

Explanation of §12.2 of Zorich Vol. II

1 Oriëntatie van \mathbb{R}^k

Kies cartesische coördinaten (x_1, \dots, x_k) op \mathbb{R}^k . Iemand anders kiest cartesische coördinaten (y_1, \dots, y_k) , die met de eerste keus samenhangen via een inverteerbare lineaire transformatie $y = ax$, waarbij a een $k \times k$ matrix is. We zeggen dat de twee stelsels *equivalent* zijn als $\det(a) > 0$; de enige andere mogelijkheid is $\det(a) < 0$, in welk geval de twee stelsels dus niet equivalent zijn.

Een *oriëntatie* van \mathbb{R}^k is een equivalentieklasse van cartesische coördinatenstelsels op \mathbb{R}^k . Er zijn dus precies twee oriëntaties van \mathbb{R}^k . Een oriëntatie is gegeven door een keuze van een bepaald stelsel, gezien als representant van zijn equivalentieklasse.

Je kunt dit ook formuleren in termen van assenstelsels (*frames*), zie boek.

2 Oriëntatie van een oppervlak in \mathbb{R}^n met één kaart

Stel S is een k -dimensionaal oppervlak in \mathbb{R}^n met de speciale eigenschap dat er een atlas van S bestaat met slechts één kaart $\varphi_a : \mathbb{R}^k \rightarrow S$. Er kan dan best een andere kaart $\varphi_b : \mathbb{R}^k \rightarrow S$ bestaan die het oppervlak eveneens beschrijft. Omdat zowel φ_a als φ_b diffeomorfismen zijn (i.e. oneindig vaak differentieerbare afbeeldingen die inverteerbaar zijn met oneindig vaak differentieerbare inverse), is $\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ een diffeomorfisme van \mathbb{R}^k . Om een verband met het voorafgaande te leggen nemen we de afgeleide

$$(\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a)'(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (1)$$

in een vast punt $x \in \mathbb{R}^k$. Uit de algemene theorie van differentiatie weten we dat dit een lineaire afbeelding is. Omdat $\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a$ inverteerbaar is, is ook deze lineaire afbeelding inverteerbaar (omkering van de inverse functie stelling). De afbeelding (1) is intrinsiek gedefinieerd, maar een concrete matrix-vorm hangt af van de keuze van een basis in \mathbb{R}^k . De determinant van (1) is echter onafhankelijk van de basiskeuze: als $\{e_i\}_{i=1}^k$ een bepaalde orthonormale basis is en $\{u_i\}_{i=1}^k$ een andere orthonormale basis, bestaat een inverteerbare matrix b zodat $u_i = \sum_j b_{ij} e_j$, met $b^{-1} = b^T$. Laat $a^{(e)}$ een matrix van een lineaire afbeelding zijn t.o.v. de basis $\{e_i\}_{i=1}^k$, en evenzo $a^{(u)}$ de matrix van a t.o.v. de basis $\{u_i\}_{i=1}^k$. Dan geldt $a_{ij}^{(e)} = (e_i, a e_j)$ etc., waarbij $(-, -)$ het standaard inproduct in \mathbb{R}^k is. Dit geeft

$$a^{(u)} = b a^{(e)} b^{-1},$$

en daarmee

$$\det(a^{(u)}) = \det(b a^{(e)} b^{-1}) = \det(b) \det(a^{(e)}) \det(b^{-1}) = \det(a^{(e)}),$$

want $\det(b^{-1}) = \det(b)^{-1}$. We kunnen dus ondubbelzinnig spreken van $\det(a)$ zonder vermelding van de (orthonormale) basis ten opzichte waarvan de determinant wordt berekend.

We krijgen zo een functie

$$x \mapsto \det((\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a)'(x)) \quad (2)$$

van \mathbb{R}^k naar $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Omdat deze functie continu is (vanwege de continuïteit van φ_a en φ_b alsmede hun inversen) en nergens 0, is het teken constant op \mathbb{R}^k . Als het teken positief is, noemen we de kaarten φ_a en φ_b *equivalent*.

Een *oriëntatie* van S is een equivalentieklasse van kaarten $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow S$ onder deze equivalentierelatie. Opnieuw zien we dat S precies twee oriëntaties heeft; een gegeven kaart bepaalt (als representant van zijn equivalentieklasse) een oriëntatie.

3 Oriëntatie van een samenhangend oppervlak in \mathbb{R}^n

Laat nu S een willekeurig samenhangend k -dimensionaal oppervlak in \mathbb{R}^n zijn.¹ T.o.v. de vorige twee situaties doet zich nu het verschijnsel voor, dat S helemaal geen oriëntatie hoeft te hebben! Een voorbeeld is de Möbius-band (zie boek).

Stel dat $\{\varphi_a : \mathbb{R}^k \rightarrow U_a \subset S\}_{a \in A}$ een atlas van S is; dit betekent dat iedere φ_a een diffeomorfisme is met de eigenschap dat de rang van $\varphi'_a(x)$ in iedere $x \in \mathbb{R}^k$ gelijk is aan k . Stel nu dat $U_{ab} := U_a \cap U_b \neq \emptyset$. Dan is $\varphi_a^{-1}(U_{ab}) \subset \mathbb{R}^k$ open (want φ_a is continu en U_{ab} is open als doorsnede van twee open verzamelingen) en evenzo $\varphi_b^{-1}(U_{ab}) \subset \mathbb{R}^k$. De afbeelding

$$\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a : \varphi_a^{-1}(U_{ab}) \rightarrow \varphi_b^{-1}(U_{ab})$$

is dus een afbeelding tussen twee open deelverzamelingen van \mathbb{R}^k .

We maken nu net als boven de functie (2), deze keer uitsluitend gedefinieerd voor $x \in \varphi_a^{-1}(U_{ab})$ (en niet meer voor alle $x \in \mathbb{R}^k$), opnieuw van \mathbb{R}^k naar $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. We eisen nu dat de atlas zo gekozen is, dat U_{ab} altijd samenhangend (of leeg) is. De gegeven functie is dan ofwel positief, ofwel negatief definit. Als de functie positief (2) is, zeggen we dat de twee kaarten U_a en U_b *consistent* zijn. Als het teken van (2) daarentegen negatief is, zijn de kaarten juist *inconsistent*. Als $U_a \cap U_b$ leeg is zijn de twee kaarten per definitie consistent.

Het oppervlak S heet nu *oriënteerbaar* als S een atlas met consistente kaarten heeft. In dat geval is een *oriëntatie* van S een equivalentieklasse van consistente atlassen, waarbij we twee consistente atlassen $\{\varphi_a : \mathbb{R}^k \rightarrow U_a \subset S\}_{a \in A}$ en $\{\psi_b : \mathbb{R}^k \rightarrow V_b \subset S\}_{b \in B}$ equivalent noemen als iedere keer dat $U_a \cap V_b \neq \emptyset$ geldt dat de functie

$$x \mapsto \det((\psi_b^{-1} \circ \varphi_a)'(x)) \quad (3)$$

positief is. En wederom zien we dat S , gegeven dat het oriënteerbaar is, over precies twee oriëntaties beschikt (opgave).

4 Oriëntatie van een willekeurig oppervlak in \mathbb{R}^n

Dit staat keurig in het boek: als S niet samenhangend is zeggen we dat S oriënteerbaar is als iedere component² van S oriënteerbaar is, en een oriëntatie van S wordt dan gegeven door de keuze van een oriëntatie van iedere component S afzonderlijk. Als S uit l componenten bestaat, heeft S dus 2^l oriëntaties. Pik in 't is winter.

¹Een topologische ruimte X heet *samenhangend* als de enige deelverzamelingen van X die tegelijk open en gesloten zijn, \emptyset en X zijn. Voor een oppervlak S is deze definitie equivalent met de uitspraak dat ieder paar punten in S verbonden kan worden door een continu pad in S , i.e. een continue functie $c : [0, 1] \rightarrow S$.

²Een component van een topologische ruimte X is een samenhangende deelverzameling van X die zowel open als gesloten is. De ruimte X splitst dan op als de vereniging van zijn componenten.