

Leidraad bij het college

Analyse 1 (voorjaar 2007)

Klaas Landsman

Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics
Radboud Universiteit Nijmegen
Toernooiveld 1
6525 ED NIJMEGEN

e-mail: landsman@math.ru.nl

website: <http://www.math.ru.nl/~landsman/Analyse12007.html>

tel.: 024-3652874

kamer: HG03.078

Werkcollege:

Dion Coumans coumans@math.ru.nl (wiskunde)

Tim de Laat t.delaaat@student.science.ru.nl (natuurkunde)

Schema (weken 6, 7, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 21–25):

dinsdag 13:45–15:30 **hoorcollege** in HFML 220;

donderdag 13:45–15:30 **werkcollege**: wiskundigen in HG01.340; natuurkundigen in HFML 220
(3e kwartaal) en HG03.084 (4e kwartaal)

vrijdag 09:00–10:30 **spreekuur** (HG03.078) / **studieuur** / **responsiecollege** (HFML 220)
(dinsdag en op de website wordt aangekondigd of er vrijdag een repsonsiecollege plaats zal vinden; standaard is spreekuur/studieuur).

Uitzonderingen op schema:

Week 8: vakantie

Week 9: geen hoorcollege op dinsdag, hoorcollege op vrijdag, geen werkcollege

Week 10: geen hoorcollege op dinsdag, wel werkcollege op donderdag, niets op vrijdag

Week 15: geen enkele activiteit (tentamenweek)

Week 17: geen hoorcollege op dinsdag, hoorcollege op donderdag 13:45–15:30 in HFML 220,
werkcollege wiskunde vrijdag 08:45–10:30 in HFML 220, werkcollege natuurkunde 7 mei 15:45–
17:30 in HG01.058

Week 18: meivakantie

Week 19: hoorcollege op dinsdag, geen werkcollege op donderdag (Dies), werkcollege wiskunde
vrijdag 08:45–10:30 in HFML 220, werkcollege natuurkunde 14 mei 15:45–17:30 in HG01.058

Week 20: repsonsiecollege op dinsdag 14:15–15:30, geen werkcollege i.v.m. Hemelvaart

Algemeen:

- Het cijfer voor het vak is het hoogste van de volgende twee: het cijfer voor het mondeling tentamen na afloop of het gemiddelde van het cijfer voor het mondeling en het cijfer voor het werkcollege.
- Het mondeling tentamen zal bestaan uit vier vragen van een vooraf uit te delen lijst van 10 vragen die de stof goed samenvatten. De eerste vraag mag je bovendien zelf kiezen!
- De opgaven worden op het hoorcollege van dinsdag uitgedeeld en staan dan ook op de website. De deadline voor de inleveropgaven is de maandag daarop om 15:30. Je mag ook de oefenopgaven inleveren (telt niet mee voor het cijfer van het werkcollege).
- Bereid het werkcollege goed voor! Dan kun je optimaal gebruik maken van de deskundige begeleiding.
- Het is de bedoeling dat je de op het hoorcollege behandelde paragrafen uit Zorich ook nog zelf doorleest. Het hoorcollege bevat vooral de grote lijnen, het boek de details. Daarom is er ook geen vier uur hoorcollege per week.

Week 1: Verzamelingen

Na een historische inleiding over de analyse behandelen we §1.2 uit Zorich. Lees zelf ook §1.1.

Hoorcollege

Het is duidelijk uit de historische inleiding dat analyse moeilijker was dan Newton en Euler dachten. Het vak werd “precies” door drie ontwikkelingen:

1. De invoer van verzamelingen als grondslag van de hele wiskunde (Cantor);
2. De definitie van een functie als een afbeelding tussen twee verzamelingen (en nog preciezer als een speciaal geval van een “relatie” tussen twee verzamelingen);
3. De definitie van de reële getallen als een bepaalde verzameling met extra structuur.

Punt 1 is het onderwerp van deze week, zij het in beperkte mate: Verzamelingenleer is een apart vak in een hoger jaar dat nauw met logica verbonden is. We zullen dus niet veel verder komen dan enige opmerkingen.

De zogenaamde naïeve verzamelingenleer van Cantor (en Dedekind) gaat uit van het principe dat een verzameling is gedefinieerd door haar “elementen”; dat zijn dan bepaalde onderscheidbare entiteiten. We kunnen op twee manieren verzamelingen vormen:

- Concreet door opsomming, bijvoorbeeld $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Abstract door alle objecten met een bepaalde eigenschap te nemen:

$$S = \{x \mid P(x)\}, \quad (1)$$

waarbij $P(x)$ uitdrukt dat x een bepaalde eigenschap P heeft.

Deze aanpak leidt tot problemen, zoals de paradox van Russell (i.e. beschouw de verzameling R van alle verzamelingen die zichzelf niet als element hebben: is R een element van zichzelf?). Het vormen van verzamelingen op de beschreven manier is dus niet mogelijk: er zijn regels nodig die zeggen wanneer een bepaalde eigenschap inderdaad een verzameling definieert. Dit inzicht heeft geleid tot de zogenaamde axiomatische verzamelingenleer. Er zijn (minstens) twee gangbare axiomasystemen: die van Zermelo & Fraenkel (zie Zorich §1.4.2) en die van Bernays & von Neumann. We gaan in de analyse stilzwijgend uit van de axioma's van Zermelo & Fraenkel, zonder hier diep op in te gaan. Voor de kenners: dit stelsel bevat het beruchte keuze-axioma (dat volgens critici geen goede rechtvaardiging heeft).

De belangrijkste verfijning ten opzichte van de twee genoemde constructies van een verzameling is als volgt: volgens het *comprehensie-axioma* van Zermelo & Fraenkel (Axiom 2 op p. 27 van Zorich, die dit het *Axiom of separation* noemt) geldt dat als A een verzameling is en P een eigenschap, dan

$$S = \{x \in A \mid P(x)\}, \quad (2)$$

opnieuw een verzameling is. Merk het subtiele verschil met (1) op: in (2) *weet je al dat x in een bestaande verzameling ligt*. Dit blijkt paradoxen als die van Russell te omzeilen, maar er bestaat geen bewijs dat de axioma's van Zermelo & Fraenkel consistent zijn! Het gaat alleen maar goed tot nu toe...

Als toepassing kun je gegeven $B \subset A$ de verzameling

$$C_A(B) \equiv A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} = \{(x \in A) \wedge (x \notin B)\} \quad (3)$$

vormen. Hier betekent het symbool \wedge “en”; evenzo betekent \vee “of”.

Het tweede belangrijk axioma (*Axiom of extensionality*, no. 1 op p. 27 van Zorich) is dat $A = B$ precies geldt als $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, i.e. als de verzamelingen A en B dezelfde elementen hebben. Ligt erg voor de hand, maar iemand moest het opschrijven! Het symbool \Leftrightarrow betekent “dan en slechts dan” ofwel desda.

Jullie zijn hopelijk al vertrouwd met de operaties die je op verzamelingen kunt toepassen, zoals de vorming van het complement (3), en de vereniging en de doorsnede van twee verzamelingen A en B (zie Zorich). Zorich gaat er voor de veiligheid steeds vanuit dat A en B beide deelverzamelingen van een zekere verzameling M zijn, maar dat is lang niet altijd nodig. Waar Zorich dus bijvoorbeeld schrijft

$$A \cap B := \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (4)$$

zullen wij vaak schrijven

$$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}. \quad (5)$$

De eigenschappen van de symbolen \subset (deelverzameling), \cap (doorsnede), \cup (vereniging) en C (complement) komen in de opgaven aan bod.

Ten slotte kun je uit twee gegeven verzamelingen A en B het *Cartesisch product* of simpelweg *product* $A \times B$ maken. Dit bestaat uit de *geordende paren*

$$A \times B := \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}. \quad (6)$$

We gaan hier volgende week nader op in. Voor $A \times A$ schrijven we vaak A^2 .

Opgaven

Om te oefenen:

1. Neem de verzamelingen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{2, 4, 6\}$.
Bepaal $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, B^2 .
2. Dezelfde vragen voor $A = \mathbb{N}$ en $B = \{\text{alle even getallen}\}$.
3. Nog steeds met $A = \mathbb{N}$ en $B = \{\text{alle even getallen}\}$: wat is $C_{\mathbb{N}}(A)$? Wat is $C_{\mathbb{N}}(B)$?
4. 1.2.4.1 b,c,d uit Zorich.
5. 1.2.4.2 a,b.
6. 1.2.4.3 a,b (antwoord staat in feite in boek, schrijf voor jezelf op).
7. 1.2.4.6 a

Om in te leveren:

1. 1.2.4.1 a,e.
2. 1.2.4.2 c,d.
3. Bewijs (als uitbreiding van 1.2.4.2 d) dat $A \cup (\cap_{i=1}^n B_i) = \cap_{i=1}^n (A \cup B_i)$.
4. 1.2.4.6 b,c,d. Let op: de aanname $X \times Y \neq \emptyset$ die in a) is geformuleerd slaat op onderdeel b. Bij b) moet worden toegevoegd de voorwaarde: $A \neq \emptyset$ en $B \neq \emptyset$

Week 2: Functies

We behandelen §1.3 (zonder Example 1, 2, 3, 8, 10, 11, 12; Examples 4, 5, 6, 7, 9 moet je wel doorlezen als er in het college geen tijd voor blijkt te zijn) en axioma's 1 tot en met 5 uit §1.4.2 (voor zover nodig om het Cartesisch product netjes te definiëren).

Hoorcollege

De analyse is gebaseerd op het begrip *functie*. Newton werkte in de 17e eeuw nog niet met dat begrip; voor hem was wat wij nu de grafiek van een functie $y = f(x)$ van \mathbb{R} naar \mathbb{R} noemen de baan van een deeltje in het platte vlak. De ‘vrije’ variabele was bij hem niet zozeer x maar de tijd t : hij parametrizeerde de grafiek van f als de baan $\{(x(t), y(t))\}$.

Euler voerde in de 18e eeuw meerdere functiebegrippen in. In eerste instantie zag hij een functie als een concreet gegeven algebraïsch voorschrift, i.e. een formule. Voorbeeld: $y = \exp(x)$, met $\exp(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$. Later zag hij (bij zijn studie van de trillende snaar) in dat op verschillende delen van de x -as ook verschillende formules mogen gelden. Voorbeeld: $y = 0$ voor $x < -1$, $y = x + 1$ voor $-1 \leq x \leq 0$, $y = 1 - x$ voor $0 \leq x \leq 1$ en $y = 0$ voor $x > 1$ (teken deze functie en ga na dat zij continu is!). Later kwam hij tot het inzicht dat een functie in het algemeen moet uitdrukken dat een ‘grootheid’ y afhangt van een andere ‘grootheid’ x (N.B. men had toen nog geen goed begrip van de reële getallen).

Het moderne functiebegrip is gebaseerd op de verzamelingenleer. Een functie f tussen twee verzamelingen X en Y is intuïtief gesproken een ‘afbeelding’ $f : X \rightarrow Y$, oftewel een ‘voorschrift’ dat aan iedere $x \in X$ een element $f(x) \in Y$ toevoegt. Maar wat is precies een ‘afbeelding’ of een ‘voorschrift’? Deze begrippen mogen niet in het vage worden gelaten, maar moeten zelf worden uitgedrukt in termen van verzamelingen.

Om dat te doen is het *Cartesisch product* van X en Y nodig. Dat is in de eerste week al aan bod gekomen, maar nu geven we een precieze definitie.

Cartesisch product

Stel dat x en y verzamelingen zijn of elementen van een verzameling (vanuit een hoger standpunt is hier eigenlijk geen verschil tussen: “alles” kan als een verzameling opgevat worden!). Dan *betekent* de notatie $\{x, y\}$ het volgende:

$$\{x, y\} := \{z \mid (z = x) \vee (z = y)\}. \quad (7)$$

Hieruit volgt bijvoorbeeld onmiddellijk dat $\{2\} = \{2, 2\}$ (maar $\{2\} \neq \{2, \{2\}\}$!). Het object $\{x, y\}$ heet het *ongeordende paar* van x en y . Als $x \neq y$ heeft $\{x, y\}$ twee elementen, en als $x = y$ slechts één. Hoe weten we dat $\{x, y\}$ een verzameling is? Dit volgt uit het *paar-axioma* (*Pairing axiom*, no. 4 op p. 27 van Zorich). Dit zegt dat voor alle verzamelingen X en Y de verzameling $\{X, Y\}$ bestaat.

Het *geordende paar* van x en y is nu gegeven door

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}. \quad (8)$$

Deze verzameling bestaat vanwege het paar-axioma. Opnieuw geldt: als $x \neq y$ heeft de verzameling (x, y) twee elementen, in het geval $x = y$ is er slechts één element, namelijk $\{x\}$ (hetgeen iets anders is dan x !). Ga maar na:

$$(x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}.$$

Nu kunnen we het Cartesisch product van twee verzamelingen X en Y definiëren door

$$X \times Y := \{(x, y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\}. \quad (9)$$

Is dit een verzameling? Om dit te bewijzen zijn twee nieuwe axioma's nodig. Het *Union axiom* (no. 3 op p. 27 van Zorich) zegt dat als M een verzameling is waarvan de elementen verzamelingen zijn, dan de unie

$$\cup M := \{x \mid \exists A \in M : x \in A\} \quad (10)$$

een verzameling is. Vervolgens zegt het *Power set axiom* (no. 5 op p. 28 van Zorich) dat de *machtsverzameling*

$$\mathcal{P}(X) := \{x \mid x \subset X\} \quad (11)$$

van een verzameling X opnieuw een verzameling is (dit is dus de verzameling van alle deelverzamelingen van X). Let op: uiteraard geldt

$$X = \{x \mid x \in X\}; \quad (12)$$

je moet dus goed onderscheiden tussen \subset in (11) en \in in (12).

Nu kunnen we bewijzen dat $X \times Y$ bestaat. Als $x \in X$ en $y \in Y$, dan is

$$(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)),$$

want $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X \cup Y)$ en $\{x, y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$. Dus $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathcal{P}(X \cup Y)$, wat precies hetzelfde betekent als $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$.¹ Met de definitie (8) kunnen we (9) dus schrijven als

$$X \times Y := \{(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\}. \quad (13)$$

Nu is $X \cup Y$ een verzameling vanwege het Union axiom, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$ is een verzameling dankzij het Power set axiom, en ten slotte is $X \times Y$ een verzameling dankzij het comprehensie-axioma. Alles klopt!

Wat is een functie?

Nu kunnen we het begrip ‘functie’ precies maken. Een functie van X naar Y is een speciaal geval van een *relatie* tussen X en Y . Dat is per definitie een deelverzameling $R \subset X \times Y$. Een relatie is meestal bepaald door een eigenschap P van de paren (x, y) , dus

$$R := \{(x, y) \in X \times Y \mid P(x, y)\}. \quad (14)$$

Voorbeeld: als $Y = X$ kun je nemen de relatie $R = \Delta \subset X \times X$, gegeven door

$$\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}. \quad (15)$$

Hier geldt dus: $P(x, y) = (x = y)$. Voorbeeld: als $X = Y = \mathbb{R}$ en $f(x)$ een functie is in de zin van Euler (dus een concreet voorschrift), dan kun je de relatie nemen $R_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, gegeven door

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}. \quad (16)$$

Dit is een deelverzameling van het platte vlak, die precies hetzelfde is als de *grafiek* van f .

We willen nu het laatste voorbeeld generaliseren. We zeggen dat een relatie $R \subset X \times Y$ *functioneel* is, of *een functie definieert*, of zelfs een functie *is* (slechte terminologie!), als het volgende geldt: als $(x, y) \in R$ en $(x, z) \in R$ dan $y = z$. We kunnen dan schrijven: $y = f(x)$. Dit voorschrift hoeft niet op de hele X gedefinieerd te zijn, want niet bij iedere $x \in X$ hoeft een y te horen zodat $(x, y) \in R$. In termen van het *domein* $D_f \subset X$ van f ,

$$D_f := \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\} \quad (17)$$

is $f : D_f \rightarrow Y$ bepaald door $y = f(x)$ als $x \in D_f$ en $(x, y) \in R$. Als je wilt dat een functie altijd op de hele X is gedefinieerd, moet je de eis toevoegen dat $D_f = X$.

Wat hier in feite gebeurt, is dat een functie wordt *gedefinieerd* door haar grafiek. Uit calculus of de middelbare school ben je juist het omgekeerde gewend: je begint met de functie en tekent dan de grafiek. Hier draaien we dat dus om. We zullen een functie vaak met $f : X \rightarrow Y$ noteren, maar dit object is uiteindelijk gedefinieerd door de bijbehorende functionele relatie $R_f \subset X \times Y$. Je gaat van R_f naar f door het voorschrift $y = f(x)$ desda $(x, y) \in R_f$, en van f naar R_f door

$$R_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x))\}. \quad (18)$$

¹Zorich schrijft op p. 28 foutief $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$ i.p.v. $\mathcal{P}(X \cup Y)$.

Injectief-surjectief-bijjectief

Je moet de volgende begrippen binnen enkele weken kunnen dromen:

- Een functie $f : X \rightarrow Y$ heet *injectief* als geldt: $f(x_1) = f(x_2)$ desda $x_1 = x_2$, oftewel meer officieel $(x_1, y) \in R_f$ en $(x_2, y) \in R_f \Rightarrow x_1 = x_2$. Een injectieve functie heet een *injectie*.
- Een functie $f : X \rightarrow Y$ heet *surjectief* als $f(X) = Y$, waarbij

$$f(X) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R_f\}. \quad (19)$$

Informeel kun je dit ook schrijven als

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in D_f\}. \quad (20)$$

De verzameling (19) of (20) heet het *beeld* of *bereik* van f . Een surjectieve functie heet een *surjectie*.

- Een functie $f : X \rightarrow Y$ heet *bijjectief* als deze zowel injectief als surjectief is. Meestal wordt aangenomen dat ook geldt $D_f = X$. Een dergelijke functie heet een *bijjectie* (van X naar Y ofwel tussen X en Y). Als $D_f \neq X$, is f een bijjectie tussen D_f en Y . Voor een bijjectie geldt dat bij iedere $y \in Y$ precies één $x \in X$ hoort zodat $y = f(x)$ oftewel $(x, y) \in R_f$.

Let op! Of f nu een bijjectie is of niet, als $B \subset Y$ kunnen we altijd schrijven

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{x \in X \mid \exists y \in B : (x, y) \in R_f\}. \quad (21)$$

Dan geldt bijvoorbeeld (zie (17))

$$f^{-1}(Y) = D_f. \quad (22)$$

Als echter f bijjectief is, bestaat er een unieke *functie* $f^{-1} : Y \rightarrow X$ met de eigenschap: als $(x, y) \in R_f$ dan $(y, x) \in R_{f^{-1}}$.

Het begrip bijjectie krijgt meer body als we het idee van samenstellen van functies er bij betrekken. Informeel is dit idee duidelijk. Als $f : X \rightarrow Y$ en $g : Y \rightarrow Z$ functies zijn, kunnen we een functie $g \circ f : X \rightarrow Z$ maken door

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)). \quad (23)$$

In termen van relaties ziet dat er zo uit: als de relaties $R_f \subset X \times Y$ en $R_g \subset Y \times Z$ functioneel zijn, is de relatie $R_g \circ R_f \subset X \times Z$ dat ook (oefening), waarbij

$$R_g \circ R_f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R_f \wedge (y, z) \in R_g\}. \quad (24)$$

Als $(x, z) \in R_g \circ R_f$ schrijven we dan $z = g \circ f(x)$. Ga na dat dit klopt met (23). De samenstelling van f en g is duidelijker met plaatjes, zie Zorich.

Hoe dan ook, als $f : X \rightarrow Y$ een bijjectie is met inverse $f^{-1} : Y \rightarrow X$, dan geldt $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ en $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$, met $\text{id}_X(x) := x$ en $\text{id}_Y(y) = y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$.

Andere relaties

In de wiskunde komen ook vaak relaties voor die geen functies zijn. De belangrijkste zijn:

- *Equivalentierelatie*. Dit is een relatie $R \subset X \times X$ die voldoet aan:
 1. $(x, x) \in R \forall x \in X$ (reflexief);
 2. $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (symmetrisch);
 3. $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (transitief). Een equivalentierelatie op X deelt de onderliggende verzameling X op in disjunctie deelverzamelingen: $X = \cup_{\lambda} X_{\lambda}$, waarbij een gegeven deel X_{λ} bestaat uit een gegeven $x \in X$ en alle $y \in X$ waarvoor geldt dat $(x, y) \in R$. We schrijven vaak $x \sim y$ i.p.v. $(x, y) \in R$.

- *Partiële ordening.* Dit is een relatie $R \subset X \times X$ die voldoet aan:

1. $(x, x) \in R \forall x \in X$ (reflexief);
2. $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow y = x$ (antisymmetrisch);
3. $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (transitief).

We schrijven vaak $x \leq y$ i.p.v. $(x, y) \in R$.

Het verschil tussen een equivalentierelatie en een partiële ordening ligt dus in één enkele eigenschap (de eerste is symmetrisch en de tweede antisymmetrisch), maar dit verschil is enorm. Een voorbeeld van een equivalentierelatie op \mathbb{R} is $x \sim x + n$ voor $n \in \mathbb{N}$. Een voorbeeld van een partiële ordening op \mathbb{R} is $x \leq y$ in de gebruikelijke zin.

Opgaven

Om te oefenen:

1. Definieer de verzamelingen $E = \{1, 2, 3\}$ en $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Dan is $E \subset M$ en is de karakteristieke functie $\chi_E : M \rightarrow \mathbb{R}$ dus bepaald. Wat is $\chi_E(1)$? Wat is $\chi_E(5)$?
2. Definieer de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.m.v. $f(x) := x^2 + 2$. Is f injectief? Is f surjectief? Definieer nu ook $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als $g(x) := x + 1$. Bepaal de functies $f \circ g$ en $g \circ f$.
3. 1.3.5.1a,b.
4. 1.3.5.3 a,b.

Om in te leveren:

1. Doe de oefening na (23): bewijs dat als de relaties $R_f \subset X \times Y$ en $R_g \subset Y \times Z$ functioneel zijn, de relatie $R_g \circ R_f \subset X \times Z$ dat dan ook is.
2. 1.3.5.3 c,d,j.
3. 1.3.5.4 a,b.
4. 1.3.5.5 a,b,c,d,e. Pak dit slim aan: bewijs bijvoorbeeld $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow e \Rightarrow a$. Waarom levert dat een volledig bewijs? (waarom volgt dan bijvoorbeeld dat b en e equivalent zijn?)
5. 1.4.4.5 a,b,c.

Week 3: de reële getallen

We behandelen §2.1.1, aangevuld met de constructie van \mathbb{R} d.m.v. Cauchy-rijen in \mathbb{Q} en de alternatieve constructie van \mathbb{R} d.m.v. Dedekind-snedes. De eerste constructie is te vinden in het boekje *Getallen* van Frans Keune en wordt hier weggelaten: het begrip Cauchy-rij komt in Analyse 1 later aan bod. §2.1.2 moet je zelf goed doorlezen en aanvullen met de bewijzen die Zorich weglaat.

Hoorcollege

Algemene opmerkingen

We moeten een verschil maken tussen *constructies* van de reële getallen \mathbb{R} , zoals die in het college *Getallen*, en de *definitie* van \mathbb{R} door middel van axioma's, zoals in het boek van Zorich. Een constructie van \mathbb{R} is in feite een expliciet model, dat bepaalde eigenschappen blijkt te hebben. Bij een definitie van \mathbb{R} beginnen we juist met deze eigenschappen, die dan de status hebben van axioma's. Ook de volgorde is precies andersom: bij *Getallen* wordt, net als in de geschiedenis, begonnen met de natuurlijke getallen \mathbb{N} . Daaruit wordt \mathbb{Z} gemaakt, dan \mathbb{Q} , en ten slotte \mathbb{R} . In de analyse beginnen we juist met \mathbb{R} , en definiëren uiteindelijk \mathbb{N} als een bepaalde deelverzameling van \mathbb{R} .

Meestal legt een stelsel axioma's het te definiëren wiskundige object niet uniek vast. In gunstige gevallen zijn echter alle constructies (technisch: modellen) die aan de axioma's voldoen in zekere zin aan elkaar gelijk (technisch: isomorf). Het zal blijken dat onze axioma's voor \mathbb{R} deze eigenschap hebben: ze leggen het wiskundig object “de reële getallen” uniek vast op isomorfie na. We zullen precies zeggen wat deze laatste uitspraak betekent.

Aan de lijst van axioma's voor \mathbb{R} in Zorich, § 2.1.1, is weinig toe te voegen. De axioma's zijn in deze vorm afkomstig van David Hilbert (1862–1943), één van de grootste wiskundigen uit de geschiedenis. Het beslissende axioma IV op p. 38 was al geformuleerd door Richard Dedekind (1831–1916). Wel willen we opmerken dat de gang van zaken typerend is voor de wiskunde van de twintigste eeuw (waarvan Dedekind en Hilbert belangrijke wegbereiders waren): een wiskundig object (in dit geval de reële getallen) wordt gedefinieerd door te beginnen met een verzameling en deze vervolgens “aan te kleden” met extra structuren.

In het geval van \mathbb{R} wordt de beginverzameling niet nader gespecificeerd: er wordt niet gezegd hoeveel elementen die moet hebben, er wordt in feite helemaal niets over gezegd behalve dat deze niet leeg is. Pas later, als een aantal axioma's de revue zijn gespasseerd, wordt een enkele eis opgelegd, namelijk dat $0 \neq 1$ (N.B. dit axioma is in het college per ongeluk vergeten!!!). Uit alle axioma's samen blijkt dan uiteindelijk dat \mathbb{R} overaftelbaar veel elementen moet hebben.

Op de onderliggende verzameling \mathbb{R} , die je als het “decor” zou kunnen beschouwen, worden drie verschillende structuren gedefinieerd. Dit zijn optelling $+$, vermenigvuldiging \cdot en ordening \leq . Optelling en vermenigvuldiging zijn beide functies van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar \mathbb{R} met bepaalde eigenschappen. Een ordening op een verzameling X is een speciaal geval van een partiële ordening (zie Week 2), met de extra eigenschap dat ieder paar elementen geordend is. Met andere woorden, er geldt dat ofwel $(x, y) \in R$ ofwel $(y, x) \in R$. Let op: alle drie de operaties $+$, \cdot en \leq zijn een speciaal geval van een relatie $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; we hebben tenslotte al gezien dat ook een functie een bepaald soort relatie is.

In de moderne wiskunde blijkt dat het alleen zinvol is om verschillende structuren (in dit geval dus $+$, \cdot en \leq) op een verzameling aan te brengen als er axioma's zijn die deze structuren met elkaar in verband brengen: anders hangt het geheel als los zand aan elkaar. In ons geval worden $+$ en \cdot verbonden door het axioma van distributiviteit (p. 37), terwijl $+$ en \leq en ook \cdot en \leq worden verbonden door de twee axioma's op p. 38.

Dedekind-snedes

Zelfs met de lijst van axioma's I, II, III (in de nummering van Zorich) die apart $+$, \cdot en \leq definiëren én de axioma's die deze operaties met elkaar verbinden zijn we nog niet klaar: de rationale getallen \mathbb{Q} voldoen aan al deze axioma's. Het axioma dat uiteindelijk \mathbb{R} blijkt te bepalen is het

volledigheidsaxioma van Dedekind (i.e. axioma IV op p. 38). Om te illustreren dat in \mathbb{Q} niet en in \mathbb{R} wel aan dit axioma is voldaan nemen we

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\}; \quad (25)$$

$$Y = \{y \in \mathbb{Q} \mid y^2 > 2 \wedge y > 0\}. \quad (26)$$

De c waarvoor geldt dat $x \leq c \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$ is uiteraard $c = \sqrt{2}$: zoals de oude Grieken al wisten ligt $\sqrt{2}$ niet in \mathbb{Q} .

De door Dedekind zelf gegeven constructie van \mathbb{R} maakt van de nood een deugd. Hij beschouwde \mathbb{R} als de verzameling $DC(\mathbb{Q})$ van *sneden* van \mathbb{Q} (deze heten sindsdien dan ook *Dedekind sneden*), waarbij een snede is gedefinieerd als een paar (X, Y) , $X \subset \mathbb{Q}$, $Y \subset \mathbb{Q}$, zodat:

1. $X \neq \emptyset$ and $Y \neq \emptyset$;
2. $X < Y$ in de zin dat $x < y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$;
3. $X \cup Y = \mathbb{Q}$;
4. $X \cap Y = \emptyset$;
5. X heeft geen grootste element (i.e. er bestaat geen $x_0 \in X$ zodat $x \leq x_0$ voor alle $x \in X$).

Uiteraard bevat X alle informatie over de snede, aangezien per definitie geldt $Y = C_{\mathbb{Q}}(X)$; als we uitgaan van X moet deze wel voldoen aan de eis $X < C_{\mathbb{Q}}(X)$ en $X \neq \emptyset$ and $X \neq \mathbb{Q}$.

De relatie tussen een snede (X, Y) van \mathbb{Q} en een getal van \mathbb{R} zoals je dat gewend bent loopt via het volledigheidsaxioma: volgens dit axioma bestaat er namelijk een c zodat $x \leq c \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$. Dit geeft een afbeelding van $DC(\mathbb{Q})$ naar \mathbb{R} , $(X, Y) \mapsto c$. Omgekeerd geeft $c \in \mathbb{R}$ je een snede (X, Y) met $X = \{x < c\}$ en $Y = \{y \geq c\}$. Dit verklaart ook de laatste eis no. 5 op een snede: zonder deze eis zou ook de snede $X = \{x \leq c\}$ en $Y = \{y > c\}$ mogelijk zijn en hebben we geen bijectie tussen \mathbb{R} en $DC(\mathbb{Q})$.

Door middel van deze bijectie kunnen we operaties $+$, \cdot en \leq op $DC(\mathbb{Q})$ definiëren, die dan aan de axioma's voor \mathbb{R} voldoen. Zo vind je bijvoorbeeld, met de notatie $(X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) \equiv (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$,

$$X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}. \quad (27)$$

Dan hebben we $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ desda $X_1 \subseteq X_2$. Vermenigvuldiging is lastiger: dat laten we aan de lezer over, evenzo de verificatie van de axioma's.

Unicité van de reële getallen

Wat betekent nu de uitspraak dat alle constructies van \mathbb{R} isomorf zijn? Ten eerste is een constructie van \mathbb{R} per definitie een verzameling X met operaties $+$, \cdot en \leq die aan alle axioma's voldoet zoals gegeven in §2.1.1. We schrijven: $(X, +, \cdot, \leq)$. Stel nu dat we twee van dergelijke constructies hebben, genaamd $(X_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ en $(X_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$. We zeggen dat deze constructies van \mathbb{R} *isomorf* zijn als er een bijectie $f : X_1 \rightarrow X_2$ bestaat (i.e. een inverteerbare functie, zie Week 2) met de eigenschappen:

$$f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y); \quad (28)$$

$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y); \quad (29)$$

$$x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y). \quad (30)$$

Met andere woorden, f brengt de structuur $(+, \cdot, \leq)$ op de eerste verzameling over in de structuur op de tweede. In de opgave bewijs je de volgende cruciale stelling, die de axioma's van \mathbb{R} in zekere zin rechtvaardigt:

Alle constructies van \mathbb{R} zijn isomorf.

Opgaven

Om te oefenen:

Lees §2.1.2 helemaal door en geef alle overgeslagen bewijzen.

Om in te leveren:

Opgaven 23 en 24 van §2.2.5.

Week 4: Eigenschappen van de reële getallen I.

We behandelen §2.1.3, 2.2.1, 2.2.2, 1.4.1 en 2.4.1. Lees 2.2.3 en 2.2.4a zelf door.

Hoorcollege

Supremum en infimum

Een belangrijk gevolg van met name het volledigheidssaxioma van Dedekind (i.e. axioma IV op p. 38) is het bestaan van het supremum $\sup(X)$ (ook genaamd: kleinste bovengrens, lowest upper bound, l.u.b.) van een van boven begrensde verzameling $X \subset \mathbb{R}$ en het bestaan van het infimum $\inf(X)$ (ook: grootste ondergrens, greatest lower bound, g.l.b.) van een van onder begrensde verzameling $X \subset \mathbb{R}$.

In het eerste geval neem je aan dat er een $d \in \mathbb{R}$ is zodat $x \leq d$ voor alle $x \in \mathbb{R}$: dit is per definitie de eigenschap dat X van boven begrensd is. Dan volgt dat er een *kleinste* d is met deze eigenschap, en dat is nu $\sup(X)$. Om dit te bewijzen kies je bij gegeven X de verzameling

$$Y := \{y \in \mathbb{R} \mid x \leq y \forall x \in X\}.$$

Het volledigheidssaxioma geeft je een $c \in \mathbb{R}$ met $X \leq c \leq Y$. In dit speciale geval is deze c echter uniek: uit de constructie volgt dat als er c en c' zijn met $X \leq c \leq Y$ en $X \leq c' \leq Y$, dan geldt $c \leq c'$ en $c' \leq c$. De axioma's op \mathbb{R} en i.h.b. op de partiële ordening \leq (antisymmetrie) geven dan echter $c = c'$. Deze unieke c is $\sup(X)$.

Het bewijs van het bestaan van $\inf(X)$ voor een deelverzameling $X \subset \mathbb{R}$ waarvoor er een $d \in \mathbb{R}$ is zodat $d \leq x$ voor alle $x \in X$ is precies zo, maar nu moet je even X en Y van naam ruilen. Neem dus aan dat je $Y \subset \mathbb{R}$ hebt waarvoor er een $d \in \mathbb{R}$ is zodat $d \leq y$ voor alle $y \in Y$ (dit is per definitie de uitspraak dat Y van onder begrensd is) en definieer

$$X := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq y \forall y \in Y\}.$$

Opnieuw is er een c met $X \leq c \leq Y$ en opnieuw is deze uniek. Deze unieke c is $\inf(Y)$. Het is duidelijk dat $\sup(X)$ niet hoeft te bestaan als X *niet* van boven begrensd is: neem $X = \mathbb{R}$ of $X = \mathbb{N}$. Het eerste geval geeft je ook een tegenvoorbeeld dat $\inf(X)$ niet hoeft te bestaan als X niet van onderen begrensd is.

Hoe zit het met de natuurlijke getallen?

In het college Getallen maak je \mathbb{R} uit \mathbb{N} ; in Analyse maken we juist \mathbb{N} uit \mathbb{R} ! Nu we \mathbb{R} eenmaal hebben, zeggen we:

\mathbb{N} is per definitie de kleinste inductieve deelverzameling van \mathbb{R} is die 1 bevat.

Hierin is 1 in de axioma's gedefinieerd als het eenheidselement voor vermenigvuldiging (i.e. $1 \cdot x = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$) en zeggen we dat $E \subset \mathbb{R}$ *inductief* is als geldt: $x \in E \Rightarrow x + 1 \in E$. Het begrip "kleinste" kun je ook nog precies maken door te zeggen: \mathbb{N} is de doorsnede van alle inductieve deelverzamelingen van \mathbb{R} is die 1 bevatten.

Deze definitie geeft onmiddellijk wat Zorich (p. 47) het "Principle of mathematical induction" noemt:

Als $E \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ zodanig is dat geldt: $1 \in E$ en $x \in E \Rightarrow x + 1 \in E$, dan geldt $E = \mathbb{N}$.

Als je even nadenkt, zie je dat dit eigenlijk weer de bovenstaande definitie van \mathbb{N} is. Wat meestal het principe van volledige inductie wordt genoemd volgt hieruit:

Stel dat $P(n)$ een bepaalde eigenschap is die voor alle $n \in \mathbb{N}$ is gedefinieerd. Stel dat $P(1)$ waar is en stel dat je het volgende kunt bewijzen: als $P(n)$ waar is, dan is ook $P(n + 1)$ waar. Dan geldt $P(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Je kunt bij $P(n)$ bijvoorbeeld denken aan: een zekere functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heeft in n de waarde $n!$. Ook dit principe is eigenlijk equivalent met onze definitie van \mathbb{N} (denk even na).

Z en Q

Uit \mathbb{N} maken we de *gehele getallen* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N},$$

waarbij $-\mathbb{N} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Hier is $-x$ voor $x \in \mathbb{R}$ (en dus ook $x \in \mathbb{N}$ gedefinieerd door de axioma's als het (unieke) getal waarvoor $(-x) + x = 0$, waarbij 0 al was gedefinieerd als het (unieke) getal met de eigenschap $y + 0 = y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Het is allemaal mooi opgebouwd!

Uit \mathbb{Z} maken we vervolgens de *rationele getallen* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{Q} := \{mn^{-1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

waarbij voor gegeven $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, het getal y^{-1} door de axioma's is gedefinieerd als het (unieke) getal waarvoor $y \cdot y^{-1} = 1$ voor alle $y \in \mathbb{R}$, waarbij opnieuw $1 \in \mathbb{R}$ al gedefinieerd was als het (unieke) getal met de eigenschap $y \cdot 1 = y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. We kunnen dan ook de breuk mn^{-1} zien als het unieke getal met $(mn^{-1}) \cdot n = m$.

Getallen die niet rationeel zijn heten *irrationeel*. Dit geeft de (flauwe) opsplitsing

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Het is voor Analyse 1 van minder belang, maar wel leuk om te weten dat ook de verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ van irrationele getallen weer op te splitsen is in de *algebraïsche* irrationele getallen en de rest. Een getal $x \in \mathbb{R}$ heet *algebraïsch* als het de oplossing is van een vergelijking $\sum_{k=0}^n c_k x^k = 0$, met $c_k \in \mathbb{Z}$. Zo is $\sqrt{2}$ algebraïsch. Ook alle elementen van \mathbb{Q} zijn algebraïsch. De “rest” heet transcendent. Voorbeelden van transcendente getallen zijn e en π ; het is heel moeilijk om van een concreet getal te bewijzen dat het transcendent is.

Kardinaliteit

Hoe “groot” is \mathbb{N} ten opzichte van \mathbb{R} ? Voor een eindige verzameling X is de “grootte” te bepalen door het aantal elementen te tellen. Dit aantal noemen we de *kardinaliteit* van X , notatie $\text{card}(X)$. Een verzameling met n elementen heeft dan per definitie kardinaliteit n . Een belangrijke stelling over eindige verzamelingen is:

- $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ desda er een injectie $f : X \rightarrow Y$ bestaat;
- $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ desda er een bijectie $f : X \rightarrow Y$ bestaat.

Cantor zag in dat deze *eigenschap* van eindige verzameling een goede *definitie* oplevert voor oneindige verzamelingen. In het volgende zijn X en Y willekeurige verzamelingen.

- We zeggen dat $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ ofwel $X \preceq Y$ als er een injectie $f : X \rightarrow Y$ bestaat;
- We zeggen dat $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ ofwel $X \sim Y$ als er een bijectie $f : X \rightarrow Y$ bestaat.

Dit leidt tot de notatie:

We zeggen dat $X \prec Y$ als $X \preceq Y$ maar niet $X \sim Y$ (er is dus een injectie $X \rightarrow Y$ maar geen bijectie).

Als we slordig zijn kunnen we zeggen dat \sim een equivalentierelatie geeft op de verzameling van alle verzamelingen, maar helaas bestaat deze “verzameling” niet als zodanig. Wel kunnen we spreken van de “categorie of de “klasse” van alle verzamelingen, en daarop geeft \sim inderdaad zo iets als een equivalentierelatie met de gebruikelijke eigenschappen (zie p. 7 onderaan). De relatie \preceq lijkt op een partiële ordening, met uitzondering van de antisymmetrie: als $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ en $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$ dan hoeft niet te gelden $X = Y$. Wel geldt de *Stelling van Schröder–Bernstein*:

Als $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ en $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$ dan is $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$.

Voor eindige verzamelingen is dit een tautologie! Maar in het algemeen is het een diep resultaat (dat we hier niet bewijzen): schrijf maar uit wat het precies betekent. Tevens hebben we de *Stelling van Cantor*:

Er geldt ofwel $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ ofwel $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$ (of allebei).

Je kunt dus van iedere twee verzamelingen zeggen welke de grootste is, of dat ze even groot zijn. Dit kan tot grote verrassingen leiden. Zo blijkt:

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}, \quad (31)$$

terwijl je toch zou denken dat \mathbb{Q} een stuk “groter is dan \mathbb{N} . Maar je moet hier heel goed op de definities letten: er bestaat inderdaad een bijectie tussen \mathbb{N} en \mathbb{Q} (zie Zorich p. 75, maar probeer het eerst zelf!). Verzamelingen met dezelfde kardinaliteit als \mathbb{N} heten *aftelbaar*. Echter:

$$\mathbb{N} \prec \mathbb{R}. \quad (32)$$

De verzameling van reële getallen is dus *niet* aftelbaar! We zullen dit volgende week bewijzen. Nu kun je je afvragen: bestaat er een verzameling X met een kardinaliteit die tussen die van \mathbb{N} en die van \mathbb{R} inligt? Met andere woorden, bestaat er een X met de eigenschap $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(X) < \text{card}(\mathbb{R})$? Dit is de *continuümhypothese*. Het blijkt dat deze vraag niet binnen de (gebruikelijke) wiskunde te beantwoorden is.

Opgaven

Om te oefenen:

§2.2.5 opgaven 2a en 1a,b,c,d,e. §2.4.2 no. 5a.

Om in te leveren:

§2.2.5 opgaven 1f en 16, §2.4.3 no. 2a,b,c,d.

Week 5: Eigenschappen van de reële getallen II.

We behandelen (in deze volgorde) §2.4.2, 2.3.1, 2.4.1, 2.3.2 en 2.3.3.

Hoorcollege

Aftelbaarheid en overaftelbaarheid

We bewijzen eerst dat $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$, onder voorbehoud van het Principe van Cauchy en Cantor. Omdat $\mathbb{R} \sim [0, 1]$ (zie opgave 2.4.3.2d) van vorige week) is het voldoende om te laten zien dat $\mathbb{N} \prec [0, 1]$.

Als $\mathbb{N} \sim [0, 1]$ dan bestaat er *per definitie* een bijectie $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. De eis dat f injectief is (de helft van de definitie van een bijectie) houdt in dat $\{f(1), f(2), \dots\} \subset [0, 1]$ met $f(m) \neq f(n)$ als $m \neq n$. De eis dat f surjectief is (de andere helft van de definitie van een bijectie) geeft dan $\{f(1), f(2), \dots\} = [0, 1]$. Een slim argument geeft echter het bestaan van $c \in [0, 1]$ zodat $c \neq f(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De functie f kan dus niet surjectief zijn.

Het argument gaat als volgt. Schrijf $I_0 = [0, 1]$ en kies een gesloten interval $I_1 \subset I_0$ zodanig dat $f(1) \notin I_1$. (Oefenopgave: Waarom kan dit?) Herhaal deze procedure: gegeven I_n , kies $I_{n+1} \subset I_n$ zodat $f(n+1) \notin I_{n+1}$. Neem nu de doorsnede $\bigcap_n I_n$ van al deze intervallen. Deze doorsnede blijkt niet leeg te zijn (zie onder), en bevat dus een getal $c \in \bigcap_n I_n$. Met andere woorden, $c \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$. Aan de andere kant geldt $f(m) \notin I_m$ voor iedere $m \in \mathbb{N}$ en dus ook $f(m) \notin \bigcap_n I_n \forall m \in \mathbb{N}$. Maar als $c \in \bigcap_n I_n$ en $f(m) \notin \bigcap_n I_n$ volgt $f(m) \neq c$ voor iedere $m \in \mathbb{N}$. Dus c komt niet voor op de lijst $\{f(1), f(2), \dots\}$ en f kan niet surjectief zijn. Q.E.D.

Dit bewijs berust op het *Principe van Cauchy en Cantor* (p. 71):

Stel dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een gesloten interval $I_n \subset \mathbb{R}$ is gedefinieerd; dit betekent dat

$$I_n = [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}, \quad (33)$$

uiteraard met $a_n \leq b_n$. Stel bovendien dat $I_{n+1} \subset I_n$ voor alle n . Dan is de doorsnede $\bigcap_n I_n$ van al deze intervallen niet leeg. Als bovendien $b_n - a_n \rightarrow 0$ (in de zin dat $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon \forall n > N$), dan bestaat $\bigcap_n I_n$ uit één enkel punt.

Neem als voorbeeld $I_n = [0, 1/n]$. Dan is $\bigcap_n I_n = 0$. Het principe is een simpel gevolg van het volledigheidssaxioma van Dedekind (zie boek). Let ook op de volgende terminologie:

Een interval

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (34)$$

*met $-\infty < a \leq b < \infty$ heet **gesloten**. Een interval*

$$]a, b[\equiv (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (35)$$

*met $-\infty \leq a < b \leq \infty$ heet **open**.*

Uit het resultaat $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (dat dus volgt uit het volledigheidssaxioma) blijkt dat niet alle oneindige verzamelingen dezelfde kardinaliteit hebben.² Een verzameling met de kardinaliteit van \mathbb{N} heet *aftelbaar*. Een verzameling met de kardinaliteit van \mathbb{R} heet *overaftelbaar*. Zo zijn \mathbb{Z} en \mathbb{Q} aftelbaar. Het eerste zie je door expliciet een bijectie tussen \mathbb{Z} en \mathbb{N} op te schrijven.

Het tweede loopt via een nuttig tussenresultaat:

1. *Een oneindige deelverzameling van een aftelbare verzameling is aftelbaar.*

²Een verzameling heet *eindig* als deze een eindig aantal elementen bevat. Een verzameling heet *oneindig* als deze niet eindig is. Het is echter niet zo fraai om een eigenschap (in dit geval oneindigheid) te definiëren door het niet hebben van een bepaalde andere eigenschap. Je kunt een oneindige verzameling echter ook als volgt definiëren (Dedekind): *Een verzameling X heet oneindig als deze een echte deelverzameling Y bevat met dezelfde kardinaliteit als X , i.e. $Y \sim X$.* (Een deelverzameling $Y \subset X$ heet *echt* als $Y \neq X$ en $Y \neq \emptyset$.) Volgens onze definities betekent dit dat er dan een bijectie $f : Y \rightarrow X$ bestaat. Kijk maar eens naar \mathbb{N} . De even getallen \mathbb{E} vormen een echte deelverzameling van \mathbb{N} terwijl er een bijectie $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{N}$ bestaat, bijvoorbeeld $f(n) = n/2$. Hieruit volgt dus dat \mathbb{N} een oneindige verzameling is.

2. Als voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een aftelbare verzameling X_n is gedefinieerd, is de vereniging $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ van al deze X_n aftelbaar.

Het eerste kan nauwelijks een verrassing zijn, het tweede ligt niet zo voor de hand. Lees zelf het bewijs van deze Proposition op p. 74. De essentie is als volgt:

- Omdat iedere X_n aftelbaar is, kunnen we bijecties $f_n : X_n \rightarrow \mathbb{N}$ vinden.
- Dit geeft een injectie $\cup_n X_n \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ waarbij $x \in X_n$ wordt afgebeeld op $(n, f_n(x)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.³
- Er bestaat een bijectie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gegeven door

$$(m, n) \mapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m.$$

- Hieruit volgt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.
- Volgens tussenresultaat 1 boven is dan $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ aftelbaar.

Nu kunnen we ook bewijzen dat \mathbb{Q} aftelbaar is, i.e.

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}. \tag{36}$$

Omdat $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ volgt ook dat $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}^2 \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. Nu geldt $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}^2$, want een breuk q heeft een unieke uitdrukking $q = m/n$ als je eist dat de noemer positief en zo klein mogelijk is. Het eerste resultaat vertelt je dan dat \mathbb{Q} aftelbaar is. Q.E.D.

Op een dergelijke wijze kan ook worden aangetoond dat de algebraïsche getallen aftelbaar zijn. Aangezien de transcendenten getallen daar per definitie het complement van zijn in \mathbb{R} , moet wel gelden dat de transcendenten getallen overaftelbaar zijn: anders zou \mathbb{R} niet overaftelbaar zijn!

Heine–Borel en Bolzano–Weierstrass

Naast het Principe van Cauchy en Cantor zijn er nog twee belangrijke gevolgen van het volledighedsaxioma voor \mathbb{R} . De bewijzen hiervan staan duidelijk in het boek (zie resp. p. 72 en 73).

1. *Heine–Borel Stelling ofwel Borel–Lebesgue Lemma:*
Iedere **open** overdekking van een **gesloten** interval in \mathbb{R} heeft een eindige deelopdekking.⁴
2. *Bolzano–Weierstrass Principe:*
Iedere oneindige **begrensde** deelverzameling van \mathbb{R} heeft (tenminste) één limietpunt.

Wat betekenen al deze termen? Een *overdekking* van een verzameling Y is een verzameling $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ van verzamelingen $X_\lambda \subset Y$ met de eigenschap dat $Y \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Dit kun je zo lezen: voor iedere $x \in Y$ is er minstens één X_λ zodat $x \in X_\lambda$. De verzameling $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kan eindig, aftelbaar, of overaftelbaar zijn (of zelfs nog erger) al naar gelang de “indexverzameling” Λ dat is. Voorbeelden zijn $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ met $n < \infty$, zodat $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \equiv \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, of $\Lambda = \mathbb{N}$, zodat $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \equiv \{X_1, X_2, \dots\}$. Als Y overaftelbaar is (bijv. $Y = \mathbb{R}$), kun je een overaftelbare overdekking van Y maken door te kiezen $\Lambda = Y$ en $X_\lambda = \lambda \in Y$. Meestal is het zo dat Y is gegeven als deelverzameling van een verzameling X en dat alle $X_\lambda \subset X$.

Bij Heine–Borel gaat het om $Y = [a, b]$ en $X = \mathbb{R}$. De eis is dat iedere X_λ open is in \mathbb{R} , dus $X_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$. Stel $Y = [0, 1]$; dit is een gesloten interval. Een voorbeeld van een eindige open overdekking van $[0, 1]$ is $\{(-1, 2/3), (1/2, 2)\}$. Een voorbeeld van een aftelbare open overdekking van het open interval $(0, 1)$ is $\Lambda = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$ en $X_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$. De uitspraak van

³Deze injectie is alleen goed gedefinieerd als alle verzamelingen X_n disjunct zijn, i.e. geen elementen gemeenschappelijk hebben (m.a.w. $X_n \cap X_m = \emptyset$). Als er wel dubbele elementen zijn, i.e. als $x \in X_n$ hetzelfde blijkt te zijn als $y \in X_m$, $m \neq n$, dan moet eerste één van een dergelijke groep identieke elementen worden gekozen. Dit kan m.b.v. het keuze-axioma.

⁴Andere formulering: een gesloten interval in \mathbb{R} is *compact*. Dit is precies dezelfde uitspraak, want een deelverzameling van \mathbb{R} is per definitie compact als iedere open overdekking van een eindige deelopdekking heeft.

Heine–Borel is in dat geval niet waar! Dat komt omdat ook niet aan de aannamen voldaan is: het interval $(0, 1)$ is niet gesloten.

Stel nu dat een open overdekking $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ van $[a, b] \subset \mathbb{R}$ oneindig is. De stelling zegt nu dat er een eindige deelverzameling $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_0}$ van $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bestaat (dus $\Lambda_0 \subset \Lambda$ is eindig) die nog steeds een overdekking van $[a, b]$ is. De stelling volgt uit het Principe van Cauchy en Cantor (en dus uiteindelijk uit het volledighedsaxioma); zie boek, p. 72 voor het bewijs.

Een deelverzameling X van \mathbb{R} heet *begrensd* als $X \subset [a, b]$ voor bepaalde $-\infty < a \leq b < \infty$ (met andere woorden, X is bevat in een gesloten interval). Een *limietpunt* van een (niet noodzakelijk begrensde) deelverzameling X van \mathbb{R} is een punt $p \in \mathbb{R}$ met de volgende eigenschap: *iedere open omgeving van p bevat oneindig veel punten van X* . Hierbij is een *open omgeving* van p een open interval (a, b) dat p bevat, i.e. $a < p < b$. Een andere formulering van het begrip limietpunt is daarmee: *een punt $p \in \mathbb{R}$ is een limietpunt van een deelverzameling $X \subset \mathbb{R}$ als voor iedere $\delta > 0$ de verzameling $(p - \delta, p + \delta)$ oneindig veel punten van X bevat*.

Je denkt bij een limietpunt misschien aan de volgende situatie: $X = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ en $p = 0$. Dat klopt! Maar een heel ander soort voorbeeld is $X = \mathbb{Q}$, waarvan iedere $p \in \mathbb{R}$ limietpunt is. Dit volgt uit het volgende belangrijke resultaat (zie p. 54 boek, no. 9, dat weer uit de axioma's van \mathbb{R} en de definitie van \mathbb{Q} volgt):

Als $a < b$ voor $a, b \in \mathbb{R}$ dan is er een $r \in \mathbb{Q}$ zodat $a < r < b$.

Uiteraard is \mathbb{Q} *onbegrensd* in \mathbb{R} , en toch heeft \mathbb{Q} niet één maar zelfs overaftelbaar vbeel limietpunten. Het feit dat iedere $p \in \mathbb{R}$ limietpunt is van \mathbb{Q} is dus *wel* een illustratie van het begrip limietpunt, maar *niet* een illustratie van het Bolzano-Weierstrass Principe. Dat de aanname in dit principe nodig is blijkt uit het volgende voorbeeld: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ heeft geen enkel limietpunt. Dat komt uiteraard omdat \mathbb{N} niet begrensd is.

Opgaven

Om te oefenen:

1. In het bewijs dat $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ is gebruikt dat een gesloten interval $I_1 \subset I_0$ bestaat zodanig dat $f(1) \notin I_1$. Bewijs dat dit inderdaad kan.
2. §2.3.4 nos. 1ab.
3. Bewijs dat iedere $p \in \mathbb{R}$ een limietpunt is van \mathbb{Q} . (Gebruik de genoemde eigenschap van \mathbb{Q} zonder bewijs: Als $a < b$ voor $a, b \in \mathbb{R}$ dan is er een $r \in \mathbb{Q}$ zodat $a < r < b$.)

Om in te leveren:

1. §2.3.4 nos. 2abc.
2. §2.3.4 no. 3 alleen voor het Bolzano-Weierstrass Principe.
3. §2.4.3 nos. 3abcd.

Responsiecollege

In het responsiecollege op vrijdag 23 maart van 09:00-10:30 (in HFML 220) gaan we samen opgaven 2.4.3 nos. 4 en 5 maken en wat omliggende theorie behandelen. Het is niet strict nodig dit responsiecollege voor te bereiden, maar het helpt wel om beter mee te kunnen doen.

Week 6: Limieten van rijen.

We behandelen dinsdag in vogelvlucht §3.1.1, 3.1.2 en 3.1.3. Lees deze paragrafen ook goed door! Vrijdag doen we §3.1.4 (in het tweede uur, in het eerste uur maken we de verzamelingenleer samen af).

Hoorcollege

Definitie van convergentie en limiet van een rij

Terminologie: rij = *sequence*, reeks = *series*. Een **rij** in \mathbb{R} is een functie $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, met notatie $x(n) \equiv x_n$. Ook wordt de functie wel als (x_n) geschreven. Er is een verschil tussen de functie x en haar beeld $x(\mathbb{N}) := \{x_1, x_2, \dots\}$ in \mathbb{R} ! Als x injectief is valt dit verschil niet zo op, maar als bijvoorbeeld $x(n) = c_1$ voor alle even n en $x(n) = c_2$ voor alle oneven n , dan word je uit $x(\mathbb{N}) = \{c_1, c_2\}$ niet veel wijzer over x . Een **reeks** is een speciaal geval van een rij: gegeven een functie $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (en dus een rij) maak je een nieuwe rij $x(n) := \sum_{k=1}^n a(k)$. De theorie van reeksen is dus een speciaal geval van de theorie van rijen.

Al vanaf de middeleeuwen heeft men geworsteld met rijen als $x(n) := (-1)^n$, $x(n) := 1/n$ en reeksen als

$$x(n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots - (-1)^n \frac{1}{2n-1}. \quad (37)$$

De eerste rij convergeerde volgens sommigen naar 0, volgens anderen naar $1/2$, volgens weer anderen naar geen enkel getal, de tweede zou toch naar moeten gaan, de derde naar $\pi/4$ (Leibniz). Begrippen als convergentie en limiet (bijvoorbeeld van meetkundige benaderingen van oppervlakten) gaan in zekere zin zelfs terug op Archimedes of nog daarvoor. Sinds eind negentiende eeuw weten we hoe dit moet worden geformuleerd. Essentieel is de volgende definitie (zie p. 80):

Voor een gegeven rij $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zeggen we dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ (met $A \in \mathbb{R}$) als $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $|x_n - A| < \varepsilon \forall n > N$.

Dit kun je ook iets abstracter zeggen (zie **Definition 2** op p. 80 en de eerste oefenopgave). Het getal A heet de *limiet* van de gegeven rij en we zeggen dat de rij naar A *convergeert*. Voorbeeld: de limiet van $x(n) := 1/n$ is 0, ofwel $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Ook de limiet van (37) is inderdaad $\pi/4$ in deze strenge zin. Vaak laten we $n \rightarrow \infty$ weg en schrijven we $\lim_n x_n = A$ of zelfs $\lim x_n = A$.

Een rij hoeft geen limiet te hebben. Er is bijvoorbeeld geen enkele $A \in \mathbb{R}$ waar de rij $x(n) := (-1)^n$ naar convergeert. Maar je zou moeten zeggen dat de rij $x(n) = n$ naar ∞ convergeert. Dat kan:

Voor een gegeven rij $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zeggen we dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ als $\forall y > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x_n > y \forall n > N$. Tevens zeggen we dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ als $\forall y < 0 \exists N \in \mathbb{N} : x_n < y \forall n > N$.

Er zijn dan dus drie mogelijkheden:

1. Een rij convergeert naar $A \in \mathbb{R}$;
2. Een rij convergeert naar $\pm\infty$;
3. Een rij convergeert niet.

In het tweede en derde geval zeggen we beide dat de rij *divergeert*, ofschoon er een groot verschil tussen deze twee mogelijkheden is!

We gaan nog eens terug naar het begrip *limietpunt* van de leidraad van vorige week (toen niet of stiefmoederlijk behandeld op het college, nu beter!). We herhalen:

een punt $p \in \mathbb{R}$ is een *limietpunt* van een deelverzameling $X \subset \mathbb{R}$ als voor iedere $\delta > 0$ de verzameling $(p - \delta, p + \delta)$ oneindig veel punten van X bevat.

Hou dit naast **Definition 2** op p. 80:

Er geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ als $\forall \varepsilon > 0$ geldt dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $\{x(n) \mid n > N\} \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Met andere woorden, de staart van de rij ligt geheel in iedere open omgeving van A .

De limiet van een rij $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (als die bestaat) niet altijd een limietpunt (neem een constante rij $x(n) := A$, die convergeert naar A). Als x injectief is, geldt wel dat de limiet van x (als die bestaat) tevens een limietpunt is van de verzameling $X = x(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$. Anders dan een limietpunt is de limiet (als die bestaat) uniek (**Theorem 1c**) op p. 82). De rij $x(n) := (-1)^n + 1/n$ heeft geen limiet, maar wel twee limietpunten (welke?).

Je kunt (eindige) limieten manipuleren zoals je verwacht: **Theorem 2** op p. 82 is erg belangrijk om correcte berekeningen uit te kunnen voeren. Zie Inleveropgave 1. Omdat het resultaat van deze stelling te verwachten viel, laten we het bewijs weg op het college.

Convergentiecriteria

Om in de praktijk te laten zien of c.q. dat een rij convergeert is het volgende nuttig.

1. *Noodzakelijke én voldoende voorwaarde voor convergentie*: x is een *Cauchy-rij* in de zin dat $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon \forall n, m > N$.
2. *Noodzakelijke voorwaarde voor convergentie*: x is begrensd in de zin dat er een interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ is zodat $x(\mathbb{N}) \subset [a, b]$. De implicatie is dus: convergent \Rightarrow begrensd, ofwel ongebond \Rightarrow divergent.
3. *Voldoende voorwaarden voor convergentie*: één van de volgende twee
 - x is monotoon stijgend en van boven begrensd in de zin dat $x_{n+1} \geq x_n$ voor alle n en $x_n < c$ voor een $c \in \mathbb{R}$;
 - x is monotoon dalend en van beneden begrensd in de zin dat $x_{n+1} \leq x_n$ voor alle n en $x_n > c$ voor een $c \in \mathbb{R}$.

Het tweede criterium kun je makkelijk zelf bewijzen. Het eerste volgt uit het Principe van Cauchy en Cantor, zie boek pp. 85–86. Het derde volgt uit het bestaan van suprema en infima van resp. van boven en van onder begrensde deelverzamelingen van \mathbb{R} , zie week 4. Als bijvoorbeeld x is monotoon stijgend en van boven begrensd is, heeft $x(\mathbb{N})$ een supremum $\sup(x(\mathbb{N}))$. Dit is precies de limiet van x . De claims zijn dus niet waar in \mathbb{Q} !

Een illustratie van punt 1 is de decimaalexpansie van een irrationeel getal, $a = a_0.a_1a_2a_3 \dots$. Dit geeft aanleiding tot de rij $x(n) := a_0.a_1a_2a_3 \dots a_n$. Aan het Cauchy-criterium is voldaan, zodat $x(n) \rightarrow a$. Een negatieve illustratie is de *harmonische reeks*

$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Hier geldt $|x_{2n} - x_n| > \frac{1}{2}$, zodat de reeks wel moet divergeren (de som is ∞).

Een voorbeeld van punt 3 is de definitie van e d.m.v.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (38)$$

Met enige moeite (zie boek pp. 89–90) is in te zien dat de rij in het rechterlid monotoon dalend is met als ondergrens 1. Er is dus een limiet, en die limiet noemen we e . Op dezelfde manier kun je definiëren

$$e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (39)$$

Divergente rijen

Ook over mogelijk divergente rijen is van alles te zeggen.

Iedere rij heeft een deelrij die convergeert naar een $A \in \mathbb{R}$ of divergeert naar $\pm\infty$.

Hier is een *deelrij* van x een oneindige deelverzameling $M \subset \mathbb{N}$ en de beperking van $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tot M . Voorbeeld:

$$(x_n) = (1, 1/2, 3, 1/4, 5, 1/6, \dots) \quad (40)$$

heeft een deelrij die divergeert naar ∞ (en wel $(1, 3, 5, \dots)$) en een deelrij die convergeert naar 0 (het complement).

Waarom is dit zo? De rij is begrensd of niet. Zo niet, dan geldt divergentie van een deelrij naar $\pm\infty$ (anders zou de rij begrensd zijn!). In het eerste geval heeft de rij ofwel een constante staart ($x(n) = c \forall n > N$) ofwel niet. In het eerste geval convergeert de rij naar c . In het tweede geval is de staart injectief. Dan is Bolzano-Weierstrass aan de orde: er is een limietpunt en een bijbehorende deelrij dat daar naar convergeert (zie boek bovenaan p. 91).

Hiermee is tevens bewezen:

Iedere begrensde rij heeft een convergente deelrij.

Ook als de limiet van een rij niet bestaat, zelfs niet als $\pm\infty$, kun je de volgende twee grootheden (mogelijk $\pm\infty$) aan de rij toekennen:

- $\underline{\lim} x \equiv \liminf x \equiv \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k \mid k \geq n\}$.
- $\overline{\lim} x \equiv \limsup x \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k \mid k \geq n\}$.

Uit de gegeven rij x maak je in het eerste geval dus eerste een nieuwe rij $\underline{x}(n) := \inf\{x_k \mid k \geq n\}$, en neemt dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n$. In het tweede geval navenant. Als de rij x niet van beneden begrensd is, is $\liminf x = -\infty$. Als de rij x niet van boven begrensd is, is $\limsup x = \infty$. Neem nog eens (40). Dan is $\limsup x = \infty$ en $\liminf x = 0$.

Als een begrensde meerdere limietpunten heeft (en dat kunnen er oneindig veel zijn!), dan geeft \liminf het kleinste limietpunt en \limsup het grootste. Als de rij convergeert of divergeert naar $\pm\infty$, geldt (uiteraard)

$$\limsup x = \liminf x = \lim x. \quad (41)$$

Een interessant gevolg is:

Een rij convergeert desda alle deelrijen convergeren.

Probeer alle voorbeelden op p. 92 te begrijpen!

Opgaven

Om te oefenen:

1. Op p. 80 staan twee verschillende definities van de limiet van een rij: in **Definition 2** en vier regels daar onder. Laat zien dat deze twee definities equivalent zijn.
2. Laat zien dat een rij niet twee verschillende limieten kan hebben.
3. Werk *Example 1* t/m 4 op p. 81 helemaal uit.

Om in te leveren:

1. Bereken zorgvuldig (i.e. bewijs alle stappen):

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{n+n}}{2n-1}$;

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^{-1/2})^n$.

2. Bekijk Theorem 2b) onderaan p. 82. Zorich neemt hier aan dat $A, B \neq \pm\infty$. Is de stelling ook waar als $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (in de zin dat $\forall y > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x_n > y \forall n > N$)? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een extra voorwaarde op B waaronder de uitspraak 2b) ook waar is als $A = \infty$.

3. Stel dat (x_n) en (y_n) begrensde rijen zijn.

(a) Bewijs dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(b) Geef een voorbeeld waarin een striete ongelijkheid geldt.

(c) Geef een extra voorwaarde op de rij (x_n) of (y_n) waaronder gelijkheid geldt.

Week 7: Reeksen. Limieten van functies.

De bekende wiskundige en tv-persoonlijkheid Peter Hochs behandelt dinsdag in §3.1.4, 3.2.1 en 3.2.2 t/m Example 9 (pp. 117–118). De rest van §3.2.2 slaan we over. Donderdag is er gewoon werkcollege. Vrijdag is er geen responsiecollege (Goede Vrijdag). De week daarop is Paasvakantie en is er geen activiteit. We pakken de draad weer op in week 16 (dus op 17 april).

Hoorcollege

Reeksen

Lees H. 12 van Marsden & Weinstein, *Calculus II* eerst nog eens door.

We hebben vorige week al gezien: een **reeks** is een speciaal geval van een rij: gegeven een functie $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (en dus een rij) maak je een nieuwe rij met termen

$$x(n) \equiv x_n := \sum_{k=1}^n a(k) \equiv \sum_{k=1}^n a_k.$$

De theorie van reeksen is dus een speciaal geval van de theorie van rijen. Omgekeerd is een rij ook weer een speciaal geval van een reeks (hoe?), al zullen we deze observatie zelden gebruiken. Net als voor rijen zijn er dus drie mogelijkheden:

1. Een reeks convergeert naar $A \in \mathbb{R}$;
2. Een reeks convergeert naar $\pm\infty$;
3. Een reeks convergeert niet.

Ook nu zeggen we in het tweede en derde geval dat de reeks *divergeert*. De convergentiecriteria voor rijen uit de vorige week hebben de volgende vertaling naar reeksen:

1. *Noodzakelijke én voldoende voorwaarde voor convergentie:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \forall n, m > N,$$

want desda is (x_n) is een Cauchy-rij (**Theorem 6** op p. 95).

2. *Noodzakelijke voorwaarde voor convergentie:* $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, want anders kan de rij (x_n) onmogelijk begrensd zijn (**Corollary 7** op p. 96).

3. *Voldoende voorwaarde voor convergentie:*

- Alle $a_k \geq 0$ (of in ieder geval vanaf een zekere $k = N$, want alleen de staart van een rij is belangrijk voor convergentie) en $\sum_{k=1}^n a_k \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, want dan is de rij (x) monotoon stijgend en van boven begrensd (**Theorem 7**, p. 98).

Uit nummertje drie volgen onmiddellijk **Theorem 8** op p. 98 en **Corollary 9** op p. 99.

Hoewel je met een of meer van deze drie methoden soms kan zien wat er met een bepaalde reeks gebeurt, zijn er diepere criteria die uitsluitsel kunnen geven als je met de drie punten niet opschiet. Deze criteria geven vaak sterkere informatie dan convergentie, namelijk *absolute convergentie*. Dit betekent dat $\sum_k |a_k|$ convergeert, wat weer impliceert dat ook $\sum_k a_k$ convergeert. Keer op keer zal blijken dat je met absoluut convergente rijen kunt manipuleren bijna zoals je wilt, net als later met absoluut convergente integralen.

Heel belangrijk is de *Cauchy-test* (ook wel genoemd *worteltest*). Deze volgt uit de convergentiecriteria voor de *meetkundige reeks*

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1),$$

en divergent voor $|q| \geq 1$ (zie Zorich p. 96) of Marsden & Weinstein, *Calculus II*, p. 564). In de Cauchy-test moet je uitrekenen

$$\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks $\sum_k a_k$ is dan absoluut convergent als $\alpha < 1$ en divergent als $\alpha > 1$. Als $\alpha = 1$ heb je pech; dan geeft de test geen uitsluitel (zie beneden voor een voorbeeld). De Cauchy-test bevat limsup en niet lim. Dat is handig als de lim niet bestaat; soms bestaat de limsup dan wel. Neem als voorbeeld de reeks met $a_k = c_1$ als k even en $a_k = c_2$ als k oneven, met $0 < c_1 < c_2$. Dan bestaat $\lim |a_n|^{1/n}$ niet, terwijl $\limsup |a_n|^{1/n} = c_2$. Als $c_2 < 1$ convergeert de rij dus en als $c_2 > 1$ divergeert zij. Als $c_2 = 1$ divergeert de rij naar ∞ , dat volgt niet uit de Cauchy-test maar dat zie je direct.

Dat komt vaak voor: als $\alpha = 1$ in de Cauchy-test kun je door invullen vaak meteen zien wat er gebeurt. Vaak, maar niet altijd! Neem maar eens $\sum_k k^{-p}$ voor $p \in \mathbb{R}$. Dan is $\alpha = 1$ voor alle p , maar je ziet niet direct wat er aan de hand is. In dit specifieke geval geeft weer een andere test van Cauchy (wat een kerel!) uitsluitel, zie **Proposition 2** op p. 101 en de daarop volgende uitwerking.

Een soortgelijke test is die van d'Alembert (zie p. 100). Niet opgenomen in Zorich maar wel uitermate nuttig is de **Alternating Series Test** in Marsden & Weinstein, *Calculus II*, p. 573): als (in de staart) iedere a_k een tegengesteld teken heeft t.o.v. zijn voorganger en $|a_k| \rightarrow 0$, dan convergeert $\sum_k a_k$. Daaruit zie je dat $\sum_k (-1)^k 1/k$ convergeert, terwijl $\sum_k 1/k$ divergeert (hetgeen bijvoorbeeld volgt uit het Cauchy-criterium, zie Zorich p. 87).

Limieten van functies

We willen zeggen wat de betekenis is van de uitspraak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \tag{42}$$

Het ruwe idee is dat dit geldt voor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, maar als je kijkt naar $f(x) = 1/x$ dan wil je iets kunnen zeggen als $\lim_{x \rightarrow 0} = \infty$ terwijl $x = 0$ niet tot het definitiegebied van f behoort. Ook willen we soms een functie uitbreiden. Stel dat $f(x) = \sin(x)/x$, voor $x \neq 0$. Dan willen we kunnen zeggen dat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (zie p. 117).

Daarom nemen we aan dat $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ met $E \subset \mathbb{R}$, waarbij a een limietpunt van E is. I.h.b. hoeft a niet in E te liggen. Dan begrijp je waarom **Definition 1** op p. 107 de gegeven vorm heeft, en waarom alle rare notaties met dat bolletje po p. 108 slim zijn bedacht.

Het verband tussen limieten van functies en limieten van rijen wordt gegeven door de fraaie stelling van Heine, **Proposition 1** op p. 111: (42) geldt desda als voor iedere rij $x : \mathbb{N} \rightarrow E \setminus \{a\}$ met $x_n \rightarrow a$ geldt dat de rij $f(x_n)$ convergeert naar A . Om dus te bewijzen dat (42) NIET geldt, is het voldoende om voor een slim gekozen rij te laten zien dat $f(x_n)$ niet convergeert naar A !

Illustratie van de begrippen tot nu toe: neem $E_1 = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ en $f(x) = 1$ op E_1 . Dan is $\lim_{x \rightarrow 0} = 1$. Neem nu $E_1 = \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ en $f(x) = 0$ op E_2 . Dan is $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$. Neem ten slotte deze f op $E_1 \cup E_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dan bestaat $\lim_{x \rightarrow 0}$ niet!

Een nuttige techniek is het inklemmen van f , zie **Theorem 3** op p. 116. Bekijk goed het voorbeeld $\sin(x)/x$.

Opgaven

Om te oefenen:

1. Pas alle behandelde convergentiecriteria toe om te bepalen dat de meetkundige reeks $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ convergeert als $|q| < 1$ en divergeert als $|q| \geq 1$.
2. Bewijs, direct uit de definitie van limieten, dat voor elke $a > 0$,

$$\lim_{x \downarrow 0} {}^a \log x = -\infty.$$

3. Bewijs dat Definition 3 op bladzijde 108 van het boek van Zorich equivalent is met de ‘ ε - δ ’-definitie, Definition 1 op bladzijde 107, die ook op het college behandeld is.

Om in te leveren:

1. Bepaal voor welke reële getallen x de volgende reeksen convergeren (en leg duidelijk uit welke test(s) je hebt gebruikt):

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (3 + (-1)^k)x^{k^2}$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (3 + (-1)^k)^k x^k$.

2. Bewijs, direct uit de definitie van limieten, dat voor alle $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2.$$

3. Laat een verzameling $E \subset \mathbb{R}$, een functie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, en een limietpunt a van E gegeven zijn. Bewijs dat de limiet van $f(x)$, als $x \rightarrow a$, uniek is. Dat wil zeggen: als $b, c \in \mathbb{R}$ gegeven zijn, zo dat

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

dan $b = c$.

Week 8: Limieten over een base. Kleine o en grote O .

We behandelen dinsdag in §3.2.3 en 3.2.4. Dit materiaal werd in het verleden door de meeste studenten erg moeilijk gevonden, dus maak je borst maar nat!

Hoorcollege

Basen

Het is de bedoeling van het begrip *base* dat in §3.2.3 wordt ingevoerd om alle limietbegrippen van rijen en reeksen (en later in de Analyse nog veel meer) onder één noemer te brengen. Hierdoor wordt duidelijk dat limietprocedures die er verschillend uitzien (zoals $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$) in feite op hetzelfde neerkomen. Dit is wiskundig heel fraai, maar heeft een hoge abstractiegraad die wat vroeg in de cursus komt. Een probleem is dat Zorich later in het boek veel bewijzen uitsluitend in de taal van basen geeft, terwijl die eenvoudiger zijn door ze in ieder geval in eerste instantie uit te splitsen naar de speciale gevallen. Aan de andere kant is dit materiaal een goed voorbereiding op het latere vak Topologie. Aan de slag dus!

Stel X is een verzameling. Je kunt hierbij denken aan \mathbb{R} , $E \subset \mathbb{R}$ of \mathbb{N} . Een *base* \mathfrak{B} in X is een verzameling van niet-lege deelverzamelingen van X , dus $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$, met één karakteristieke eigenschap: als twee verzamelingen beide in \mathfrak{B} liggen, dan bevat hun doorsnede een element van \mathfrak{B} . Formeel: zie **Definition 11** op p. 128.

Motiverend voorbeeld voor $X = \mathbb{R}$: voor een punt $p \in \mathbb{R}$ kun je nemen de base $\mathfrak{B}_p(\mathbb{R})$ van alle open omgevingen $U(p)$ van p (je herinnert je dat een open omgeving van p een open interval (a, b) is dat p bevat). Een kleine variatie hierop is de base $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}_p(\mathbb{R})$ van alle open omgevingen $\overset{\circ}{U}$ van p met p weggelaten, i.e. $\overset{\circ}{U}(p) = (p - \delta_1, p) \cup (p, p + \delta_2)$ voor $\delta_1, \delta_2 > 0$. Voor $p = \infty$ kun je nemen de base van alle deelverzamelingen van \mathbb{R} van de vorm (δ, ∞) , voor $p = -\infty$ neem je $(-\infty, \delta)$. Al deze basen blijven een base (maar dan voor $X = E$) als ze worden doorsneden met een open $E \subset \mathbb{R}$, meestal het definitiegebied van een functie. Je krijgt dan $\mathfrak{B}_p(E)$ en $\mathfrak{B}_\infty(E)$.

Nu komt een lastig punt: Zorich noemt de base $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}_a(\mathbb{R})$ gewoon $x \rightarrow a$. Dit is een slimme notatie, want $\lim_{\mathfrak{B}}$ voor $\mathfrak{B} = \overset{\circ}{\mathfrak{B}}_a(\mathbb{R})$ wordt dan genoteerd als $\lim_{x \rightarrow a}$. Het blijkt echter lastig om je steeds te realiseren dat $x \rightarrow a$ nu een notatie is voor een bepaalde verzameling van deelverzamelingen van \mathbb{R} .

Bekijk nu goed de tabel op p. 128, ga na dat je al deze voorbeelden begrijpt en doe de oefenopgave. Het idee is steeds dat willekeurig kleine omgevingen in \mathfrak{B} liggen.

De bovenstaande basen met $X = \mathbb{R}$ spelen een rol in limieten van functies. Voor limieten van rijen kijk je naar $X = \mathbb{N}$ en neemt $\mathfrak{B}_\infty(\mathbb{N}) = \{\mathbb{N}_{>m}, m \in \mathbb{N}\}$. Met andere woorden, de verzamelingen die \mathfrak{B} omvat zijn van de vorm $\{m + 1, m + 2, \dots\}$. Soortgelijke opmerking over de notatie $n \rightarrow \infty$: dit is een andere naam voor de base $\mathfrak{B}_\infty(\mathbb{N})$.

Stel nu dat $f : X \rightarrow \mathbb{R}$; voor $X = \mathbb{N}$ is dit een rij, voor $X = \mathbb{R}$ of $X = E \subset \mathbb{R}$ is f een functie zoals op het vwo (wij weten echter dat ook een rij een functie is!). De uitspraak $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A$ voor $A \in \mathbb{R}$ betekent nu: voor iedere open omgeving $V(A)$ van A is er een $B \in \mathfrak{B}$ zodat $f(B) \subset V(A)$. Voor $A = \infty$ geldt deze definitie ook als je verzamelingen van de vorm (δ, ∞) als open omgevingen van ∞ beschouwt (en navenant voor $A = -\infty$ met $(-\infty, \delta)$). Lees nu op p. 130 hoe een aantal bekende limieten van functies van deze vorm blijken te zijn, en werk zelf uit hoe het zit met rijen.

Sommige dingen kunnen nu mooi gezegd worden. We hebben drie criteria voor convergentie van rijen en reeksen gezien. Deze gelden ook voor het bestaan van $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en luiden dan, eerst zonder en dan met de taal van basen, als volgt.

1. *Noodzakelijke én voldoende voorwaarde van Cauchy:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in (a - \delta, a + \delta) \cap E\} < \varepsilon. \quad (43)$$

2. *Noodzakelijke voorwaarde* (zie **Theorem 1**, p. 112): f is “uiteindelijk begrensd”, i.e.

$$\exists \delta > 0, C \geq 0 : |f(x)| < C \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap E. \quad (44)$$

3. *Voldoende voorwaarde*: f is “uiteindelijk” monotoon stijgend en van boven begrensd i.e. $\exists \delta > 0, C \in \mathbb{R}$ zodat $f(x) \geq f(y)$ als $x \geq y$ en $f(x) \leq C \forall x, y \in (a - \delta, a + \delta) \cap E$. Idem dito: f is “uiteindelijk” monotoon dalend en van onderen begrensd, i.e. $f(x) \leq f(y)$ als $x \geq y$ en $\exists \delta > 0, C \in \mathbb{R} : f(x) \geq C \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap E$.

Met de taal van basen kunnen we deze drie criteria én de drie analoge criteria voor rijen (zie p. 22 van deze Leidraad) in één klap herformuleren als criteria voor het bestaan van $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A$:

1. *Noodzakelijke én voldoende voorwaarde van Cauchy* (**Definition 16** op p. 131 en **Theorem 4**, p. 132):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathfrak{B} : \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in B\} < \varepsilon. \quad (45)$$

2. *Noodzakelijke voorwaarde* (zie **Theorem 1**, p. 112 en **Definition 14** op p. 130): f is “uiteindelijk begrensd” in de zin dat

$$\exists B \in \mathfrak{B}, C \geq 0 : |f(x)| < C \forall x \in B. \quad (46)$$

3. *Voldoende voorwaarde* (**Theorem 6**, p. 137): f is “uiteindelijk” monotoon stijgend en van boven begrensd i.e. $\exists B \in \mathfrak{B}$ en $C \in \mathbb{R}$ zodat $f(x) \geq f(y)$ als $x \geq y$ en $f(x) \leq C \forall x, y \in B$. Idem dito: f is “uiteindelijk” monotoon dalend en van onderen begrensd.

Meer in het algemeen betekent de uitspraak dat f t.o.v. een bepaalde base \mathfrak{B} “uiteindelijk” een zekere eigenschap heeft, dat er een $B \in \mathfrak{B}$ is zodat f de bewuste eigenschap in B heeft. Voorbeeld: f is “uiteindelijk” constant als er een $B \in \mathfrak{B}$ is zodat $f(x) = c$ voor alle $x \in B$.

Een belangrijke stelling in nog **Theorem 5** op p. 133. Voor functies $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ luidt deze stelling als volgt: als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ bestaat en $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ ook bestaat, dan bestaat ook $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = B$, onder de voorwaarde dat voor iedere omgeving $V(A)$ van A een omgeving $U(a)$ van a bestaat zodat $f(U(a)) \subset V(A)$.

In *Example 19* op p. 134 blijkt niet aan die voorwaarde voldaan te zijn. *Example 20* op p. 134 is een voorbeeld van de stelling zoals die in algemene vorm op p. 133 staat: daar is $Y = \mathbb{N}$ en $X = \mathbb{R}^+$. Schrijf de stelling voor jezelf uit voor die situatie! Met de base $n \rightarrow \infty$ wordt bedoeld $\mathfrak{B}_Y = \{\mathbb{N}_{> m}, m \in \mathbb{N}\}$, met de base $x \rightarrow \infty$ bedoelt Zorich $\mathfrak{B}_X = \{(\delta, \infty), \delta > 0\}$.

Grote O en kleine o

Ook dat blijkt een moeilijk onderwerp te zijn. Het idee is om het gedrag van een functie f (op $E \subset \mathbb{R}$) voor $x \rightarrow a$ (inclusief $a = \pm\infty$) of van een reeks (x_n) voor $n \rightarrow \infty$ te vergelijken met dat van een bekende functie g of reeks. Denk aan $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x$; zoals je weet “gedraagt $\sin x$ zich als x voor $x \rightarrow 0$ ”. Maar wat betekent dat precies?

Heel in het algemeen gaat het om de analyse van $\lim_{\mathfrak{B}} f(x)$, zoals boven. Gegeven is dus een functie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en een base \mathfrak{B} in X . Bovendien nemen we aan dat we een functie $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ hebben die we goed kennen. Om het verband tussen f en g uit te drukken zijn drie symbolen ingevoerd met de volgende betekenis.⁵ Let op! Deze symbolen o , O en \sim hebben uitsluitend betekenis t.o.v. een base \mathfrak{B} , oftewel, in gewone taal, t.o.v. een bepaalde limiet.

- $f = o(g)$ betekent dat er een functie $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ is en een $B \in \mathfrak{B}$ is zodat $f(x) = \alpha(x)g(x)$ voor alle $x \in B$ en $\lim_{\mathfrak{B}} \alpha(x) = 0$ (Zorich drukt dit uit door te zeggen dat α “infinitesimal” is over \mathfrak{B}).
- $f = O(g)$ betekent dat er een functie $\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$ is met de eigenschap dat er een $B \in \mathfrak{B}$ is zodat $f(x) = \beta(x)g(x)$ voor alle $x \in B$ en $|\beta(x)| \leq C$ voor alle $x \in B$ en een $C \geq 0$ (Zorich drukt dit uit door te zeggen dat β “ultimately bounded” is over \mathfrak{B}).
- $f \sim g$ betekent dat er een functie $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat en een $B \in \mathfrak{B}$ is zodat $f(x) = \gamma(x)g(x)$ voor alle $x \in B$ en $\lim_{\mathfrak{B}} \gamma(x) = 1$.

⁵**Definition 24** op p. 141 slaan we over, deze komt in de praktijk zelden voor.

De derde is inderdaad een equivalentierelatie, zoals de notatie ook suggereert.

Als $g(x) \neq 0$ op B , kun je dus bewijzen dat:

1. $f = o(g)$ door aan te tonen dat $\lim_{\mathfrak{B}} f(x)/g(x) = 0$;
2. $f = O(g)$ door te laten zien dat f/g begrensd is op B ;
3. $f \sim g$ door aan te tonen dat $\lim_{\mathfrak{B}} f(x)/g(x) = 1$.

Implicatie: $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ maar niet andersom. Zo is $\sin x = O(x)$ maar niet $o(x)$ voor $x \rightarrow 0$. Wel is $\sin x = o(x^p)$ voor alle $p < 1$.

Deze definities kun je weer in gewone mensentaal uitschrijven door concrete voorbeelden voor \mathfrak{B} te nemen. Als $\mathfrak{B} = x \rightarrow a$ (zie opmerking over de notatie in de vorige sectie), dan betekent $f = o(g)$ dat er een (gepunteeerde) omgeving van a is waarin $f(x) = \alpha(x)g(x)$ en $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Enzovoort. Voorbeelden doen wonderen: bekijk ze allemaal goed in §3.2.4d.

Het symbool O komt voor in de Taylor-reeks. We komen daar later nog aan toe, maar zeggen nu alvast dat de rest-term O en niet o bevat; zie p. 145. Zo kan de Taylor-reeks

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (47)$$

worden afgebroken voor willekeurige n door te schrijven

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}). \quad (48)$$

Zoals Zorich zegt, is het inderdaad een goed idee om de Taylor-reksen op p. 145 uit je hoofd te kennen - op de universiteit werken we niet met formulekaarten!

Opgaven

Om te oefenen:

1. Laat zien dat de entries in de tabel op p. 128 inderdaad basen zijn.
2. Vul de tabel aan met de relevante base voor convergentie van een rij. Vergelijk dit met de entries in de tabel en overtuig jezelf daarmee van de unificerende kracht van het begrip base.

Om in te leveren:

1. Bereken de vier limieten in no. 3.2.5.3 op p. 147 van Zorich. Gebruik daarbij zo nodig **Theorem 5** op p. 133 en laat zien dat aan de voorwaarde in die stelling voldaan is (zie ook eerder in de Leidraad van deze week).
2. Voor welke waarde(n) van $a, b \in \mathbb{R}$ gelden de volgende uitspraken:
 - (a) $x^b = O(x^a)$ voor $x \rightarrow 0$;
 - (b) $x^b = O(x^a)$ voor $x \rightarrow \infty$;
 - (c) $x^b = o(x^a)$ voor $x \rightarrow 0$;
 - (d) $x^b = o(x^a)$ voor $x \rightarrow \infty$.
3.
 - (a) Geef een voorbeeld van een base voor \mathbb{R} die niet in boek of leidraad staat.
 - (b) Geef een voorbeeld van een base voor \mathbb{N} die niet in boek of leidraad staat.
 - (c) Geef een voorbeeld van een base voor \mathbb{R}^n (voor iedere n).

Week 8: Continue functies

We behandelen donderdag in het hoorcollege in Chapter 4 geheel.

Hoorcollege

We zeggen dat een functie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ met $E \subset \mathbb{R}$ continu is in $a \in E$ als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Deze uitspraak heeft een traditionele $\varepsilon - \delta$ formulering

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (49)$$

en kan ook in de taal van basen worden ingevuld, hetgeen Zorich dan ook uitvoerig doet. De functie heet continu op E als zij continu is in alle $a \in E$.

Als f niet continu is in a kan dat soms direct worden verholpen. Stel dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ wel bestaat maar niet gelijk is aan $f(a)$ en stel dat de nieuwe functie \tilde{f} gegeven door $\tilde{f}(x) = f(x)$ voor $x \neq a$ en $\tilde{f}(a) = A$ continu is. In dat geval heet de discontinuïteit in a *removable*. Lang niet alle discontinuïteiten zijn echter te verwijderen. Voorbeeld: $f(x) = \sin(1/x)$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. In dit geval bestaat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ niet. Ook leuk zijn de functies van Dirichlet en van Riemann op p. 158.

Er is een belangrijk verschil tussen *lokale* en *globale* eigenschappen van een functie. Een lokale eigenschap geldt in een omgeving van $a \in E$. Voorbeeld: als f continu is in a , dan is f lokaal begrensd. Dat betekent per definitie dat er een omgeving $U(a)$ van a is zodat $\sup\{|f(x)|, x \in U(a)\} < \infty$. Zo is $f(x) = \exp(x)$ lokaal begrensd. Maar ofschoon deze functie globaal continu is, is zij niet globaal begrensd!

Een globale eigenschap zegt iets over het gedrag van f op het hele definitiegebied. Zo is $f(x) = \sin x$ globaal continu op \mathbb{R} en ook globaal begrensd.

Belangrijke stelling van Weierstrass (**Theorem 3** op p. 161): f continu op $[a, b] \Rightarrow f$ begrensd op $[a, b]$. Bovendien neemt f op dit interval haar minimum en haar maximum aan. Dat geldt beide niet voor $f(x) = \exp(x)$ op \mathbb{R} ! Bewijs gaat m.b.v. het Finite Covering Lemma op pp. 71-72 en is dus uiteindelijk gebaseerd op de volledigheid van \mathbb{R} . Deze opmerking geldt ook voor de *Tussenwaardstelling*, i.e. ofwel **Theorem 2** op p. 160 ofwel het **Corollary** daarvan op p. 161 (deze uitspraken zijn equivalent). Deze resultaten volgen namelijk uit het Nested Interval Lemma op p. 71.

In de ‘hogere’ analyse is het begrip *uniforme continuïteit* van groot belang. Dit is typisch een *globale* eigenschap; het heeft geen zin om te zeggen dat een functie uniform continu is in een punt. Een functie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ heet uniform continu op E als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodat $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ voor $x, y \in E$. Het grote verschil met gewone continuïteit blijkt uit de definitie (49) van het laatste: daarin mag δ niet alleen van ε en van f afhangen, maar ook van a . Een continue functie is uniform continu als je $\delta = \delta(\varepsilon, f, a)$ zo kan kiezen dat die niet van a afhangt. Voorbeeld: $f(x) = \sin x$ is uniform continu op \mathbb{R} , $f(x) = \exp(x)$ is dat niet. Of op een begrensd interval: $f(x) = \exp(x)$ is uniform continu op $E = (0, 1)$ maar $f(x) = \sin(1/x)$ is dat niet.

Belangrijke stelling (Cantor-Heine, **Theorem 4** op p. 161): een continue functie op $[a, b]$ is uniform continu. Bewijs hangt opnieuw op het Finite Covering Lemma op pp. 71-72 en dus op de volledigheid van \mathbb{R} .

Ten slotte iets over monotonie. Een functie f heet monotoon stijgend als $f(x) \geq f(y)$ zodra $x \geq y$ en monotoon dalend als $f(x) \leq f(y)$ zodra $x \geq y$. In beide gevallen heet f *monotoon*, en *strict monotoon* als er $>$ en $<$ i.p.v. \geq en \leq geldt. Stelling (**Theorem 5** op p. 168): een strict monotone functie heeft een inverse (is dus i.h.b. injectief). Meer in detail: als $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dan is de inverse $f^{-1} : f(E) \rightarrow E \subset \mathbb{R}$. Als bovendien E gesloten is en f continu, dan is f^{-1} ook continu (i.h.a. hoeft de inverse van een continue functie niet continu te zijn). Goed voorbeeld: $X = [-\pi/2, \pi/2]$ en $f(x) = \sin x$.

Opgaven

Om te oefenen:

1. Bewijs dat $f(x) = x^2$ continu is op \mathbb{R} .
2. Bewijs dat $f(x) = e^x$ continu is op \mathbb{R} .
3. 4.2.3.1.ab

Om in te leveren:

1. 4.2.3.1.c
2. 4.2.3.2
3. 4.2.3.4.ab

Week 9: Differentiaalrekening

We behandelen in het hoorcollege §5.1 en 5.2. Lees eventueel nog 5.1.1 door ter motivatie.

Hoorcollege

We geven zes manieren om tegen de afgeleide van een functie aan te kijken. Met behulp van dit totaalbeeld kun je herinterpreteren wat je al van de middelbare school weet en ben je goed voorbereid op latere generalisaties van de differentiaalrekening (bijvoorbeeld tot functies op ∞ -dimensionale ruimtes: het verhaal is daar in wezen hetzelfde als op \mathbb{R} , als je er maar op de juiste wijze tegenaan kijkt).

Steeds nemen we $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $a \in \mathbb{R}$ of $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ met $E \subset \mathbb{R}$, in welk geval $a \in \mathbb{R}$ een limietpunt van E moet zijn.⁶

1. *De afgeleide als getal.* Het getal $f'(a)$ is gedefinieerd als de limiet

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (50)$$

als deze limiet bestaat. Als dat zo is heet f differentieerbaar in a , en dan is de afgeleide $f'(a)$ gewoon een getal. Niks mis mee. In de taal van basen gebeurt er precies hetzelfde als in Chapter 4, alleen staat er nu niet $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ maar (50), waarin de functie f is vervangen door de functie $g_a(x) := (f(x) - f(a))/(x - a)$. In principe maakt dit geen verschil: het nemen van de afgeleide is een speciaal geval van het algemene limietbegrip t.o.v. een bepaalde base. Vanwege de $x - a$ in de noemer is het nu noodzakelijk om met gepunteerde basen te werken: als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betekent de notatie “ $x \rightarrow a$ ” dus de base \mathfrak{B} van alle gepunteerde open omgevingen $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, $\delta > 0$ van a . Zoals altijd betekent het bestaan van de limiet (50) dat voor iedere open omgeving $V(f'(a))$ van $f'(a)$ er een $B \in \mathfrak{B}$ is zodat $g_a(B) \subset V(f'(a))$. En dit kan weer met ε en δ : de limiet (50) bestaat desda als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $|g_a(x) - f'(a)| < \varepsilon$ voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$.

Als $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ zijn de formules (50) hetzelfde maar met de beperking $x \in E$; dan is $E \ni x \rightarrow a$ de base \mathfrak{B} van doorsneden van gepunteerde open omgevingen van a met E , i.e. $((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \cap E$. Ten slotte is het leuk om op te merken dat geldt (simpele oefening):

f differentieerbaar in $a \Rightarrow f$ continu in a .

2. *De afgeleide als lineaire benadering.* We zeggen dat f lineair benaderbaar is in a als er een getal $A(a) \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$f(x) = f(a) + A(a)(x - a) + o(x - a) \text{ t.o.v. } x \rightarrow a. \quad (51)$$

We noemen dan $L_a f(x) := f(a) + A(a)(x - a)$ de lineaire benadering van f rond a . Dit betekent dat $f - L_a(f) = o(x - a)$ voor $x \rightarrow a$, wat weer inhoudt dat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - L_a f(x)}{x - a} = 0. \quad (52)$$

Invullen van (51) geeft dan onmiddellijk $A(a) = f'(a)$ en de equivalentie van differentieerbaarheid en lineaire benaderbaarheid. In een plaatje is de functie $L_a f$ de raaklijn aan de grafiek van f door het punt $(a, f(a))$.

Als f niet differentieerbaar is in a heeft f dus ook geen lineaire benadering, zoals je ziet aan de zaagtandfunctie (zie ook inleveropgave 1). Een leuke toepassing van dit idee van de afgeleide is de parabolische spiegel: de weerkaatsing van een lichtstraal in een punt van de spiegel is geheel bepaald door de raaklijn in dat punt; zie p. 188.

⁶Ter herinnering: iedere open omgeving van a in \mathbb{R} bevat oneindig veel punten van E .

3. *De afgeleide als richtingsafgeleide.* Stel dat differentieerbaar is in a . Je kunt (50) dan ook schrijven als

$$f'(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}. \quad (53)$$

Een kleine variatie hierop geeft

$$D_v f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+vt) - f(a)}{t} = v f'(a). \quad (54)$$

Wat gebeurt hier? Bekijk de “kromme” (in feite een “rechte”) $c(t) = a + vt$ die voor $t = 0$ begint in $c(0) = a$ op de x -as en dan raakt aan de vector v met begin a en eind $a + v$. We volgen f langs deze kromme en nemen het differentiequotient voor $t \rightarrow 0$. Je kunt (54) dan ook schrijven als

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t} = \frac{d}{dt} f(c(t))_{t=0}. \quad (55)$$

De operatie D_v geeft dus de zogenaamde richtingsafgeleide van f langs de kromme c , ofwel langs de vector v . Je ziet dat $D_1 f(a) = f'(a)$.

4. *De afgeleide als lineaire afbeelding* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Een kleine variatie op het vorige gezichtspunt is dat je de vector v als variabele opvat en een afbeelding $Df_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieert door

$$Df_a(v) := D_v f(a). \quad (56)$$

Als je nu de \mathbb{R} in het argument van Df_a ziet als de x -as en de \mathbb{R} in het beeld als de y -as, geeft het beeld $Df_a(v)$ een raakvector aan de y -as in $f(a)$ met begin $f(a)$ en eind $f(a) + f'(a)v$. De afgeleide van een gegeven functie in a is daarmee geworden tot een lineaire afbeelding van de raaklijn aan a naar de raaklijn aan $f(a)$. Dit lijkt misschien nogal vreemd, maar in de differentiaalmeetkunde (die ten grondslag ligt aan bijvoorbeeld de algemene relativiteitstheorie van Einstein) vormt dit perspectief (met het vorige, dat er nauw mee samenhangt) het uitgangspunt van de differentiaalrekening.

5. *De afgeleide als nieuwe functie.* Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in alle $a \in \mathbb{R}$ ontstaat een nieuwe functie f' , de afgeleide van f . Het proces van differentiatie maakt dus een nieuwe functie uit een oude. **Table 5.1** op p. 205 gaan uit van dit perspectief.
6. *De afgeleide als lineaire afbeelding* $C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$. Een iets geavanceerdere versie van het vorige perspectief staat centraal in de zogenaamde *functionaalanalyse*. Hierin bestudeert men verzamelingen waarvan de elementen functies zijn. Het eenvoudigste voorbeeld is de verzameling $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ van alle functies van \mathbb{R} naar \mathbb{R} . In de context van de afgeleiden kijken we naar de verzameling $C^1(\mathbb{R})$ van alle functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die in ieder punt differentieerbaar zijn en waarvan bovendien de afgeleide continu is (deze eis volgt niet uit differentieerbaarheid in ieder punt op zich, al is er in de praktijk wel vaak aan voldaan) en naar de verzameling $C(\mathbb{R})$ van alle continue functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (Een soortgelijk verhaal geldt voor $C_1(E)$ en $C(E)$, waarbij $E \subset \mathbb{R}$ een open interval is.) Let op: $C^1(\mathbb{R})$ en $C(\mathbb{R})$ zijn beide vector-ruimten (met dimensie ∞), net als \mathbb{R}^n maar dan als het ware oneindig-dimensionaal. Je kunt namelijk twee functies optellen d.m.v.

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (57)$$

en je kunt een functie met een getal vermenigvuldigen d.m.v.

$$(tf)(x) := tf(x). \quad (58)$$

Nu bekijken we de functie $D : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, gedefinieerd door

$$Df := f'. \quad (59)$$

De meeste rekenregels rond differentiatie (zoals in §5.2 en Calculus) kunnen abstract worden gezien als eigenschappen van deze functie D :

1. *Lineariteit*: $D(f+g) = Df + Dg$ en $D(tf) = tD(f)$ voor $t \in \mathbb{R}$, ofwel $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ en $(tf)'(x) = tf'(x)$.
2. *Derivatie-eigenschap (Leibniz-regel)*: $D(fg) = (Df)g + fDg$, ofwel $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. N.B. hieruit volgt $D(1) = 0$.
3. *Kettingregel*: $D(g \circ f) = Df \cdot (Dg) \circ f$, ofwel $g(f(x))' = f'(x)g'(f(x))$.
4. *Inverse-functie regel*: $D(f^{-1}) \circ f = \frac{1}{Df}$, ofwel $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$, onder de aanname dat f^{-1} continu is. (Als dat zo is volgt automatisch dat f^{-1} differentieerbaar is als f dat is (terwijl de inverse van een continue functie niet continu hoeft te zijn). Deze regel volgt uit de kettingregel en $f \circ f^{-1} = \text{id}$, waarbij $\text{id}(x) = x$.

Een typische opmerking van een wiskundige is: de afgeleide D heeft eigenschappen 1 en 2 boven. Stel je neemt een willekeurige functie $L : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ met eigenschappen 1 en 2. Geldt dan $L = D$? Antwoord (moeilijk): ja, op een veelvoud na, i.e. $L = D_v$, zie (56) voor een zekere $v \in \mathbb{R}$.

Een belangrijk en representatief voorbeeld van no. 4 is $f(x) = \sin(x)$. Deze functie is een bijectie van $[-\pi/2, \pi/2]$ naar $[-1, 1]$. De inverse $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ heet arcsin. De inverse-functie regel geeft $D \arcsin(\sin(x)) = 1/\cos(x) = 1/\sqrt{1 - \sin^2(x)}$, zodat met $y = \sin(x)$ geldt

$$\arcsin'(y) = 1/\sqrt{1 - \sin^2(y)}.$$

Op soortgelijke wijze vind je nos. 10, 11, 12 en 17-20 in **Table 5.1** op p. 205; de uitwerkingen staan in het boek maar het is een goede oefening om het zelf te proberen.

Ten slotte geeft het nemen van hogere afgeleiden niets nieuws, want f'' is de afgeleide van f' , etc. Zo kunnen we de ruimte $C^n(\mathbb{R})$ van functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiëren die n keer differentieerbaar zijn met continue n 'de afgeleide (zoals eerder opgemerkt: als $f \in C^n(\mathbb{R})$ dan is f automatisch continu). Dit geeft een lineaire afbeelding $D^n : C^n(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ op de voor de hand liggende wijze. Je kunt in C^n (maar niet in D^n) ook $n = \infty$ zetten: de verzameling $C^\infty(\mathbb{R})$ bestaat uit alle functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn (en dus automatisch een continue afgeleide hebben). Dit is de ‘‘mooiste’’ functieruimte die er is!

Opgaven

Om te oefenen:

1. Leid nos. 10, 11, 12 en 17-20 in **Table 5.1** op p. 205 af (zonder in het boek te kijken!).
2. §5.2.7 no. 4 uit Zorich (p. 213).
3. Bewijs (door de limiet expliciet uit te rekenen) wat je al sinds de middelbare school (en de mensheid sinds Newton in 1666) weet:

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Om in te leveren:

1. Teken de grafiek van de functie $f(x) = |x| \cdot x$. Is deze functie lineair benaderbaar in $a = 0$?
2. Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = x^2$ voor $x \in \mathbb{Q}$ en $f(x) = 0$ voor $x \notin \mathbb{Q}$. Is f differentieerbaar in $a = 0$?
3. §5.2.7 no. 2bde uit Zorich.
4. §5.2.7 no. 6.

Week 10: Differentiaalrekening II

We behandelen in het hoorcollege §5.3 m.u.v. Prop. 5.3.2.1 op p. 218.

Hoorcollege

Het Lemma van Fernet (p. 215), de Stelling van Rolle (p. 215), de Stelling van Lagrange (p. 216) staan perfect in het boek. Hierin worden de stellingen uit Calculus en de middelbare school over minima en maxima van functies precies gemaakt.

De theorie van de Taylor-reeks in §5.3.3. is van zeer groot belang. We hebben vorige week gezien dat de eerste afgeleide van een differentieerbare functie f een lineaire benadering van f geeft rond een bepaald punt $x = a$. Als f nu n keer differentieerbaar is in a , geeft de Taylor-reeks

$$f_n^a(x) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \quad (60)$$

een benadering van f in a d.m.v. een polynoom van orde n (N.B. een lineaire functie is een polynoom van orde 1). Hoe goed is deze benadering? Met andere woorden, wat weten we over

$$r_n(a, x) := f(x) - f_n^a(x) \quad (61)$$

? Merk op dat we deze vraag ook nog niet (met bewijs) hebben beantwoord voor $n = 1$.

Je krijgt het beste resultaat als je aanneemt dat $f^{(n+1)}$ bestaat op (a, x) of (x, a) (naar gelang $a < x$ of $a > x$), in welk geval je de rest-term r_n als volgt kunt schrijven (zie ook *Calculus II*, p. 597, formule (8) en Zorich, p. 221, formule (5.56)): er is een $\xi \in (a, x)$ (etc.) zodat

$$r_n(a, x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \quad (62)$$

Voor we deze stelling bewijzen (en wel op een eenvoudiger manier dan in het boek), geven we enige gevolgen. Ten eerste geeft $n = 0$ de middelwaarde stelling $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$. Ten tweede volgt een zwakkere versie die je vaak tegenkomt (met $y \in (a, x)$ als $a < x$):

$$|f(x) - f_n^a(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{y \in (x, a)} |f^{(n+1)}(y)|(x-a)^{n+1}. \quad (63)$$

Ten derde volgt onmiddellijk

$$f(x) - f_n^a(x) = O((x-a)^{n+1}); \quad (64)$$

$$f(x) - f_n^a(x) = o((x-a)^n) \quad (65)$$

voor $x \rightarrow a$. No. (65) kan overigens ook worden bewezen onder de alternatieve aanname dat $f^{(k)}(a)$ bestaat voor $k = 1, 2, \dots, n$, zie boek. Uit (65) volgt ook: als je weet dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

voor $x \rightarrow a$, dan is f minstens k keer differentieerbaar in a en geldt $c_k = f^{(k)}(a)/k!$. Ten slotte, als f oneindig vaak differentieerbaar is in $[a, x)$ of $(x, a]$ en tevens geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(a, x) = 0$, dan is (puntsgewijs voor vaste x)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k. \quad (66)$$

Dit geldt bijv. voor $f(x) = \exp(x)$ over de hele $x \in \mathbb{R}$ met willekeurige a ; gebruikelijk is $a = 0$. Zorich (p. 221) laat zien dat $r_n(0, x) \rightarrow 0$, zodat

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k. \quad (67)$$

Voor $f(x) = (1+x)^\alpha$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ en $a = 0$ gaat de rest-term alleen naar 0 voor $|x| < 1$, hetgeen o.a. de meetkundige reeks oplevert (nl. voor $\alpha = -1$). Zie ook Zorich (pp. 221-224) voor meer voorbeelden. Berucht is het *tegenvoorbeeld* $f(x) = \exp(-1/x^2)$; hier bestaan alle $f^{(k)}(0)$, welke alle gelijk aan 0 zijn. De Taylor-reeks van f is echter niet $f = 0$; de functie heeft geen Taylor-reeks rond 0. De rest-term $r_n(0, x)$ is namelijk gelijk aan $f(x)$ voor alle n , zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(0, x) = f(x) \neq 0$.

De Taylor-reeks is erg handig bij het berekenen van limieten, omdat vaak alleen de eerste term nodig is. Bij samengestelde functies van de vorm $f = g \circ h$ is het nuttig om te weten dat je de Taylor-reeks van g en h apart kunt berekenen om daarna die van h in die van g in te vullen: je hoeft dus niet alle afgeleiden van $g \circ h$ uit te rekenen. Voorbeeld: stel je weet (zie *Calculus II* en Zorich p. 230 voor meer termen)

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3); \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4),\end{aligned}$$

dan is

$$\ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)) = -\frac{1}{2}x^2 + O(x^4).$$

Ten slotte geven we een bewijs van (62) dat o.i. eenvoudiger is dan dat in het boek.

Voor $x = a$ is de zaak duidelijk, we nemen dus aan dat $x \neq a$ en voor het gemak $a < x$. Voor vaste x en a definiëren we de constante

$$M := \frac{f(x) - f_n^a(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

en de hulpfunctie

$$g(t) := f(t) - f_n^a(t) - M \cdot (t-a)^{n+1}.$$

Deze functie heeft de volgende eigenschappen:

1. $g^{(k)}(a) = 0$ voor $0 \leq k \leq n$ (want $(f_n^a)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per definitie van de Taylor-reeks);
2. $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!M$ (want $(f_n^a)^{(n+1)}(t) = 0$, opnieuw per definitie);
3. $g(x) = 0$ (per definitie van M).

Uit 1. voor $k = 0$ en 3. volgt $g(x) = g(a) = 0$. Rolle geeft nu een $\xi_1 \in (a, x)$ zodat $g'(\xi_1) = 0$. Nu geeft 1. voor $k = 1$ dat $g'(a) = 0$, dus met $g'(\xi_1) = 0$ geeft Rolle een $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ zodat $g''(\xi_2) = 0$. Dit argument gaat door tot en met $k = n$, hetgeen een $\xi_{n+1} \in (a, \xi_n)$ oplevert met $g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$. We vullen dit in eigenschap 2. van g in en vinden $0 = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) - (n+1)!M$, i.e. $M = f^{(n+1)}(\xi_{n+1})/(n+1)!$. Met de definitie van M en $\xi := \xi_{n+1}$ geeft dit precies (62).

Opgaven

Om te oefenen:

1. Neem $f(x) = \ln(1+x)$ en laat zien dat $f_n^0(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Bewijs vervolgens dat voor $-0.1 \leq x \leq 0$ geldt dat $|r_n(0, x)| \leq ((10/9)|x|)^{n+1}/(n+1)$.
2. No. 5.3.4.13a uit Zorich (p. 234).

Om in te leveren:

1. Bereken $f_n^0(x)$ voor $f(x) = 3 - 2x^2 + x^12$.
2. No. 5.3.4.3 uit Zorich (p. 232).
3. No. 5.3.4.4a uit Zorich.
4. No. 5.3.4.15 uit Zorich.

Week 11: Differentiaalrekening III, convexiteit

We behandelen in het hoorcollege §5.4 m.u.v. §5.4.5 - die paragraaf hoort niet meer thuis in het tijdperk van *Maple* en *Mathematica* en dergelijke programma's die beter en mooier grafieken kunnen plotten dan je het ooit zelf zou kunnen (zie het nieuwe derdejaarsvak *Toegepaste Wiskunde* voor het gebruik van Maple).

Hoorcollege

De stof staat prima in het boek. Op p. 238 staat een typfout in *Example 5*: $x^2 \leq f(x) \leq 2x^2$ moet zijn $x^2 \leq f(x) \leq 3x^2$. In vgl. (5.82) op p. 239 moet $f^{(n)}(x_0)$ nog worden gedeeld door $n!$. Sla *Example 6* op p. 239 gerust over, evenals *Example 7* en de ongelijkheid van Young die daar op volgt (zie eventueel de oefenopgaven). De regel van de l'Hôpital is waarschijnlijk al bekend: let vooral op de *voorwaarden*. Zo hoeven de functies f en g niet eens differentieerbaar te zijn in het punt $x = a$ waar de limiet $f(x)/g(x)$ wordt genomen.

Opgaven

Om te oefenen:

1. Bepaal of de volgende limieten bestaan en zo ja reken ze uit (bijv. met de Stelling van de l'Hôpital):

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin(\tan(x))}{\tan(\sin(x))} \quad (68)$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x} \quad (69)$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^x. \quad (70)$$

Hier betekent de notatie $x \downarrow 0$ dat de gegeven functies in de breuk zijn gedefinieerd op het open interval $(0, b)$ voor willekeurige $b > 0$.

2. Schrijf in eigen woorden het bewijs van de ongelijkheid van Hölder op dat uitgaat van de ongelijkheid van Young (i.p.v. die van Jensen, zoals in het college). Zie *Example 7* op p. 240 en het vervolg op p. 241.

Om in te leveren:

1. Bereken (bijv. met de Stelling van de l'Hôpital)

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{\frac{1}{2}\pi - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}}. \quad (71)$$

Hier betekent de notatie $x \uparrow 1$ dat de gegeven functies in de breuk zijn gedefinieerd op het open interval $(b, 1)$ voor willekeurige $0 < b < 1$.

2. No. 5.4.6.6a op p. 262 van Zorich.
3. No. 5.4.6.5 op p. 262 van Zorich. Hint: kijk goed naar het bewijs van de ongelijkheid van Jensen uit de definitie van convexiteit. Benader de getallen $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ in het functieargument $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ in deze definitie door de binaire expansie

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} + \dots$$

(met $n_{i+1} > n_i$) af te kappen. Bewijs zo eerst de eigenschap van convexiteit voor α_1, α_2 met een *eindige* binaire expansie. Gebruik ten slotte de continuïteit van f om te concluderen dat convexiteit dan voor alle $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ geldt.

Week 12: Integratietheorie

We doen §6.1 en 6.2 t/m **Theorem 4** op p. 351.

Hoorcollege

Maak in eerste instantie verschil tussen het *primitiveren* van een functie f , i.e. het vinden van F zodat $F' = f$, en het *integreren* van f over een bepaald interval, i.e. het eerst definiëren en vervolgens berekenen van $\int_a^b dx f(x)$. Deze twee zaken hangen samen omdat, zoals Newton al wist, geldt dat $F(x) = \int_a^x dy f(y) + c$ en daarmee $\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$. Maar Newton had nog geen goede definitie van het object dat hij niettemin kon uitrekenen. De eerste echte wiskundige definitie van de integraal (nogmaals: i.t.t. de primitieve) werd rond 1850 gegeven door Riemann. Rond 1900 kwam daar een algemenere definitie bij, van Lebesgue, die in het college *Maat en Integraal* wordt behandeld. We zullen de stelling van Newton in §6.3 behandelen.

Abstracte eigenschappen van de integraal

In de ideeëngeschiedenis van de wiskunde was het een belangrijk inzicht dat je niet zomaar alle functies f kunt integreren; je moet kijken naar de *klasse* $\mathcal{R}([a, b])$ van (Riemann-) integreerbare functies op zeg $[a, b]$, zoals je ook kunt kijken naar de klasse $C([a, b])$ van continue functies op $[a, b]$. En net als $C([a, b])$ is $\mathcal{R}([a, b])$ een vector-ruimte, i.e. je kunt integreerbare functies altijd bij elkaar optellen in de zin dat de som opnieuw integreerbaar is, en met een getal vermenigvuldigen zonder integreerbaarheid in gevaar te brengen. We zullen overigens zien dat $C([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$: iedere continue functie is integreerbaar over een compact interval. Het precieze verband tussen $\mathcal{R}([a, b])$ en $C([a, b])$ wordt gegeven door de *Stelling van Lebesgue* (zie p. 343):

$$\mathcal{R}([a, b]) = \mathcal{F}_b([a, b]) \cap C_{a.e.}([a, b]), \quad (72)$$

of in woorden: een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is integreerbaar (in de zin van Riemann) desda f begrensd is en ‘bijna overal’ continu. Dit begrip ‘bijna overal’ kom je veelvuldig tegen in de integratietheorie. In dit geval betekent het dat f continu is behalve misschien op een verzameling van ‘maat nul’. Wat dat laatste betekent staat op p. 342; je kunt bijvoorbeeld denken aan aftelbare deelverzamelingen van $[a, b]$.

Vanuit hoger standpunt definieert integratie een *functionaal* op $\mathcal{R}([a, b])$; dit is een afbeelding (technische gesproken gewoon een functie tussen twee verzamelingen) $\int : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f \mapsto \int_a^b dx f(x)$. Deze functionaal is *lineair*, in de zin dat $\int(f + g) = \int(f) + \int(g)$ en $\int(tf) = t \int(f)$ voor $t \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Tevens voldoet de integraal aan de belangrijke ongelijkheid (zie **Theorem 3** op p. 350)

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int_a^b dx |f(x)|. \quad (73)$$

Meer in het algemeen is de integratiefunctionaal *positief* in de zin dat als $f \geq 0$ (i.e. $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$), dan ook $\int(f) \geq 0$. Dit levert onmiddellijk de conclusie dat als $f \leq g$, dan $\int_a^b dx f(x) \leq \int_a^b dx g(x)$.

Kortom, integratie definieert een positieve lineaire functionaal op de vector-ruimte $\mathcal{R}([a, b])$.⁷ Wanneer we $[a, b]$ variëren komt nog een eigenschap van integratie aan bod: de integraal is *additief* in de volgende zin. Als we $[a, b]$ vasthouden is de functie f die je integreert de variabele. Als we echter f vasthouden en het integratiegebied variëren, kun je integratie zien als een functie van de verzameling van alle gesloten intervallen $I \subset E \subset \mathbb{R}$ (waarbij E een gesloten interval zodat $f \in \mathcal{R}(E)$) naar \mathbb{R} . Schrijven we nu $\int_f(I)$ voor $\int_I f$, dan geldt de additiviteitseigenschap

$$\int_f(I \cup J) = \int_f(I) + \int_f(J) \quad (74)$$

⁷Het is zelfs zo dat $\mathcal{R}([a, b])$ een *algebra* is onder puntsgewijze vermenigvuldiging, i.e. als $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ dan ook fg , met $(fg)(x) := f(x)g(x)$. Zie voor al deze eigenschappen **Proposition 4** op p. 340.

als $I \cap J = \emptyset$. Dit is zelfs waar voor *afteelbaar* veel disjuncte intervallen $\{I_n\}_{n=1}^\infty$, i.e.

$$\int_f (\cup_n I_n) = \sum_n \int_f (I_n) \quad (75)$$

als $I_j \cap I_k = \emptyset$ voor alle $j \neq k$.

Definitie van de Riemann-integraal

Maar wat is nu deze vector-ruimte $\mathcal{R}([a, b])$ en wat is precies de integratie-functionaal $\int : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$?

Bedenk nog eens (zie Week 8) dat een *base* \mathfrak{B} in een verzameling X een verzameling van niet-lege deelverzamelingen van X is zdd dat als $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, er $B_3 \in \mathfrak{B}$ is met $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Als $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ betekent $\lim_{\mathfrak{B}} \varphi(x) = A$ voor $A \in \mathbb{R}$ dat voor iedere open omgeving $V(A)$ van A er een $B \in \mathfrak{B}$ is zodat $\varphi(B) \subset V(A)$.

Om de Riemann-integraal $\int_a^b dx f(x)$ voor vaste f en vaste a en b te definiëren nemen we voor X de verzameling $\mathcal{P}_{[a,b]}$ van alle partities van $[a, b]$ met voorkeurspunten. Een element P van $\mathcal{P}_{[a,b]}$ is dus een verzameling punten $\{x_0, \dots, x_n\}$ met $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ plus punten $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ voor alle $i = 1, \dots, n$. De *maze* $\lambda(P)$ van zo'n P is

$$\lambda(P) := \sup_i \{x_i - x_{i-1}\}. \quad (76)$$

De base

$$\lambda(P) \rightarrow 0 := \{B_\delta, \delta > 0\} \quad (77)$$

bestaat nu uit alle deelverzamelingen $B_\delta \subset \mathcal{P}_{[a,b]}$ bestaande uit partities (met voorkeurspunten) met maze kleiner dan δ , i.e.

$$B_\delta := \{P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \mid \lambda(P) < \delta\}. \quad (78)$$

Voor iedere P bestaat de uitdrukking

$$\Phi(P) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (79)$$

met $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$. We zeggen nu dat $f \in \mathcal{R}([a, b])$, ofwel “ f is Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ ” als

$$\int_a^b dx f(x) := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \Phi(P) \quad (80)$$

bestaat (en, voor alle duidelijkheid, niet gelijk is aan $\pm\infty$). Volgens de definitie van een limiet over een base en het Cauchy-criterium voor convergentie (**Theorem 4** op p. 132) betekent dit voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zdd

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x'_i - \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \Delta x''_i \right| < \varepsilon \quad (81)$$

voor alle partities P', P'' met $\lambda(P') < \delta$ en $\lambda(P'') < \delta$.

Hieruit volgen vrij eenvoudig (zie boek) een noodzakelijk en een desda cirterium voor $f \in \mathcal{R}([a, b])$ (en dus voor het bestaan van de limiet in (80)):

- $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow f$ begrensd op $[a, b]$;
- $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Leftrightarrow \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sup_{x,y \in \Delta_i} |f(x) - f(y)| f(\xi_i) \Delta x_i = 0$ met $\Delta_i := [x_{i-1}, x_i]$.

Een continue functie voldoet eenvoudig aan het tweede criterium, zodat $C([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$. Met iets meer werk volgt uit deze criteria uiteindelijk ook (72). Het eerste criterium verbaast je misschien, want is het niet zo dat $\int_0^1 dx x^{-1/2}$ bestaat, terwijl de functie $x \mapsto x^{-1/2}$ *onbegrensd* is

op $[0, 1]$? Inderdaad, volgens de definitie bestaat de integraal niet als Riemann-integraal, maar wel als *oneigenlijke (improper)* Riemann-integraal. We gaan daar in §6.5 mee aan de slag.

Een iets andere definitie maakt geen gebruik van voorkeurspunten en is eigenlijk fraaier dan (80). Deze maakt gebruik van van de uitdrukkingen

$$\underline{\Phi}(P) := \sum_{i=1}^n \inf_{x \in \Delta_i} \{f(x)\} \Delta x_i; \quad (82)$$

$$\overline{\Phi}(P) := \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \Delta_i} \{f(x)\} \Delta x_i, \quad (83)$$

vgl. (79). Dan geldt:

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \Leftrightarrow \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{\Phi}(P) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \overline{\Phi}(P). \quad (84)$$

In dat geval geldt zoals verwacht, vgl. (80),

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{\Phi}(P) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \overline{\Phi}(P) = \int_a^b dx f(x). \quad (85)$$

Dit verklaart ook waarom de keuze van de voorkeurspunten niet uitmaakt.

Om de grenzen van het integreerbaarheidsbegrip te testen bedachten Dirichlet en Riemann de functies \mathcal{D} en \mathcal{R} , gedefinieerd door $\mathcal{D}(x) = \mathcal{R}(x) = 0 \forall x \notin \mathbb{Q}$ en $\mathcal{D}(x) = 1$ voor $x \in \mathbb{Q}$ maar $\mathcal{R}(x) = 1/n(x)$ voor $x \in \mathbb{Q}$, waar $x = m/n$ zonder ggd. We zijn deze functies al eerder tegengekomen (zie p. 158), waarbij bleek dat \mathcal{D} nergens continu is, terwijl \mathcal{R} continu is in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nu blijkt dat \mathcal{D} ook al niet integreerbaar is over enig interval,⁸ terwijl \mathcal{R} dat wel is (zie opgave).

Opgaven

Om te oefenen:

1. Vind primitieven van de functies $x \mapsto 1/(x \ln(x))$ en $x \mapsto \sqrt{1 + \cos(x)}$.
2. Bewijs Lemma 3 op p. 354 zonder in het boek te kijken.

Om in te leveren:

1. (a) Bewijs uit het criterium (84) voor integreerbaarheid (oftewel **Proposition 3** op p. 339 van Zorich) dat de functie \mathcal{D} *niet* integreerbaar is over enig interval $[a, b]$.
 (b) Bewijs direct uit de definitie (80) van integreerbaarheid dat de functie \mathcal{R} *wel* integreerbaar is over ieder interval $[a, b]$. Hint: gebruik de informatie die in *Example 12* op p. 158 staat.
2. No. 6.2.4.1a uit Zorich, p. 358.
3. Definieer de functie $\text{li}(x)$ als de primitieve van $1/\ln(x)$, waarbij de integratieconstante wordt vastgelegd door $\lim_{x \rightarrow 0} \text{li}(x) = 0$. Definieer de functie $\text{Ei}(x)$ als de primitieve van $\exp(x)/x$, waarbij de integratieconstante wordt vastgelegd door $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Ei}(x) = 0$. Bewijs dat $\text{li}(x) = \text{Ei}(\ln x)$.

⁸tenminste niet in de zin van Riemann; in de zin van Lebesgue is \mathcal{D} wel degelijk integreerbaar, met integraal 0.

Week 13: Integratietheorie II

We doen §6.3 en delen van §6.4. Over deze laatste paragraaf gaan geen opgaven en de stof is ook niet tentamineerbaar, maar wel zeer elegant en belangrijk in de ideeëngeschiedenis van de toegepaste wiskunde.

Hoorcollege

Integraal en afgeleide

De stof staat goed in het boek. De sterkste stelling in de richting van: *als* $F(x) := \int_a^x dt f(t)$ *dan* *geldt* $F' = f$ is een verscherping van **Theorem 1'** op p. 361:

Als $f \in \mathcal{R}([a, b])$, *dan is iedere primitieve van* f *van de vorm* $F(x) := \int_a^x dt f(t) + C$.
De functie F *is continu (ook als* f *dat niet is).*

Als je (72) bekijkt, zie je dat t.o.v. de formulering van Zorich f inderdaad begrensd moet zijn, maar dat f slechts ‘bijna overal’ continu hoeft te zijn (continu buiten een eindig aantal punten is daar een speciaal geval van). Het begrip ‘primitieve’ is dan iets ruimer dan je gewend bent: we noemen F een primitieve van f als $F'(x) = f(x)$ voor ‘bijna alle’ x .

Het bewijs van deze stelling gaat precies hetzelfde als in het boek, en wel door de stelling te bewijzen in alle punten waar f continu is (over de andere punten, waar f dus discontinu is, doet de stelling ook geen uitspraak!). Als f continu is in x volgt de afchatting (6.42), oftewel

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) + h^{-1} \int_x^{x+h} dt \Delta(t)$$

met $\Delta(t) := f(t) - f(x)$. Met de afchatting midden op p. 360 en de eerste inleveropgave volgt dat de tweede term in het rechterlid naar 0 gaat voor $h \rightarrow 0$, zodat $F'(x) = f(x)$ per definitie van de afgeleide. We weten nu dus dat F een primitieve van f is. Stel nu dat F_1 en F_2 primitieven van f zijn. Dan geldt $(F_1 - F_2)'(x) = f(x) - f(x) = 0$ *buiten een verzameling van maat nul*. Stel $G' = 0$. De middelwaardstelling (zie Week 10) geeft dat er een $\xi \in (a', b')$ is met $G(b') - G(a') = G'(\xi)(b - a) = 0$. Dit geldt voor alle a', b' zdd $[a', b'] \subset [a, b]$, en er volgt $G(b') = G(a')$, zodat G constant is *buiten een verzameling van maat nul*. Dan geldt daar ook $F_1'(x) = F_2'(x) + C$. Maar F_1 en F_2 zijn continu, en dus geldt deze gelijkheid voor alle x .

‘Alles’ volgt uit bovenstaande stelling:

1. De Newton–Leibniz formule

$$\int_a^b dt f(t) = F(b) - F(a) \tag{86}$$

volgt omdat $F(b) = \int_a^b dt f(t) + C$, waarbij de keuze $b = a$ levert $C = F(a)$.

2. De formule

$$\int_a^b dx uv' = - \int_a^b dx u'v + u(b)v(b) - u(a)v(a) \tag{87}$$

voor partiële integratie, die direct uit (86) volgt;

3. De formule

$$r_n(a, x) = \frac{1}{n!} \int_a^x dt f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \tag{88}$$

voor de rest-term van een Taylor-expansie, vgl. (62). Deze volgt door herhaalde toepassing van (87) uit (86), herschreven als

$$f(x) - f(a) = \int_a^x dt f'(t) = - \int_a^x dt f'(t)(x-t)';$$

4. De substitutieformule

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} dx f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} dt f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad (89)$$

die geldig is voor $f \in \mathcal{R}([a, b])$ en $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar (de conditie in **Theorem 3** op p. 365 dat φ strict monotoon moet zijn is niet nodig). Deze formule volgt uit de opmerking dat ald F een primitieve van f is, $F \circ \varphi$ een primitieve is van $\varphi' \cdot f \circ \varphi$ (beide in generaliseerde zin, zoals boven uitgelegd).

Newton berekende alle integralen $\int_a^b dt f(t)$ door f in een Taylor-reeks rond een geschikte x_0 te ontwikkelen (zie Week 10) en termsgewijs te integreren. Om deze procedure te rechtvaardigen is het begrip uniforme convergentie van integralen nodig, dat in Analyse 2 aan bod komt. Als je de Taylor-reeks echter afbreekt en de rest-term afschat als $|r_n(x_0, x)| \leq C$, dan is de fout

$$\left| \int_a^b dt (f(t) - f_n^{x_0}(t)) \right| \leq \int_a^b dt |f(t) - f_n^{x_0}(t)| \leq |b - a|C.$$

Zie bijvoorbeeld *Example 5* op p. 369.

Wanneer kun je de integraalrekening toepassen?

Waarom wordt de oppervlakte onder een grafiek gegeven door een integraal? Waarom kunnen we de lengte van een kromme uitrekenen met behulp van een integraal? Waarom ook de inhoud van een omwentelingslichaam? Op dergelijke vragen bestaat een systematisch antwoord.

We hebben in Week 12 al de additiviteitseigenschap (74) van de integraal gezien. Een speciaal geval is

$$I(\alpha, \gamma) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma), \quad (90)$$

met

$$I(\alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\beta} dx f(x) \quad (91)$$

voor $f \in \mathcal{R}([a, b])$, voor alle $(\alpha, \gamma) \subset [a, b]$ en $\beta \in (\alpha, \gamma)$.

Vergeet nu even (91). Een functie I met als domein de open samenhangende deelintervallen van $[a, b]$ en beeld \mathbb{R} noemen we een *additieve intervalfunctie* op $[a, b]$. Wanneer is zo'n functie van de vorm (91) voor een bepaalde functie $f \in \mathcal{R}([a, b])$? Niet altijd! Bekijk maar eens *Example 2* op p. 375. De volgende stelling (**Proposition 1** op p. 376) geeft een voldoende voorwaarde:

Stel dat I een additieve intervalfunctie op $[a, b]$ is en dat er een $f \in \mathcal{R}([a, b])$ is zodat

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leq I(\alpha, \beta) \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \quad (92)$$

voor ieder gesloten interval $[\alpha, \gamma] \subseteq [a, b]$. Dan geldt (91).

Zie Zorich, p. 376 voor het bewijs.

Het eenvoudigste voorbeeld is inderdaad de oppervlakte onder de grafiek van $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; je ziet dan onmiddellijk uit een plaatje dat (92) geldt met $f = g$. Dit argument vormt de uiteindelijke rechtvaardiging van het werk van Newton en Leibniz (en in zekere zin ook Archimedes). In het boek vind je in §6.4 ook een aantal andere interessante voorbeelden.

Opgaven

Om te oefenen:

1. Bewijs (6.46) op p. 364 van Zorich m.b.v partiële integratie, zonder in het boek te kijken.
2. No. 6.3.6.1b uit Zorich, p. 371 (doe deze na bestudering van inleveropgave 2).

Om in te leveren:

1. (Naar aanleiding van het bewijs van **Lemma 1** op p. 361): Definieer $I(h) := [x, x + h]$ voor $h > 0$, $\Delta(t) := f(t) - f(x)$ voor vaste x en variabele t , en $M(h) := \sup_{t \in I(h)} |\Delta(t)|$. Laat uit de aanname dat f continu is in x zien dat $\lim_{h \rightarrow 0} M(h) = 0$.
2. No. 6.3.6.1a uit Zorich, p. 371. (N.B. deze opgave slaat eerder op §6.2, i.h.b. op de definitie van de Riemann-integraal).
3. Vind een primitieve van de functie $f(x) = x^2(1 + x^3)^5$ en bereken zo $\int_0^1 dx f(x)$:
 - (a) M.b.v. uitschrijven en/of het binomium van Newton en termgewijze integratie;
 - (b) M.b.v. een slimme substitutie.
4. De Γ -functie van Euler is gedefinieerd als

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t}.$$

Laat zien dat voor $x = n \in \mathbb{N}$ geldt $\Gamma(n + 1) = n!$.

Week 14: Oneigenlijke integralen

We doen §6.5 van Zorich, m.u.v. de Stelling van Abel–Dirichlet.

Hoorcollege

Een vreemde eigenschap van integratie volgens Riemann is dat een integraal als $\int_0^1 dx x^{-1/2}$ bestaat, terwijl $f(x) = x^{-1/2}$ niet in $\mathcal{R}([0, 1])$ ligt (want anders zou de functie f begrensd zijn op $[0, 1]$, wat niet het geval is). In de Riemannse theorie wordt dit probleem opgelost door het begrip *oneigenlijke integraal*. We merken op dat $f \in \mathcal{R}([a, 1])$ voor alle $a > 0$ en definiëren

$$\int_0^1 dx x^{-1/2} := \lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 dx x^{-1/2}, \quad (93)$$

in het geval dat deze limiet bestaat (wat dus zo is).

Meer in het algemeen bekijken we $\int_a^\omega dx f(x)$ wanneer $f(\omega)$ niet bestaat maar $f \in \mathcal{R}([a, b])$ voor alle $b < \omega$, of $\int_\omega^b dx f(x)$ wanneer $f(\omega)$ eveneens niet bestaat maar $f \in \mathcal{R}([a, b])$ voor alle $a > \omega$ (zoals in het voorbeeld). We definiëren dan

$$\int_a^\omega dx f(x) := \lim_{b \uparrow \omega} \int_a^b dx f(x); \quad (94)$$

$$\int_\omega^b dx f(x) := \lim_{a \downarrow \omega} \int_a^b dx f(x), \quad (95)$$

als deze limieten bestaan.⁹ Deze definities gelden ook voor $\omega = \pm\infty$. Als er problemen zijn met beide integratiegrenzen splitsen we de integraal op, zoals in

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} dx f(x) := \lim_{a \downarrow \omega_1} \int_a^c dx f(x) + \lim_{b \uparrow \omega_2} \int_c^b dx f(x). \quad (96)$$

Het al dan niet bestaan van deze limieten geeft geen aanleiding tot nieuwe theorie, want het gaat hier om een speciaal geval van limieten van functies, zoals behandeld in Week 7. Neem namelijk $F(x) = \int_a^x dt f(t)$, dan is (94) niets anders dan $\lim_{x \rightarrow \omega} F(x)$, enzovoort. De gebruikelijke convergentiecriteria (zie Week 8, pp. 29–30 van deze Leidraad) zijn dus van toepassing. Vertaald naar de situatie waar we in zitten luiden deze criteria voor het bestaan van bijvoorbeeld $\int_a^\omega dx f(x)$ als volgt:

1. *Noodzakelijke én voldoende voorwaarde van Cauchy:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b \in (a, \omega) : \left| \int_{b_1}^{b_2} dx f(x) \right| < \varepsilon \forall b_1, b_2 > b.$$

2. *Noodzakelijke voorwaarde:* de functie $F(x) = \int_a^x dt f(t)$ is begrensd op $[a, \omega)$.
3. *Voldoende voorwaarde:* F is monotoon stijgend en van boven begrensd of monotoon dalend en van onder begrensd.

Speciaal voor integratietheorie is dat we 2 en 3 kunnen combineren tot een desda criterium. Als namelijk $f \geq 0$, dan is F automatisch monotoon stijgend, zodat voor positieve f volgt:

de functie $x \mapsto \int_a^x dt f(t)$ is begrensd op $[a, \omega)$ desda $\int_a^\omega dx f(x)$ bestaat.

En dit is waar voor willekeurige f als we f door $|f|$ vervangen; we kunnen dan officieel zeggen:

⁹N.B. Omdat F continu is (zie vorige week), is de definitie van een oneigenlijke Riemann-integraal consistent met de definitie van een Riemann-integraal, als het toevallig zo mocht zijn dat $f \in \mathcal{R}([a, \omega])$ of $f \in \mathcal{R}([\omega, b])$.

$\int_a^\omega dx f(x)$ is absoluut convergent (i.e. $\int_a^\omega dx f(x)$ bestaat) desda de functie $x \mapsto \int_a^x dt |f(t)|$ begrensd is op $[a, \omega)$.

Een onmiddellijk gevolg is: als $0 \leq f \leq g$ en $\int_a^\omega dx g(x)$ bestaat, dan bestaat ook $\int_a^\omega dx f(x)$. Kleine variatie hierop: als $f \geq 0$ en monotoon dalend, dan zijn $\int_1^\infty dx f(x)$ en \sum_1^∞ ofwel beide convergent ofwel beide divergent. Een ander nuttig resultaat, dat direct uit de definitie van een oneigenlijke Riemann-integraal volgt, is dit: als $f \sim g$ voor $x \rightarrow \omega$ dan bestaan $\int_a^\omega dx f(x)$ en $\int_a^\omega dx g(x)$ beide wel of beide niet.

We vermelden een ‘metastelling’: alle ware uitspraken over Riemann integralen zijn ook waar voor oneigenlijke Riemann integralen: lineariteit in f , additiviteit in I , afschatting $|\int_a^\omega dx f(x)| \leq \int_a^\omega dx |f(x)|$, substitutieformule, en partiële integratie. Dat laatste werkt zelfs beter als $\omega = \pm\infty$ omdat de bijbehorende stokterm $u \cdot v(\infty)$ altijd 0 is.

Ten slotte is er soms een uitweg als een integraal zelfs niet in oneigenlijke zin bestaat. Dan is de *principal value* $P \int$ (ook wel \int met een streepje erdoor) soms gedefinieerd.

Opgaven

Om te oefenen:

1. Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ bestaan de oneigenlijke integralen $\int_0^1 dx x^{-\alpha}$, $\int_1^\infty dx x^{-\alpha}$ en $\int_0^\infty dx x^{-\alpha}$?
2. Bewijs alle \sim resultaten in *Example 4 t/m 10* op pp. 401–403.
3. No. 6.5.4.5a uit Zorich, p. 409.

Om in te leveren:

1. Stel dat $f \sim g$ voor $x \rightarrow \infty$ en dat $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ voor alle $b < \infty$. Laat zien dat $\int_a^\infty dx f(x)$ en $\int_a^\infty dx g(x)$ beide convergeren of beide divergeren.
2. No. 6.5.4.2b uit Zorich, p. 408.
3. No. 6.5.4.5b uit Zorich, p. 409.

Tentamenvragen

1. Een *relatie* tussen twee verzamelingen X en Y is per definitie een deelverzameling $R \subset X \times Y$. Wanneer noemen een relatie een:

- Partiële ordening;
- Equivalentierelatie;
- Functie,

en wanneer heet een functie:

- injectief;
- surjectief;
- bijectief.

Geef van al deze zes begrippen een voorbeeld met $X = Y = \mathbb{R}$.

2. Bewijs de uniciteit van de reële getallen: als we twee constructies van \mathbb{R} hebben, genaamd $(X_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ en $(X_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$, waarbij $X_i, +_i, \cdot_i, \leq_i$ voor $i = 1, 2$ aan alle axioma's voldoet zoals gegeven in §2.1.1, dan bestaat er een bijectie $f : X_1 \rightarrow X_2$ met de eigenschappen:

$$\begin{aligned} f(x +_1 y) &= f(x) +_2 f(y); \\ f(x \cdot_1 y) &= f(x) \cdot_2 f(y); \\ x \leq_1 y &\Rightarrow f(x) \leq_2 f(y). \end{aligned}$$

3. Bewijs de Stelling van Weierstrass: een continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ op een begrensde gesloten interval is begrensd en neemt haar maximum ook aan op dit interval. Begin met het Volledigheidsaxioma (no. IV op p. 38 van Zorich), leid daaruit het Nested Interval Lemma af (p. 71), daaruit het Finite Covering Lemma (p. 71), en daaruit weer de gevraagde stelling.
4. Je kent de definities $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ en $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. De bedoeling van deze opgave is de tweede uitdrukking uit de eerste af te leiden, i.e. om te bewijzen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! \equiv e. \quad (97)$$

We schrijven $t_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ en $s_n := \sum_{k=0}^n 1/k!$.

- (a) Geef de binomiaalexpanctie (i.e. (5.75) op p. 224 van Zorich) en laat daarmee zien dat $t_n \leq s_n$.
- (b) Geef de definitie van \limsup en bewijs uit (a) dat $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq e$.
- (c) Geef de definitie van \liminf en bewijs dat $\liminf_{n \rightarrow \infty} t_n \geq s_n$.
- (d) Leid hieruit (97) af.
5. Geef de noodzakelijke en voldoende voorwaarde van Cauchy voor convergentie van respectievelijk rijen en functies en laat zien hoe beide voorwaarden op één manier kunnen worden geformuleerd m.b.v. limieten over een base. Leg hierbij uit wat een base en een limiet over een base in het algemeen zijn, en welke basen gekozen hier moeten worden.
6. Bewijs de Kettingregel voor differentiatie: $D(g \circ f) = Df \cdot (Dg) \circ f$, ofwel $g(f(x))' = f'(x)g'(f(x))$.
7. **Problem 3** op p. 546 van Zorich (wordt op tentamen uitgeschreven uiteraard). Laat precies zien hoe de "error" die je hebt gevonden in het "bewijs" het voorbeeld verklaart waar de opgave mee begint.

8. Geef de Taylor-reeks van een gladde (i.e. oneindig vaak differentieerbare) functie tot orde n en bewijs de twee uitdrukkingen voor de rest-term:

$$r_n(a, x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1};$$
$$r_n(a, x) = \frac{1}{n!} \int_a^x dt f^{(n+1)}(t)(x-t)^n.$$

9. Geef de definitie van een Riemann-integreerbare functie op een begrensd interval $[a, b]$ en bewijs dat iedere functie die continu is op $[a, b]$ ook Riemann-integreerbaar is.
10. Stel $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Bewijs dat iedere primitieve van f van de vorm $F(x) := \int_a^x dt f(t) + C$ is en dat de functie F continu is (ook als f dat niet is).