6.3)\\ V_i^B(\mathbf{f}^B, \mathbf{f}^A) &= V_i^B(\mathbf{f}^B). & (6.4) \end{aligned}$$

In woorden, concreet drukt (6.3) voor $i = 1$ (en navenant voor $i = 2, 3$) het volgende uit: de uitkomst van een meting van de component $\langle \vec{J}, \vec{u}_1^A \rangle^2$ van de draai-impuls van deeltje A in een opstelling waar eveneens $\langle \vec{J}, \vec{u}_2^A \rangle^2$, $\langle \vec{J}, \vec{u}_3^A \rangle^2$, $\langle \vec{J}, \vec{u}_1^B \rangle^2$, $\langle \vec{J}, \vec{u}_2^B \rangle^2$, en $\langle \vec{J}, \vec{u}_3^B \rangle^2$ worden bepaald, hangt niet af van de keuze van $\vec{u}_1^B$, $\vec{u}_2^B$, en $\vec{u}_3^B$. Analoog voor (6.4), met de rollen van A en B omgedraaid.

De wiskundige vorm (6.1) voor perfecte correlatie wordt dan eenvoudigweg:

$$\text{als } \vec{u}_i^A = \vec{u}_j^B, \text{ dan } V_i^A(\vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A) = V_j^B(\vec{u}_1^B, \vec{u}_2^B, \vec{u}_3^B), \tag{6.5}$$

oftewel:

$$\text{als } \vec{u}_i^A = \vec{u}_j^B, \text{ dan } V_i^A(\mathbf{f}^A) = V_j^B(\mathbf{f}^B). \tag{6.6}$$

Hierbij kan de geldigheid van (6.5) c.q. (6.6) uiteraard pas worden vastgesteld als de meetresultaten bij A en B met elkaar zijn vergeleken, i.e. nadat de beide experimentatoren na afloop van beide metingen met elkaar hebben gecommuniceerd.

De stelling van Conway en Kochen

De eerste twee aannamen in de stelling van Kochen en Specker, dus **KS1** en **KS2** uit hoofdstuk 5, worden ongewijzigd overgenomen in de stelling van Conway en Kochen. We noemen ze nu echter **CK1** en **CK2**. Met de al genoemde aanname **CK3** komen we zo op de volgende lijst aannamen:

CK1: determinisme op het niveau van elementaire deeltjes;

CK2: het idee dat de keuze van een experimentator voor een bepaalde meetopstelling niet wordt beïnvloed door het systeem waar hij/zij aan meet;

CK3: de eis dat de *uitkomst* van een meting aan een deeltje niet af hangt van de *meetopstelling* van mogelijke experimenten die tegelijkertijd op grote afstand worden uitgevoerd.

De stelling van Conway en Kochen luidt nu *dat deze drie aannamen strijdig zijn*, met andere woorden, dat ze niet alle drie kunnen gelden. Wiskundig gesproken:

Stelling 6.1 *Er bestaan geen functies V^A en V^B die ieder aan een paar van frames $(\mathbf{f}^A, \mathbf{f}^B)$ resp. $(\mathbf{f}^B, \mathbf{f}^A)$ één van de drie combinaties $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, of $(0, 1, 1)$ toekennen, en die met de notatie $V^A = (V_1^A, V_2^A, V_3^A)$ en $V^B = (V_1^B, V_2^B, V_3^B)$ tevens voldoen aan* (6.3), (6.4), *en* (6.6).

Deze stelling impliceert op technisch niveau dat de combinatie van aannamen **CK1** - **CK3** tot een tegenspraak leidt.

Bewijs van de stelling van Conway en Kochen

Als u het vorige hoofdstuk goed hebt begrepen, is het bewijs niet moeilijk. Neem eerst de situatie waarin $\vec{u}_1^A = \vec{u}_2^B = \vec{u}$. Conditie (6.5) geeft dan

$$V_1^A(\vec{u}, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A) = V_2^B(\vec{u}_1^B, \vec{u}, \vec{u}_3^B) \tag{6.7}$$

voor willekeurige $\vec{u}_2^A$, $\vec{u}_3^A$, $\vec{u}_1^B$, $\vec{u}_3^B$ zodat $(\vec{u}, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A)$ en $(\vec{u}_1^B, \vec{u}, \vec{u}_3^B)$ frames zijn. Nu nemen we $\vec{u}_2^A = \vec{u}_2^B = \vec{u}$; conditie (6.5) geeft nu

$$V_2^A((\vec{u}_1^A)', \vec{u}, (\vec{u}_3^A)') = V_2^B((\vec{u}_1^B)', \vec{u}, (\vec{u}_3^B)'), \tag{6.8}$$

voor alle $(\vec{u}_1^A)'$, $(\vec{u}_3^A)'$, $(\vec{u}_1^B)'$, $(\vec{u}_3^B)'$ waarvoor $((\vec{u}_1^A)', \vec{u}, (\vec{u}_3^A)')$ en $((\vec{u}_1^B)', \vec{u}, (\vec{u}_3^B)')$ frames zijn. Kies nu $(\vec{u}_1^B)' = \vec{u}_1^B$ en $(\vec{u}_3^B)' = \vec{u}_3^B$. Dan is het rechterlid van (6.7) gelijk aan dat van (6.8). Als we nu $\vec{u}$ noteren als $\vec{u}^A$, geven beide vergelijkingen samen

$$V_1^A(\vec{u}^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A) = V_2^A((\vec{u}_1^A)', \vec{u}^A, (\vec{u}_3^A)'), \tag{6.9}$$

voor alle frames $\mathbf{f}^A = (\vec{u}^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A)$ en $(\mathbf{f}^A)' = ((\vec{u}_1^A)', \vec{u}^A, (\vec{u}_3^A)')$. Op soortgelijke wijze volgt

$$V_i^A(\mathbf{f}^A) = V_j^A((\mathbf{f}^A)') \tag{6.10}$$

voor alle frames $\mathbf{f}^A = (\vec{u}_1^A, \vec{u}_2^A, \vec{u}_3^A)$ en $(\mathbf{f}^A)' = ((\vec{u}_1^A)', (\vec{u}_2^A)', (\vec{u}_3^A)')$ waarin $\vec{u}_i^A = (\vec{u}_j^A)'$. Maar als we nu de index A weglaten, zien we dat V^A precies aan de conditie (5.5) voldoet! Volgens de stelling van Kochen en Specker, die in dit bewijs dus als hulpstelling wordt ingeroepen, kan een dergelijke functie niet bestaan. Tegenspraak!

Daarmee is ook de stelling van Conway en Kochen bewezen en dit eerste deel van de HOVO-cursus afgesloten. Wie nog geen genoeg van het onderwerp heeft kan op het internet colleges van Conway *himself* bekijken: zie `http://paw.princeton.edu/issues/2009/07/15/pages/6596/index.xml`.