

RADBOUD UNIVERSITY NIJMEGEN

Radboud University



FACULTEIT DER FILOSOFIE, THEOLOGIE EN RELIGIEWETENSCHAPPEN (FFTR)

Determinisme binnen de Algemene Relativiteitstheorie

UITBREIDINGEN VAN MAXIMALE CAUCHY-ONTWIKKELINGEN EN DE CONSEQUENTIES OP
DETERMINISME

SCRIPTIE TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD 'MASTER OF ARTS' IN DE FILOSOFIE
AAN DE RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN

Auteur:
Pjotr KOSTER

Scriptie begeleider:
Prof. Dr. Klaas LANDSMAN
Woordenaantal: 13851

1 juni 2025

Hierbij verklaar en verzeker ik, Pjotr Koster, dat voorliggende eindwerkstuk getiteld Determinisme binnen de Algemene Relativiteitstheorie, zelfstandig door mij is opgesteld, dat geen andere bronnen en hulpmiddelen dan die door mij zijn vermeld zijn gebruikt en dat de passages in het werk waarvan de woordelijke inhoud of betekenis uit andere werken – ook elektronische media is genomen door bronvermelding als ontlening kenbaar gemaakt worden. Nijmegen, 29 mei 2025.

Inhoudsopgave

1	Introductie	3
2	Definitie van ruimte-tijden	6
2.1	Modellen van ruimte-tijden	6
2.1.1	Manifolds, afstanden en coördinaten	6
2.1.2	De causale structuur van ruimte-tijden	8
2.1.3	Zwaartekracht binnen ruimte-tijden	12
2.2	Diffeomorfismen en isometrieën	13
2.3	Perspectieven op ruimte-tijden	15
3	Determinisme	17
3.1	Laplace en determinisme	17
3.2	Popper en determinisme	17
3.3	Butterfield en determinisme	18
3.4	Halvorson, Manchak en Weatherall over determinisme	20
4	Het beginwaardeprobleem binnen ART	22
4.1	Formulering van het beginwaardeprobleem	22
4.2	Uitbreidingen van MGH	24
4.2.1	Singulariteiten en zwarte gaten	24
4.2.2	Kruskal uitbreiding voor niet-roterende zwarte gaten	27
4.2.3	Boyer-Lindquist/Carter uitbreiding voor roterende zwarte gaten	27
4.3	Determinisme bij het beginwaardeprobleem	29
5	Discussie	30
5.1	Kritiek 1: Groter beginsegment	30
5.2	Kritiek 2: Empirische status van uitbreidingen	31
5.3	Kritiek 3: Onfysische ruimte-tijden	31
5.4	Kritiek 4: Onrealistische idealisaties	32
6	Conclusie	33

1 Introductie

Ligt de toekomst van het universum vast? Is het lot van de wereld al gedetermineerd door het verleden? Dit zijn fundamentele vragen waar mensen zich al millennia mee bezig houden. Er is een rijke geschiedenis rond de vraag of wetenschappelijke theorieën deterministisch zijn of zouden moeten zijn. De discussie omtrent determinisme binnen de natuurkunde nam sterk toe in de 20e eeuw door de opkomst van de kwantummechanica. Deze theorie beschrijft systemen op een subatomaire schaal en wijkt sterk af van de voorgaande “klassieke mechanica” [1]. De Kopenhagen interpretatie van de kwantummechanica was opgesteld in 1927 en stelde dat sommige gebeurtenissen niet gedetermineerd zijn.¹ De plaats van een deeltje dat niet geobserveerd wordt, wordt namelijk beschreven als een verzameling van mogelijke posities. Als de positie van het deeltje geobserveerd wordt, dan wordt een van de mogelijke posities “gekozen” [2]. Volgens de Kopenhagen interpretatie was deze keuze willekeurig en kon dus niet van te voren bepaald worden. Er waren ook interpretaties van de kwantummechanica die vasthielden aan determinisme, zoals de verborgen-variabelen interpretaties of de piloot-golf theorie. Na experimenten in de jaren 70 gebaseerd op Bells werk werd de meest gangbare interpretatie van de kwantummechanica de Kopenhagen interpretatie [3, 4]. Deze experimenten sluiten determinisme niet geheel uit binnen de kwantummechanica, maar wel de compatibiliteit van determinisme met lokaliteit of statistische onafhankelijkheid.² Tegenwoordig is er daarom nog steeds een kleine groep (super)deterministen die volhoudt dat er een deterministische beschrijving is van de kwantummechanica [5].

De discussie bij kwantummechanica laaide op, omdat in de 18e en 19e eeuw wetenschappers in het algemeen geloofden dat natuurkundige theorieën deterministisch waren [6]. Echter, recente discussies en tegenvoorbeelden, zoals Nortons koepel, laten zien dat dit beeld niet vanzelfsprekend is [6, 7]. Nortons koepel is een theoretische constructie die volgens sommigen laat zien dat Newtons theorie van mechanica niet deterministisch is. Stel er ligt een deeltje op de top van een radiaal symmetrische, wrijvingsloze koepel (Nortons koepel). Newtons bewegingswetten geven twee mogelijke klassen van oplossingen: óf het deeltje blijft altijd op de top van de koepel, óf het valt na een arbitraire tijd naar een arbitraire richting [8]. Dit voorbeeld is echter omstreden, aangezien Nortons koepel onrealistische idealisering of wiskundige bijzonderheden heeft [6, 9, 10].

Er zijn nog meer tegenvoorbeelden en besprekingen van determinisme binnen zowel de kwantummechanica als de klassieke mechanica. Echter, er bestaan al meerdere uitgebreide overzichten die deze discussies behandelen [5, 6, 11–15]. In deze scriptie wil ik me richten op determinisme binnen de Algemene Relativiteitstheorie, omdat deze wat determinisme betreft nog relatief onderbelicht is [16, 17].

De Algemene Relativiteitstheorie (ART) is de meest succesvolle beschrijving van zwaartekracht op grote schalen. De theorie beschrijft zwaartekracht als een kromming van ruimte-tijd die bepaald wordt door de Einsteinvergelijkingen [18, 19]. Alle voorspellingen van ART zijn tot nu toe in overeenstemming met wetenschappelijke experimenten en observaties. Zo werd de afbuiging van licht door zwaartekracht, ook wel zwaartekrachtlenzsvorming genoemd, waargenomen in 1919 door Arthur Eddington [20]. Meer recente successen zijn de detectie van zwaartekrachtsgolven door het Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) in 2015 en de foto van de schaduw van een zwart gat door de Event Horizon Telescope (EHT) in 2019 [21, 22].

Voordat ik determinisme binnen ART bespreek, licht ik enkele fundamentele eigenschappen toe die

¹De Kopenhagen interpretatie is eigenlijk niet één uniforme interpretatie van de kwantummechanica, maar een groep van verschillende interpretaties die dezelfde niet deterministische eigenschap delen.

²Voor een toegankelijke en uitgebreidere uitleg van deze experimenten en de gevolgen voor determinisme binnen de kwantummechanica, zie [5].

de bespreking van determinisme binnen ART bemoeilijken. De algemene relativiteitstheorie heeft namelijk meerdere tegenintuïtieve eigenschappen die botsen met onze klassieke perceptie van de natuur. Dit heeft vooral te maken met de rol van ruimte en tijd binnen ART: volgens ART is het universum vier-dimensionaal, dat wil zeggen dat er één tijdsdimensie is en er drie ruimtedimensies zijn. Deze dimensies worden binnen ART samengebracht tot een ruimte-tijd. Een ruimte-tijd is niet absoluut en kan worden gekromd door bijvoorbeeld een planeet. Dit betekent dat het verloop van tijd op de planeet als langzamer wordt ervaren dan door een externe waarnemer. Het feit dat tijd niet absoluut is, betekent ook dat er geen objectieve “gelijktijdigheid” is. Men kan alleen zeggen dat een waarnemer waarneemt dat bepaalde evenementen tegelijkertijd gebeuren. Dit gaat fel tegen de intuïtie in die we hebben van de werkelijkheid, maar deze eigenschappen zijn zeer goed getoetst [19].

Naast deze overkomelijke conceptuele moeilijkheden, zijn er ook open (filosofische) vraagstukken bij de algemene relativiteitstheorie. Een van de openstaande vraagstukken is of ART deterministisch is. Er is veel discussie gevoerd over het zogenoemde “hole-argument” [23–26]. Dit argument stelt dat de kromming binnen een bepaalde regio (het “gat”) niet voldoende bepaald wordt door een beschrijving van materie buiten dat gebied [27, 28]. Aangezien de kromming van de regio niet uniek bepaald wordt, zou determinisme niet gelden. De discussie is echter alleen relevant als men aanneemt dat ruimte-tijdpunten een fysische betekenis hebben, ook als er geen materie is op die punten. Echter, relationisten stellen dat dit niet zo is (zie Sectie 2 voor een uitgebreidere uitleg van relationisme) [29]. In deze scriptie wordt dit verder niet besproken, al blijven de meningen over het Hole argument verdeeld. Een andere discussie omtrent determinisme binnen ART heeft betrekking op zogeheten “naakte singulariteiten”. Een naakte singulariteit is een hypothetische regio waarop de natuurwetten zouden breken en die direct zichtbaar zou zijn.³ Het bestaan van deze singulariteiten zou ervoor zorgen dat toekomstige gebeurtenissen niet bepaald zouden worden door de huidige toestand van het universum. Echter, modellen met naakte singulariteiten worden vaak gezien als onfysisch, omdat het model bijvoorbeeld gebruik maakt van een negatieve massa. Daarom sluiten de meeste natuurkundigen modellen met naakte singulariteiten uit (zie Sectie 4.2.1 voor meer details). In deze scriptie zal ik daarom modellen beschouwen zonder naakte singulariteiten.⁴

Om determinisme binnen ART dieper te analyseren, zal ik het zogenaamde beginwaardeprobleem bespreken. Het is namelijk mogelijk om te beginnen met een “beginplak” van een ruimte-tijd, die moet voldoen aan bepaalde voorwaarden (de Einsteinvergelijkingen) en vervolgens verder ontwikkeld kan worden naar een unieke ruimte-tijd (door middel van de Einsteinvergelijkingen). Deze grotere ruimte-tijd wordt ook wel een Cauchy-ontwikkeling genoemd en deze methode wordt het beginwaardeprobleem van ART genoemd. In deze scriptie beschouwen we Cauchy-ontwikkelingen in de context van vacuüm ruimte-tijden, wat wil zeggen dat het model geen materie of energie bevat. Hoewel maximale Cauchy-ontwikkelingen uniek zijn in het vacuüm geval, kunnen Cauchy-ontwikkelingen soms weer op een niet unieke manier worden uitgebreid (door middel van de Einsteinvergelijkingen). Deze niet unieke uitbreidingen hebben grote gevolgen voor de vraag of ART deterministisch is of niet.

Concluderend, de vraag die ik beantwoord in deze scriptie is: hoe deterministisch is de Algemene Relativiteitstheorie? Daartoe zal ik eerst uitleggen hoe het universum beschreven wordt binnen de Algemene Relativiteitstheorie. Vervolgens zal ik een overzicht geven van verschillende definities van determinisme, om vervolgens een nieuwe definitie van Halvorson, Manchak en Weatherall te verdedigen. Hierna zal ik uitleggen hoe een ruimte-tijd kan worden gezien als een oplossing van een beginwaardeprobleem binnen de Algemene Relativiteitstheorie. Ik concludeer dat het bestaan van uitbreidingen

³Een singulariteit is eigenlijk geen regio in het universum die beschreven wordt door een model. Om deze nuance uit te leggen is echter meer achtergrond informatie nodig. Een meer gedetailleerde bespreking vindt daarom plaats in Sectie 4.2.1.

⁴Voor de natuurkundigen: ik neem dus aan dat Penrose’s “Weak Cosmic Censorship conjecture” geldt.

van deze oplossingen laat zien dat ART niet Halvorson-Manchak-Weatherall deterministisch is.

Hoewel dit een filosofische scriptie is, kan het onderwerp niet volledig worden besproken zonder gebruik te maken van de achterliggende wiskunde of technische natuurkundige elementen. Ik heb geprobeerd deze aspecten toegankelijk te maken, door gebruik te maken analogieën en visualisaties. De meer technische aspecten staan vermeld in de voetnoten die beginnen met de tekst “Voor de natuurkundigen:”.

2 Definitie van ruimte-tijden

Om de definitie van determinisme binnen de Algemene Relativiteitstheorie (ART) goed te kunnen begrijpen, is het nodig om te begrijpen hoe ART het universum beschrijft. Eerst zal uitgelegd worden hoe het universum wordt gemodelleerd binnen ART en aan welke voorwaarden voldaan moet worden. Hierna zal het concept van isometrieën geïntroduceerd worden, aangezien dit concept gebruikt zal worden binnen verschillende definities van determinisme. Als laatste zal besproken worden wat de mogelijke conceptualiseringen zijn van ruimte-tijden binnen ART.

2.1 Modellen van ruimte-tijden

Modellen van een ruimte-tijd zijn zeer complex binnen ART door het gebruik van differentiaal meetkunde. De uitleg van ART modellen zal daarom opgedeeld worden in drie verschillende delen. Het eerste gedeelte gaat over manifolds, die de basisstructuur van een ruimte-tijd geven. Vervolgens wordt besproken hoe causaliteit binnen ART werkt. Ten slotte wordt de interactie tussen een ruimte-tijd en zwaartekracht besproken.

2.1.1 Manifolds, afstanden en coördinaten

Binnen ART worden de drie ruimtedimensies en de enkele tijdsdimensie van het universum verenigd tot een vier-dimensionale structuur, de **ruimte-tijd**. Een ruimte-tijd bestaat uit een verzameling van punten die een **manifold** M wordt genoemd. De manifold is lokaal vergelijkbaar met een vlakke ruimte, terwijl de globale structuur sterk kan afwijken van een vlakke ruimte.⁵ Om de manifold M meer structuur te geven, wordt een **metriek** g op M geïntroduceerd. De metriek bevat informatie over de geometrie van de manifold. Door de metriek kunnen de lengtes van paden tussen punten, de kromming op een punt en (waar mogelijk) de afstanden tussen punten gedefinieerd worden. De metriek bepaalt daarnaast ook welke punten elkaar causaal kunnen beïnvloeden (zie Sectie 2.1.2 voor meer informatie).⁶

Om deze aspecten te illustreren, zal ik eerst een ruimte bespreken in plaats van een ruimte-tijd: een twee-dimensionale schijf. Aangezien de schijf twee-dimensionaal is, kan een punt p op de schijf beschreven worden door twee getallen: $p = (p_1, p_2)$. Stel, $q = (q_1, q_2)$ is een ander punt op de schijf. Het is mogelijk om in deze ruimte een afstandsfunctie $d_g(.,.)$ te definiëren. Deze afstandsfunctie is afhankelijk van de metriek op de schijf en deze afhankelijkheid wordt weergegeven met het subscript g .⁷ Stel de metriek op de schijf is zo gekozen dat de kwadraat van de afstandsfunctie de vorm

⁵Voor de natuurkundigen: in exactere wiskundige taal heeft een manifold M meer structuur en eigenschappen dan louter een collectie van punten. Elke manifold heeft een atlas die een verzameling is van open gebieden U_i in de manifold M waarop een functie ϕ_i gedefinieerd is die U_i relateert aan een gebied in $\mathbb{R}^n$, dus $\phi : U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$. De term n is de dimensie van de manifold en in ons geval geldt $n = 4$. De specifieke coördinaten voor p worden bepaald door een atlas en worden weergegeven als $\phi(p) = (p_1, \dots, p_n)$. De verzameling van open gebieden U_i moeten samen M bedekken. Daarnaast geldt dat als er twee open gebieden U_i en U_j zijn die met elkaar overeenkomen dan moeten $\phi_i(U_i \cap U_j)$ en $\phi_j(U_i \cap U_j)$ overeenkomen. Zie hoofdstuk 1-2 van [30] voor meer details.

⁶Voor de natuurkundigen: de metriek is een tensorveld dat een inwendig product definieert op de raakruimte $T_p M$ van een punt $p \in M$. De raakruimte $T_p M$ bestaat uit vectoren $\mathbf{v}$ op p . De metriek g heeft twee eigenschappen: de metriek is symmetrisch $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ voor $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$ en is niet-singulier. In het geval van een Riemanns manifold geldt dat g positief definit is: voor alle niet nul vectoren $\mathbf{v} \in T_p M$ geldt $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$. In het geval van een Lorentziaans manifold geldt dat g niet-definit is. Dit betekent dat voor alle niet nul vectoren $\mathbf{v} \in T_p M$ geldt dat $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ negatief, nul of positief kan zijn. Het teken van het inproduct bepaalt de causale aard van $\mathbf{v}$.

⁷Voor de natuurkundigen: De definitie van een afstandsfunctie op een Riemanns manifold M bouwt voort op de structuur van de raakruimte $T_p M$ op een punt $p \in M$. Door de introductie van het inwendig product g kan men een norm van een vector $\mathbf{v} \in T_p M$ definiëren, bijvoorbeeld $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|g(\mathbf{v}, \mathbf{v})|}$. Een glatte (continue en oneindig differentieerbare)

$d_g(p, q)^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$ heeft.⁸ Als er een andere metriek g' was gekozen, dan zou de afstandsfunctie kunnen veranderen naar bijvoorbeeld $d_{g'}(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$.⁹ De structuur van deze nieuwe ruimte-tijd is anders dan de vorige, omdat onder andere de afstanden tussen punten verschillen. Daarom moet zowel een verzameling punten als de metriek worden gespecificeerd, als er wordt gesproken over een ruimte-tijd binnen ART: (M, g) .

Als men de schijf ook wil beschouwen op latere tijdstippen, dan moet er een nieuw coördinaat geïntroduceerd worden: het tijdstip t . In dit geval wordt een punt p dus beschreven door drie waarden, namelijk $p = (t, p_1, p_2)$. De schijven op verschillende tijdstippen vormen samen een verzameling die geordend kan worden door de schijven in chronologische orde op elkaar te stapelen. Er ontstaat dan een drie-dimensionale vorm die lijkt op een pannenkoekenstapel. In dit geval wordt er niet gesproken van een afstand tussen twee punten, maar over een ruimte-tijdinterval die bijvoorbeeld de vorm $d_g(p, q)^2 = -(t - t')^2 + (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$ heeft.¹⁰ Zowel het tijdsinterval als de ruimte-tijd interval wordt meegenomen, waarbij het tijdsinterval een negatieve signatuur heeft. Dit zorgt er voor dat $d_g(p, q)^2$ negatief kan zijn, waardoor er niet meer gesproken kan worden van een afstand tussen twee punten. Als de punten p en q zich op hetzelfde tijdstip t bevinden, dan is de ruimte-tijd interval hetzelfde als het kwadraat van de afstand op een twee-dimensionale schijf. Dit volgt uit het feit dat de ruimte-tijd bestaat uit een opstapeling van twee-dimensionale schijven. Op een analoge wijze kan een vier-dimensionale ruimte-tijd geconstrueerd worden: drie-dimensionale ruimten kunnen “op elkaar gestapeld” worden.

Zoals we zien uit deze twee voorbeelden is het mogelijk om plekken in een ruimte-tijd weer te geven door middel van coördinaten. Echter, het is belangrijk om te begrijpen dat deze coördinaten arbitrair zijn. Het is namelijk mogelijk om deze coördinaten te veranderen, zonder de geometrische structuur van de manifold te veranderen. Neem bijvoorbeeld de afstandsfunctie van de schijf. Als bij elk coördinaat voor een punt het getal 1 opgeteld wordt, dan is de afstand onveranderd

$$d_g(p, q)^2 = (p_1 + 1 - (q_1 + 1))^2 + (p_2 + 1 - (q_2 + 1))^2 \quad (1)$$

$$= (p_1 + 1 - q_1 - 1)^2 + (p_2 + 1 - q_2 - 1)^2 \quad (2)$$

$$= (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2. \quad (3)$$

De coördinaten zijn dus een handig gereedschap om een manifold te beschrijven, maar maken geen fundamenteel uit van de manifold zelf. Sterker nog, het is mogelijk om ART te formuleren zonder gebruik te maken van coördinaten [31, 32].

kromme $c : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ heeft een afgeleide $\dot{c}(t)$ voor $t \in I$ die in de raakruimte $T_{\gamma(t)}M$. De norm $\|\cdot\|$ kan dan gebruikt worden om de lengte van een kromme $c : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ te definiëren $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$.

De afstandsfunctie $d_g(p, q)$ is het infimum van de verzameling van de lengtes $L(c)$ van de krommen $c : I = [a, b] \rightarrow M$ waarvoor geldt $c(a) = p$ en $c(b) = q$. Een infimum van een verzameling A van reële getallen is het grootste reële getal dat kleiner is dan of gelijk is aan elk element van de verzameling. In het geval van een Lorentziaans manifold, waarin g niet-definiet is, is er geen goed gedefinieerde afstandsfunctie. Er wordt dan gesproken van een ruimte-tijdinterval. Voor meer details zie hoofdstuk 2-3 van [18].

⁸Als men de afstand wil nemen, dan pakt men de wortel. De afstand tussen p en q is dus $d_g(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$. Ik kies hier het kwadraat van de afstandsfunctie om consistent te zijn met de uitbreiding waarin ik een tijdsdimensie introduceer.

⁹In dit geval wordt er gesproken van een Riemanns manifold, omdat er een afstand tussen twee punten kan worden gedefinieerd. Dit kan teruggezien worden in de afstandsfunctie $d_g(\cdot, \cdot)$, omdat die alleen positieve componenten heeft.

¹⁰In dit geval is er sprake van een Lorentziaans manifold en niet een Riemanns manifold, omdat de ruimte-tijd interval een negatieve tijdscomponent heeft.

2.1.2 De causale structuur van ruimte-tijden

Tot nu toe hebben we manifolds besproken tot op een abstract niveau, zonder een vorm van causaliteit te introduceren: het is tot nu toe onduidelijk hoe en wanneer punten in een manifold elkaar kunnen beïnvloeden. In deze sectie worden krommen geïntroduceerd, zodat de concepten tijdsoriëntaties en causaliteit besproken kunnen worden.

Een **kromme** c in de ruimte-tijd M is een beschrijving van een pad dat afgelegd kan worden door, bijvoorbeeld, een (theoretisch) deeltje. In principe hoeft dit geen realistisch pad te zijn, het is puur een wiskundig object. Vaak wordt het pad gedefinieerd op een eindig interval I , bijvoorbeeld $I = [0, 1]$. De parameter van de kromme wordt weergegeven als t , maar dit hoeft niet hetzelfde te zijn als de tijd die het deeltje ervaart. De parameter geeft de volgorde aan van de punten op het pad. De plek van een deeltje voor parameter t uit I wordt weergegeven als $c(t)$ en is volgens ART een punt in de vier-dimensionale ruimte-tijd. Het punt $c(t)$ is dus niet een plek in een drie-dimensionale ruimte. Ter illustratie, als c een kromme is op de pannenkoekenstapel, dan kan het punt $c(t)$ beschreven worden als (t', p_1, p_2) , waar $t \neq t'$. Dit laat zien dat de tijdcoördinaat t' van een deeltje die de kromme c volgt niet hetzelfde hoeft te zijn als de parameter t . Daarnaast is het mogelijk om het hele pad te herparametriseren, wat betekent dat hetzelfde pad beschreven kan worden op een ander interval, zoals $[-2, 2]$ in plaats van $[0, 1]$. De parameter t is daarom arbitrair. Om te beschrijven wanneer een pad fysisch is, is het daarom nodig om tijdsoriëntaties en lichtkegels te introduceren. Met “fysisch” bedoel ik hier dat het pad consistent is met de natuurwetten.

Om te beginnen heeft de manifold M een tijdsoriëntatie nodig. Dit betekent dat op elk punt vastgesteld kan worden of een kromme richting de toekomst of het verleden gaat. Het is dus mogelijk om een globale “richting van de tijd” of “tijdpijl” te hebben. Niet elke manifold laat dit toe, maar binnen ART worden in het algemeen alleen manifolds gebruikt die een tijdsoriëntatie hebben. Zonder tijdsoriëntatie is het nog steeds mogelijk om te bepalen of punten elkaar zouden kunnen beïnvloeden. Echter, het is dan niet mogelijk om te onderscheiden welk punt in het verleden van het andere punt ligt. Er kan dan geen onderscheid gemaakt worden of een gebeurtenis op het punt p de oorzaak of het gevolg is van een gebeurtenis op het punt q [18].¹¹

Om te bepalen wanneer twee punten causaal met elkaar verbonden zijn, zullen de krommen tussen punten geïdentificeerd moeten worden. Krommen hebben raakvectoren die op een punt aangeven in welke richting een theoretisch deeltje gaat in de vier-dimensionale ruimte-tijd en hoe snel het vooruitgaat in de ruimte en tijd. Een raakvector op een punt kan daarom gezien worden als een vector die aangeeft waar het pad naar toe gaat en in welke mate. Aangezien een deeltje niet sneller kan gaan dan de lichtsnelheid, kan door middel van de raakvector gesteld worden of een pad fysisch is of niet.¹²

¹¹Voor de natuurkundigen: de tijdsoriëntatie wordt gegeven door een vectorveld. Een vectorveld $X : M \rightarrow TM = \cup_{p \in M} T_p M$ kent een vector $X(p)$ toe aan elk punt p in M . Het vectorveld is een gladde (continue en oneindig differentieerbare) sectie van TM (de raakbundel). Dat X een sectie is betekent dat als $\pi : TM \rightarrow M$ de projectie is (wat inhoudt dat als $\mathbf{v} \in T_p M \subset TM$, dan $\pi(\mathbf{v}) = p$), dan geldt $\pi \circ X = id_M$. Een Lorentziaans manifold is tijd-oriënteerbaar als er een vectorveld bestaat waarvoor geldt dat $g(X(p), X(p)) < 0$ voor alle $p \in M$. Gegeven een tijdsoriëntatie, die gedefinieerd is door een vectorveld T , kan op elk punt p elke vector $\mathbf{v}$ geïdentificeerd worden als toekomstig ($g(T(p), \mathbf{v}) < 0$) of verleden ($g(T(p), \mathbf{v}) > 0$) georiënteerde vectoren. Als een Lorentziaans manifold tijd-oriënteerbaar is, bestaan er meerdere mogelijke vectorvelden die voldoen aan de gegeven conditie. Echter, ze zijn op te delen in twee equivalente klassen van tijdsoriëntaties. Alle tijdsoriëntaties delen namelijk alle vectoren op in dezelfde oriëntatieklasse en verschillen alleen in welke groep toekomstig georiënteerd wordt genoemd en welke groep verleden georiënteerd genoemd wordt [18].

¹²Het feit dat geen deeltje sneller kan gaan dan de lichtsnelheid speelt al bij de Speciale Relativiteitstheorie (SRT). Deze theorie bestaat uit twee postulaten (1) de wetten van de natuurkunde nemen in elke inertiaalstelsel (stelsels die bewegen met een constante snelheid) dezelfde vorm aan, en (2) in elk inertiaalstelsel is de lichtsnelheid in vacuüm constant en hetzelfde. SRT analyseert vervolgens ruimte-tijdmetingen en concludeert dat bijvoorbeeld gelijktijdigheid relatief is: waarnemers in inertiaal stelsels met verschillende snelheden zien verschillende gebeurtenissen als gelijktijdig. SRT is een speciaal geval van ART, namelijk het geval dat de ruimte-tijd vlak is. ART is daarmee een veralgemenisering, omdat

Stel er is een kromme c die gedefinieerd is voor $I = [a, b]$. Op een specifiek punt $c(t)$ (waar t in I zit), kan de snelheid bepaald worden van het deeltje dat het pad volgt. Als de snelheid groter is dan de lichtsnelheid, dan is de raakvector van het pad op $c(t)$ **ruimteachtig**. Als de snelheid exact de lichtsnelheid is, dan is de raakvector van het pad op dat punt **lichtachtig**. De lichtachtige raakvectoren op een punt vormen samen een **lichtkegel**. Als de snelheid van het deeltje op het $c(t)$ lager is dan de lichtsnelheid, dan is de raakvector van het pad op dat punt **tijdachtig**. De tijdachtige raakvectoren vormen samen het interieur van de lichtkegel. Als de raakvector op een punt lichtachtig of tijdachtig is, dan is de raakvector van het pad op dat punt **causaal**.¹³ Als het pad op een punt ruimteachtig is, dan beschrijft de kromme een onfysisch pad. Dit zou namelijk betekenen dat een deeltje op een moment met een snelheid sneller dan het licht beweegt, wat niet fysisch mogelijk is volgens ART. Dit impliceert ook dat, als het pad fysisch is, het pad nergens een ruimteachtige raakvector heeft [18].

Met deze definities is het mogelijk om te categoriseren wanneer punten in de ruimte-tijd causaal met elkaar verbonden kunnen worden. Neem een punt p in de ruimte-tijd. Een punt q is lichtachtig verwijderd van p als er een kromme c van p tot q bestaat die op elk punt een lichtachtige raakvector heeft. De verzameling punten die lichtachtig verwijderd zijn van p heet de **horismos**. Een punt q is tijdachtig verwijderd van p als er een kromme c bestaat van p tot q en de raakvector op elk punt van de kromme tijdachtig is. De verzameling punten die tijdachtig verwijderd zijn van p vormen de **chronologische toekomst** (als de kromme toekomstgericht is) en het **chronologische verleden** (als de kromme verledengericht is) van p . Een punt q is causaal verwijderd van p als er een kromme c bestaat tussen p en q waarvan de raakvectoren op elk punt causaal zijn. Deze punten vormen samen het **causale domein** van p . Als de kromme van p naar q toekomstgericht is, dan behoort q tot de *causale toekomst* van p . Als de kromme verledengericht is, dan behoort q tot het *causale verleden* van p . Deze krommen worden causaal genoemd, omdat fysische deeltjes deze paden kunnen bewandelen: ze gaan met een snelheid gelijk of kleiner dan de lichtsnelheid. Als een deeltje van punt p naar punt q kan gaan, dan kan er informatie van p naar q gaan, wat de gebeurtenissen op punt q kan beïnvloeden, waardoor ze causaal verbonden kunnen zijn.¹⁴ Punten die buiten het causale domein vallen vormen de verzameling van punten die ruimteachtig verwijderd zijn van p . Het is onmogelijk voor punten uit dit gebied om een causale interactie aan te gaan met p [18].¹⁵

Om deze categorisatie te illustreren, zal ik het geval van de pannenkoekenstapel weer bespreken. Als we kijken naar het kwadraat van het ruimte-tijdinterval $d_g(\cdot, \cdot)^2$ op de pannenkoekenstapel, dan zien we dat het tijdscomponent negatief is: het interval bevat $-(t_1 - t_2)^2$.¹⁶ Dit betekent dat het kwadraat van het ruimte-tijdinterval positief, nul of negatief kan zijn. Omdat de ruimte-tijd vlak is, kunnen

het ook gekromde ruimte-tijden analyseert. Voor meer details zie hoofdstuk 1-2 in [33].

¹³Voor de natuurkundigen: de raakvectoren worden gekarakteriseerd door middel van de metriek g . Een vector $\mathbf{v} \in T_p M$ is tijdachtig als $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$, lichtachtig als $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ met $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en ruimteachtig als $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$. Een vector is causaal als de vector lichtachtig of tijdachtig is: $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$.

¹⁴Een belangrijke nuance is dat alleen massaloze deeltjes met de lichtsnelheid kunnen gaan. Deeltjes met massa heten massieve deeltjes en kunnen dus alleen paden volgen met tijdachtige raakvectoren.

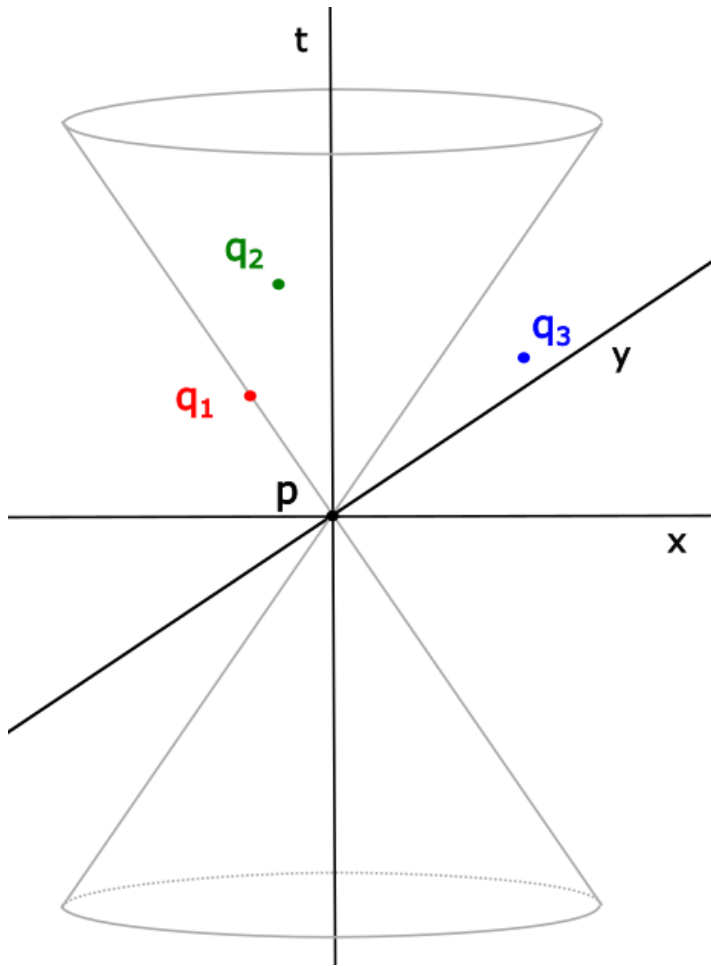
¹⁵Voor de natuurkundigen: er is een notatie om deze relaties weer te geven. Voor $p, q \in M$ geldt $p \ll q$ als er een kromme c van p naar q bestaat waarvan alle raakvectoren toekomstgericht en tijdachtig zijn. De set van de punten die vanaf p bereikt kunnen worden met een snelheid lager dan het licht wordt weergegeven met $I^+(p) = \{q \in M | p \ll q\}$. Punten die p uit het verleden kunnen bereiken met tijdachtige paden wordt weergegeven met $I^-(p) = \{q \in M | q \ll p\}$. Over het algemeen zijn er geen lichtachtige krommen met nul lengte, dus vaak geldt dat $p \notin I^\pm(p)$. Met $p \leq q$ wordt weergegeven dat er een kromme c van p naar q bestaat waarvan de raakvector overal toekomstgericht en causaal is of $p = q$. De punten die door p beïnvloed kunnen worden, worden weergegeven met $J^+(p) = \{q \in M | p \leq q\}$. Punten die p kunnen hebben beïnvloed worden weergegeven met $J^-(p) = \{q \in M | q \leq p\}$. De punten die lichtachtig verwijderd zijn van p worden dan weergegeven als complementen van deze verzamelingen: $E^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$ en $E^-(p) = J^-(p) \setminus I^-(p)$. Over het algemeen definieert men geen expliciete verzameling voor ruimteachtig verwijderde punten [18].

¹⁶Ter herinnering: dit is het verschil tussen een Lorentziaans manifold en een Riemanns manifold. In het geval van een Riemanns manifold heeft elk component van de metriek een positief teken.

we de causale relatie bepalen tussen twee punten p en q in de pannenkoekenstapel aan de hand van het teken van $d_g(.,.)^2$.¹⁷ Als $d_g(p, q)^2 = 0$, dan is het ruimte-tijd interval lichtachtig en kan q alleen bereikt worden vanaf p door een lichtstraal. Zoals te zien is in Afbeelding 1, vormt de horismos een lichtkegel. Deze vorm volgt uit het feit dat de ruimte-tijd in dit geval plat is. Als $d_g(p, q)^2 < 0$, dan zijn p en q tijdachtig verwijderd van elkaar. Het is mogelijk voor deeltjes met massa om q te bereiken vanaf p .¹⁸ In dit geval vormen de chronologische toekomst en het chronologische verleden het interieur van de lichtkegel, zoals te zien is in Afbeelding 1. Als $d_g(p, q)^2 > 0$, dan zijn p en q ruimteachtig van elkaar verwijderd. Ter gevolge kunnen de punten p en q niet in causaal contact komen met elkaar. In Afbeelding 1 bestaat deze verzameling uit de punten buiten de lichtkegel. Deze drie gebieden geven dus aan welke punten in de ruimte-tijd in causaal contact staan met het punt p . Deze driedeling is van belang om het beginwaardeprobleem binnen ART te begrijpen.

¹⁷Het is dus niet mogelijk om deze methode te gebruiken voor alle ruimte-tijden, zoals gekromde ruimte-tijden. In deze gevallen kan de metriek veranderen van punt tot punt en moet er gebruik gemaakt worden van causale krommen. Zie hoofdstuk 8 van [32] voor meer details.

¹⁸Voor de natuurkundigen: in dit geval wordt er gebruik gemaakt van de conventie waarin de metriek een negatieve tijdscomponent heeft (de zogehete $(-+++)$ conventie). Als men de conventie neemt waarin de metriek een positief tijdscomponent heeft (de zogehete $(+---)$ conventie), dan worden de ruimtecomponenten negatief en slaat het teken van het ruimte-tijdinterval om.



Figuur 1: Een voorbeeld van hoe de ruimte-tijd M kan worden opgedeeld voor een punt p in M . De ruimte bestaat uit twee ruimtelijke dimensies (het horizontale vlak) en een tijdsdimensie (de verticale as). Het punt q_1 in rood is lichtachtig verwijderd van p , net zoals alle andere punten op de grijze lijnen. Deze punten vormen samen een lichtkegel. Alle punten binnen de kegel, zoals het groene punt q_2 , zijn lichtachtig verwijderd van p . De lichtkegel, inclusief diens inhoud, geeft weer welke punten p kan beïnvloeden (de regio boven p) en welke punten p hebben kunnen beïnvloeden (de regio onder p). De punten buiten de kegel, zoals het punt q_3 in het blauw, zijn ruimte-achtig verwijderd van p . Er is geen causaal verband mogelijk tussen p en deze punten.

Om het beginwaardeprobleem strakker te kunnen definiëren is het nodig om de (on)uitbreidbaarheid van krommen te bespreken. Soms is het mogelijk om een gegeven kromme c verder uit te breiden. Het kan namelijk zo zijn dat de kromme stopt op een gegeven plek in de ruimte-tijd, terwijl er nog meer punten in de manifold zijn die causaal verbonden zouden kunnen worden met het stoppunt. Als er gesproken wordt van een **onuitbreidbare causale kromme**, dan is het niet mogelijk om zo'n uitbreiding te maken: de gehele mogelijke geschiedenis en toekomst van het pad zijn dan al beschreven. Ter analogie van (on)uitbreidbare causale krommen zal ik het voorbeeld van licht uit een zaklamp bespreken. Stel er is een kromme die beschrijft hoe een licht-deeltje reist van mijn zaklamp naar een raam. Het is mogelijk om deze beschrijving of kromme uit te breiden, door te beschrijven wat er gebeurt nadat het lichtdeeltje het raam heeft bereikt. In dit geval is het pad van het licht uitbreidbaar. Stel, er is een nieuwe kromme waarin ook ook beschreven staat hoe het licht na het raam de muur van de kamer bereikt. Het is niet mogelijk voor het licht om verder te gaan, omdat licht niet door de muur heen kan. De gehele baan van het licht is beschreven en de baan is dus onuitbreidbaar.

2.1.3 Zwaartekracht binnen ruimte-tijden

Nu ik uitgelegd heb hoe ruimte-tijden worden beschreven binnen ART, is het tijd om te kijken naar de voorwaarden op ruimte-tijden binnen ART die voortvloeien uit de Einsteinvergelijkingen.

Het essentiële punt van ART is dat zwaartekracht beschreven wordt als een kromming van de ruimte-tijd. De kromming van de ruimte-tijd kan veroorzaakt worden door zowel massa als energie en wordt beschreven door de Einsteinvergelijkingen. Dit betekent overigens niet dat elke vorm van kromming van de ruimte-tijd volgt uit het bestaan van materie of energie. Er zijn ook gekromde vacuüm ruimte-tijden die voldoen aan de Einsteinvergelijkingen, zoals de gebieden buiten een zwart gat [34]. Daarnaast zijn er modellen van vacuüm ruimte-tijden waarin zwaartekrachtsgolven bestaan.¹⁹ De zwaartekrachtsgolven zorgen voor een kromming van de ruimte-tijd [35].

Ter illustratie van de kromming die veroorzaakt kan worden door massa en energie, zal ik de tafellaken analogie bespreken. Stel er is een tafellaken waarvan de hoekpunten geklemd zijn zodat het laken gespannen in de lucht hangt. Als er geen massa op het laken is, dan is het laken plat. Als er een bal op het laken ligt, dan zal het laken een kromming krijgen: de plek waar de bal ligt, zal lager liggen dan de hoekpunten van het laken.²⁰ Op een analoge wijze kunnen massa en energie ervoor zorgen dat de ruimte-tijd gekromd wordt. Een model van ART moet daarom ook een bepaalde massa- en energie-inhoud specificeren. Dit wordt gedaan door middel van de massa-energie tensor T . Deze tensor in combinatie met de Einsteinvergelijkingen geeft dus een beperking op de metriek g , aangezien die de kromming van het manifold encodeert. Een model (M, g, T) voor de algemene relativiteitstheorie bestaat dus uit een manifold met een metriek, en een materie- en energie-inhoud, waar de metriek voldoet aan de Einsteinvergelijkingen met de specifieke materie- en energie-inhoud.

De materie- en energie-inhoud van een ruimte-tijd kunnen zowel de ruimte- als tijdsdimensies van een ruimte-tijd beïnvloeden. In het algemeen wordt dus ook de tijdsdimensie gekromd door massa en energie, waardoor het gemeten verloop van tijd tussen twee waarnemers kan verschillen. Denk aan de film *Interstellar*, waarin de hoofdpersonen naar een planeet met een grote massa gaan. Door de hogere massa verloopt de tijd “langzamer” in vergelijking met de aarde: wanneer de hoofdpersonen twee uur op de zware planeet spenderen, is er 20 jaar op de aarde verlopen. De gemeten tijd is hier de *eigentijd*: de tijd die een object zelf meet langs het pad door de ruimte-tijd. Het gaat om een intrinsieke duur die wordt gemeten door een ideaal klokje dat meereist met het object. De eigentijd van de reizigers is hier dus twee uur en loopt dus “langzamer” dan de eigentijd van iemand op aarde, want die eigentijd is 20 jaar. Dit effect heet tijdsdilatatie en wordt dus veroorzaakt door de kromming van de ruimte-tijd door massieve objecten.²¹

Voor een visualisatie van de kromming van de ruimte-tijd kan men weer kijken naar de pannenkoeken-stapel. Als er geen kromming is, dan liggen alle schijven plat op elkaar. Echter, als er wel kromming is, dan zullen schijven buigen en lijkt het van buitenaf alsof er een deuk in de schijven zit. De afstand wordt anders beschreven waar de schijf een kromming heeft dan waar de schijf plat is. Het kortste pad in een platte schijf is (van buitenaf gezien) een rechte lijn. Op een gebogen gebied is het kortste pad daarentegen een gebogen pad (van buitenaf gezien). Dit zorgt er bijvoorbeeld voor dat een lichtstraal die achter een zwaar object vandaan komt toch geobserveerd kan worden. De kromming van de

¹⁹Voor de natuurkundigen: hoewel deze zwaartekrachtsgolven energie dragen, geldt dat $T = 0$, omdat de massa-energie inhoud bestaat uit materie en niet-gravitationele energie.

²⁰Deze analogie is licht vertekend, omdat we het laken van buitenaf bekijken. Dit betekent dat er een (verticale) dimensie is waar het laken naar toe kan krommen. In het geval van de ruimte-tijd bekijken we kromming niet van buitenaf, er wordt gekeken naar een intrinsieke kromming.

²¹Hetzelfde geldt voor objecten die bewegen met hoge snelheden. Als een object met een constante snelheid gaat die dicht bij lichtsnelheid ligt, dan verloopt de tijd voor dat object “langzamer” dan voor een stilstaand object. Dit tweede geval wordt al beschreven door de Speciale Relativiteitstheorie (SRT), maar is ook geldig bij ART. Zie hoofdstuk 1-2 van [33] voor meer details.

ruimte-tijd zorgt ervoor dat het kortste pad niet recht langs de ster is, maar via een “gebogen” pad waardoor het voorbij het massieve object kan gaan en bijvoorbeeld de aarde kan bereiken. Dit effect heet ook wel *zwaartekrachtslenseffect* en de waarneming ervan is een van de bevestigingen voor ART [36, 37].

2.2 Diffeomorfismen en isometrieën

Voordat ik determinisme kan bespreken, zullen diffeomorfismen, isometrieën en de interpretaties van ruimte-tijd punten binnen ART besproken moeten worden.

Een **diffeomorfisme** is een afbeelding ϕ die punten van de manifold (M, g) stuurt naar/relateert aan de punten van de manifold (M', g') .²² Elk punt p in M wordt door ϕ naar een uniek punt $p' = \phi(p)$ in M' gestuurd. Daarnaast wordt elk punt in M' bereikt, zodat men zeker weet dat M en M' “even groot” zijn.²³ Als men een gebied A in M neemt, zoals een verzameling van punten met dezelfde tijdcoördinaat t , dan kunnen de punten van dit gebied gestuurd worden naar M' door ϕ . Deze nieuwe punten vormen een gebied A' in M' die weergegeven wordt als $A' = \phi(A)$.

Bij diffeomorfismen transformeren ook de metriek g en de massa-energie inhoud T die gedefinieerd zijn op de manifold M via zogenaamde *pullbacks* ϕ^* en *pushforwards* ϕ_* [30]. De waarden van de metriek g en de massa-energie inhoud T op een bepaald punt veranderen in ϕ_*g en ϕ_*T . De waarden waarin bijvoorbeeld de kromming wordt uitgedrukt, veranderen ook, maar de intrinsieke geometrie of vorm van de manifold is niet veranderd. Hetzelfde geldt voor de massa-energie inhoud: de fysische materie-energie-inhoud van de ruimte-tijd wordt niet veranderd door ϕ . Al deze voorwaarden zorgen ervoor dat M' een “kopie” is van M : het heeft dezelfde structuur als M , maar de punten worden “door elkaar geschud”.

Soms maakt men een onderscheid tussen actief en passieve diffeomorfismen. Een *actief diffeomorfisme* is een diffeomorfisme waar elk punt p echt wordt afgebeeld op een ander punt $\phi(p)$, waardoor de metriek g en massa-energie inhoud T mee moeten transformeren. Een *passief diffeomorfisme* ϕ is een coördinatentransformatie: de punten p in M krijgen andere coördinaten, maar ze hebben dezelfde plek in de manifold [38].

Deze definitie is abstract, maar ik zal het idee van een actief diffeomorfisme illustreren door middel van de eerdergenoemde pannenkoekenstapel. Stel, ik snijd elke schijf van de stapel exact verticaal door het midden, net zoals in het vorige voorbeeld. Stel ik draai één van de helften om zodat de onderkant van de schijf nu de bovenkant is. Als de schijven nu weer perfect aan elkaar worden “gelijmd” en weer op elkaar worden gestapeld, dan kan er een diffeomorfisme opgesteld worden tussen deze nieuwe pannenkoekenstapel en de oude pannenkoekenstapel. In dit geval wordt de afstand tussen punten niet behouden, maar de algemene structuur en geometrie van de pannenkoekenstapel is hetzelfde gebleven. Binnen ART wordt er ook gewerkt met een specifiekere subset van diffeomorfismen, genaamd isometrieën. Voor het gemak beschouw ik in deze scriptie isometrieën ϕ van (M, g) naar (M, g) . Een **isometrie** is dan een diffeomorfisme die de punten van (M, g) zodanig naar (M, g) stuurt, dat de waarden van de metriek hetzelfde blijven: $\phi^*g = g$. Als er een afstand tussen twee punten kan worden gedefinieerd, dan blijft die behouden. In andere woorden geldt dan voor p en q uit M dat $d_g(p, q) = d_{\phi^*g}(\phi(p), \phi(q))$. Als alleen wordt aangenomen dat de isometrie de metriek behoudt, hoeven de waarden van de massa-energie inhoud T niet behouden te blijven, net zoals bij een diffeomorfisme. Binnen ART eist men daarom dat de massa-energie inhoud op compatibele wijze transformeert:

²²Het is niet nodig voor (M', g') een andere manifold te zijn, men kan ook een diffeomorfisme definiëren van (M, g) naar (M, g) . Dit wordt een autodiffeomorfisme genoemd.

²³Voor de natuurkundigen: een diffeomorfisme tussen twee manifolds M en M' is een bijectieve gladde afbeelding $\phi : M \rightarrow M'$ met een gladde inverse $\phi^{-1} : M' \rightarrow M$.

$\phi^*T = T'$ Voor meer details zie Appendix B in [33] of hoofdstuk 3 in [32].

Om het verschil tussen een diffeomorfisme en een isometrie uit te leggen, zal ik weer de pannenkoekenstapel bespreken. Stel, ik snijd weer bij elke ruimtelijke schijf een verticale as door het midden heen. Stel alle punten van de schijf worden gespiegeld om die as. Als de schijf een klok was, dan zou het getal 3 nu staan waar het getal 9 stond en andersom. Een afbeelding ϕ die de punten op elke schijf zo transformeert is een diffeomorfisme en heeft duidelijk geen invloed op de geometrie van de pannenkoekenstapel: de pannenkoekenstapel ziet er exact hetzelfde uit.

Binnen ART is er sprake van invariantie onder actieve en passieve diffeomorfismen. Invariantie onder passieve diffeomorfismen wordt ook wel algemene covariantie genoemd. Grofweg betekent algemene covariantie dat coördinaten arbitrair zijn: coördinatentransformaties veranderen de natuurwetten niet wezenlijk. In een andere coördinatenstelsel kan de formule die de natuurwet uitdrukt er anders uit zien, maar de eigenschappen van de natuurwet worden behouden. ART is ook invariant onder actieve diffeomorfismen: als (M, g) een ruimte-tijd is die voldoet aan de Einsteinvergelijkingen, dan is $(\phi(M), \phi^*g)$ een oplossing van dezelfde Einsteinvergelijkingen voor de massa-energie inhoud ϕ^*T . Invariantie onder passieve diffeomorfismen gaat dus over de vorm van vergelijkingen, terwijl de invariantie onder actieve diffeomorfismen iets zegt over de wiskundige structuur van ART [39].

Hoewel ART diffeomorfisme invariant is, worden ruimte-tijden beschouwd “tot op isometrie”. Dit houdt in dat ruimte-tijden die aan elkaar gerelateerd zijn door een isometrie op dezelfde manier kunnen worden behandeld. Ze zijn mathematisch equivalent aan elkaar en fysisch identiek (volgens het relationistische standpunt dat ik hier inneem). Als aan de Einsteinvergelijkingen wordt voldaan in de originele ruimte-tijd (M, g, T) , dan voldoet ook de ruimte-tijd $(\phi(M), \phi^*g, \phi^*T)$ aan de Einsteinvergelijking.

Sommige mensen stellen dat een isometrie leidt tot een wezenlijke nieuwe ruimte-tijd. Ik daarentegen stel dat het toepassen van een isometrie niet leidt tot een wezenlijke nieuwe ruimte-tijd. Er worden louter punten hernoemd, maar de onderliggende structuur (de geometrie, en de massa en energie inhoud) wordt niet veranderd. Dit is een **relationistisch** standpunt, aangezien ik niet de punten van de manifold als fundamenteel zie, maar de relaties die ertussen gedefinieerd worden. Dit betekent dat de punten niet onafhankelijk bestaan van de objecten die erop worden gedefinieerd, zoals de metriek en de massa-energie tensor. Tegenover de relationisten staan de **substantialisten**, die stellen dat punten van de ruimte-tijd onafhankelijk bestaan van de objecten die erop worden gedefinieerd. Dit betekent dat de punten van de manifold fundamenteel zijn voor substantialisten.

Het onderscheid tussen relationisten en substantialisten is belangrijk voor het debat van determinisme binnen ART. Een substantialist en een relationist hebben namelijk andere visies over wanneer twee ruimte-tijden als wezenlijk anders worden gezien. Een substantialist zou zeggen dat de spiegeling van de schijven uit de pannenkoekenstapel een wezenlijke nieuwe ruimte-tijd is. Een relationist zou zeggen dat de relaties hetzelfde zijn na de isometrische transformatie, waardoor de ruimte-tijden als equivalent kunnen worden beschouwd. Het verschil in de visies heeft overigens geen belang voor de wiskundige of natuurkundige beschrijving van de ruimte-tijd en is puur filosofisch/ metafysisch.

Er is een uitgebreide discussie of substantialisme en determinisme verenigbaar zijn binnen ART, waarin het “hole-argument” centraal staat [23]. Stel je neemt een ruimte-tijd (M, g) die voldoet aan de Einsteinvergelijkingen met een massa-energie inhoud T . Neem een gebied A in de manifold. Binnen dit argument wordt het gebied ook wel het “gat” genoemd. Stel, ik pas een isometrie ϕ toe op het gat, waarbij het gebied buiten het gat onaangepast blijft. Na het diffeomorfisme heeft het gebied $A' = \phi(A)$ een metriek $g' = \phi^*g$. Aangezien de Einsteinvergelijkingen diffeomorfisme-invariant zijn, is zowel g als g' op A een oplossing van de Einsteinvergelijkingen. Echter, de ruimte buiten het gat is onveranderd, waardoor g en g' op dat gebied overeenkomen. Het lijkt daarom alsof twee verschillende metrieken bepaald worden door de Einsteinvergelijkingen en het gebied buiten het gat, waardoor de theorie niet

deterministisch is. Deze analyse is echter niet geldig voor een relationist, omdat die zou stellen dat de relaties binnen beide gaten hetzelfde zijn: de metriek g en g' hangen samen via een isometrie. Er zou daarom geen sprake zijn van indeterminisme [28, 40]. Voor een toegankelijke en uitgebreidere uitleg van deze discussie zie [41]. Ten gevolge van dit argument is het zinvoller om te kijken naar het beginwaardeprobleem van ART, omdat de niet-uniciteit van uitbreidingen niet afhankelijk is van diffeomorfismen, waardoor het probleem geldt voor zowel substantialisten als relationisten.

2.3 Perspectieven op ruimte-tijden

Er zijn twee manieren waarop men ruimte-tijden kan conceptualiseren: men kan een ruimte-tijd als gegeven zien, of als een ontwikkeling van een begintoestand. In deze sectie zal ik verdedigen waarom ik ruimte-tijden zal bespreken als een ontwikkeling van een begintoestand.

Als men de ruimte-tijd als gegeven ziet, dan stelt men dat de ruimte-tijd al vast staat. Er is een complete ruimte-tijd M gegeven met een metriek g en massa-energie inhoud T die voldoet aan de Einsteinvergelijkingen. Dit komt overeen met het idee van een blok universum, waarin de tijdlijn als statisch en onveranderlijk wordt gezien. Er is geen verschil tussen de toekomst, het heden of het verleden, en er is een statisch beeld van het universum [42–44].

Als men stelt dat het universum volgt uit een ontwikkeling van een begintoestand, dan betekent dit dat de gehele toekomst van het universum volgt uit de eigenschappen van de begintoestand en de Einsteinvergelijkingen. Deze begintoestand is zelf een vier-dimensionale ruimte-tijd: het bestaat uit een collectie punten U met een metriek g' en massa-energie inhoud T' . Dit wordt ook wel een *initieel segment* of *beginsegment* genoemd. Je zou verwachten dat het beginsegment bestaat uit punten die een vaste tijd t hebben, waardoor het beginsegment drie-dimensionaal is. Het is inderdaad mogelijk om een beginsegment op deze manier te definiëren en deze aanpak is equivalent aan de aanpak van deze scriptie. Om de lezer nog meer technische details te besparen, neem ik hier een vier-dimensionaal beginsegment. Deze begintoestand ontwikkelt zich door middel van de Einsteinvergelijkingen, naar een grotere ruimte-tijd M met metriek g en massa-energie inhoud T . De begintoestand is nog steeds te vinden in deze grotere ruimte-tijd: U zit in M , waar de metriek en massa-energie inhoud overeenkomen. Er zijn bepaalde voorwaarden waar U en T aan moeten voldoen, voordat ze beschouwd kunnen worden binnen deze methode [32, 45]. Voor deze condities en een meer gedetailleerde uitleg van de tweede aanpak, zie Sectie 4.

Ik zal het verschil tussen de twee methoden illustreren door te kijken naar de baan van een afgevuurde kanonskogel. De baan van de kogel voldoet aan de bewegingswetten van Newton. Als men de baan van de kogel wil analyseren, dan kan men de baan als gegeven zien. De plek van de kogel op elk moment wordt weergegeven en er is geen onderscheid tussen een nu of een toekomst. Deze aanpak komt overeen met de eerste “blok universum” methode. Men kan ook beginnen met de beginplek en met krachten op de kogel om zo de baan uit te rekenen. Dit is een dynamische manier om te kijken naar de baan van een kogel, waarbij er gesproken wordt van een toekomst die zich ontwikkelt vanuit een begintoestand. Deze aanpak komt overeen met de tweede methode.

Het is belangrijk om de nuances van het verschil tussen het beginwaardeprobleem binnen ART en de kogelbaan analogie te bespreken. In de analogie van de kogelbaan staat de ruimte-tijd vast: de baan van de kogel ontwikkelt zich op een vaste achtergrond. Men zou de baan kunnen zien als een stippellijn op een plat papier, waar het platte papier de ruimte-tijd is. Echter, in het geval van ART, is het juist de ruimte-tijd zelf die zich ontwikkelt en verandert. De ruimte-tijd is dynamisch en voldoet aan een natuurwet: het stukje papier kan krommen en verandert met de tijd mee. Een stippellijn die op het papier getekend stond verandert alleen in de mate waarin het papier wordt vervormd.

Een analogie die directer toepasbaar is op ART zou de pannenkoekenstapel zijn. In de eerste “blok

universum” methode wordt de pannenkoekenstapel als gegeven zien: elke schijf is al beschreven en chronologisch geplaatst. In het geval van de tweede methode heeft de pannenkoekenstapel een beginschijf. Vervolgens bepalen de Einsteinvergelijkingen samen met de beginschijf hoe de volgende schijven eruit moeten zien, waardoor uiteindelijk een pannenkoekenstapel wordt gecreëerd.

Tijdens de uitleg van de tweede methode, is er kort genoemd dat een ruimte-tijd (U, g', T') zich bevindt in een andere (grotere) ruimte-tijd (M, g, T) . Om determinisme scherp te kunnen definiëren, zal ik dit exacter definiëren. Als het mogelijk is om een ruimte-tijd U in een andere (grotere) ruimte-tijd M te plaatsen, dan is er een **inbedding**. Een inbedding is een afbeelding i van U naar M die de structuur behoudt van U die volgt uit de metrieke. Als het bijvoorbeeld mogelijk is om de afstand te definiëren in U en M , dan is de afstand tussen de punten p en q in U hetzelfde als de afstand tussen $i(p)$ en $i(q)$ in M . Andere structuren die behouden blijven zijn de kromming in de punten, de causale relaties tussen punten, etc.²⁴ Alle punten van U worden naar unieke punten van M gestuurd: als p een ander punt is dan q in U , dan is $i(p)$ een ander punt dan $i(q)$ in M . Tevens, niet alle punten van M hoeven bereikt te worden. De ruimte $i(U)$ in M hoeft niet dezelfde dimensie te hebben als M , maar wel dezelfde dimensie als U [30]. Dit betekent dat een inbedding een isometrie is tussen U en $i(U)$. Een voorbeeld van het plaatsen van een (kleinere) ruimte-tijd binnen een (grotere) ruimte-tijd, is het plaatsen van een twee-dimensionale schijf in de eerder genoemde drie-dimensionale pannenkoekenstapel.

Het kernpunt van deze scriptie is om het beginwaardeprobleem binnen ART te analyseren. Het is namelijk mogelijk om een unieke maximale ruimte-tijd met bepaalde causaliteitscondities te creëren uit de begintoestand. Echter, het is soms mogelijk om deze ruimte-tijd nog verder uit te breiden door middel van de Einsteinvergelijkingen, waardoor bepaalde uniciteit en causaliteitscondities niet meer gelden. Het is mogelijk om deze verdere uitbreidingen te beschouwen als men de ruimte-tijd als gegeven ziet. Echter, men kan ook de ruimte-tijd als onfysisch beschouwen, omdat bepaalde causaliteitscondities niet gelden. Als men het probleem van uitbreidingen beschouwt binnen de blokuniversum methode, wordt het probleem dus gereduceerd tot de vraag welke causaliteitsaannames men doet op de ruimte-tijden [47]. Als men het probleem analyseert via de blokuniversum methode, verliest men daarmee de nuances van het ontstaan van de uitbreidingen en de eigenschappen die ze hebben. Ik zal daarom het universum beschouwen als een ontwikkeling van een begintoestand.

²⁴Voor de natuurkundigen: een inbedding is een gladde injectieve afbeelding i tussen twee manifolds (M, g) en (M', g') met een gladde inverse $\phi^{-1} : \phi(M) \rightarrow M$. De metrieke g moet behouden worden, wat betekent dat $g' = i^*g$, waar i^* de pullback is. Voor een gedetailleerde uitleg van een embedding en pullback zie, respectievelijk, hoofdstuk 4 en 12 in [46].

3 Determinisme

Voordat ik bespreek of ART deterministisch is, moet er gekozen worden welke definitie van determinisme ik hanteer. Grof gezegd betekent determinisme bij een natuurkundige theorie dat alle gebeurtenissen noodzakelijk volgen uit het toepassen van de natuurwetten op een vroegere toestand [48]. Ik zal over verschillende definities van determinisme uitweiden om vervolgens te verdedigen waarom ik kies voor een (zeer recente) definitie van Halvorson, Manchak en Weatherall.

3.1 Laplace en determinisme

Een veelgebruikte definitie van determinisme binnen de wetenschap en filosofie is die van Laplace [49]. Laplace stelt determinisme gelijk aan een theoretisch mogelijke voorspelbaarheid, waarbij hij gebruik maakt van een hypothetische (super)intelligentie.²⁵

Definitie 3.1. Een theorie is **Laplaciaans deterministisch** als de huidige staat van het universum een effect is van een antecedente/vooraangaande staat van het universum. Een intelligent wezen dat alle krachten op, snelheden van, en posities van deeltjes op een bepaald moment zou weten, zou met één formule de beweging van alles in het universum, en daarmee zowel de toekomst als het verleden, compleet en accuraat kunnen voorspellen.

In deze definitie gaat het over een hypothetische (super)intelligentie die buiten het systeem staat. Dit betekent dat het mogelijk is dat mensen de formule (nog) niet kennen. De definitie houdt zich dus bezig met de vraag of het universum *in principe* deterministisch is.

Een exactere formulering, die ook makkelijker toe te passen is op ART, is Earmans definitie, die gebruikt maakt van mogelijke werelden. Earman stelt dat een ‘wereld’ een vier dimensionale ruimte-tijd is die bestaat uit gebeurtenissen die zijn gebeurd, nu gebeuren, en nog zullen gebeuren [16]. De ruimte-tijden zijn dus manifolds en met een metriek (M, g) , en worden door Earman weergegeven als W . Mogelijke werelden zijn verzamelingen van mogelijke gebeurtenissen die mogelijke alternatieve geschiedenissen van de werkelijke wereld representeren. Een wereld W is een fysieke wereld als die voldoet aan de natuurwetten van de werkelijke wereld (in onze context zijn dit de Einsteinvergelijkingen zonder materie en massa: $T = 0$).

Definitie 3.2. Laat $\mathcal{W}$ een collectie van alle mogelijke fysieke werelden zijn en neem een wereld W uit deze collectie. Een wereld W is **Earman-Laplace deterministisch** als het volgende geldt: wanneer een andere wereld W' uit de collectie op een specifiek moment exact overeenkomt met W , dan zijn W en W' hetzelfde op elk ander moment.

Voor deze definitie moet het mogelijk zijn om te spreken van gebeurtenissen die gelijk plaatsvinden. Anders gezegd, het universum zou uit een opstapeling van drie-dimensionale **tijdsneden** bestaan. Dit betekent dat men momentopnamen van het hele universum kan hebben: op elk moment t is er een groep punten die samen een ruimte vormen. Echter, binnen ART is het niet vanzelfsprekend dat zo’n tijdsfunctie bestaat²⁶ en ook nog uniek is [17].

3.2 Popper en determinisme

Het is ook mogelijk om determinisme gelijk te stellen aan voorspelbaarheid, zonder gebruik te maken van een superintelligent wezen dat de exacte oorspronkelijke toestand van het universum kan weten.

²⁵In de literatuur wordt deze superintelligentie ook wel Laplace’s demoon genoemd.

²⁶Voor de natuurkundigen: een voorbeeld van een model van ART waarin het niet mogelijk is om een tijdsfunctie te maken is een Gödel ruimte [50].

Definitie 3.3. Een theorie is **Popper deterministisch** als de toekomst van een gesloten systeem van binnen met elke gespecificeerde graad van precisie vanuit een begintoestand voorspeld kan worden. De voorspelling volgt uit de wetten van de wetenschappelijke theorie en een oorspronkelijke toestand die bekend is met een bepaalde mate van onzekerheid.

Het superintelligente wezen moet voorspellingen kunnen doen binnen het systeem en komt daardoor meer overeen met een “superwetenschapper” [51]. Dit verschilt van de superintelligentie van Laplace, aangezien deze buiten het systeem staat.

Het probleem met Poppers definitie is dat er gebruik gemaakt wordt van gesloten systemen. De vraag is echter of de begintoestand benadering van de ruimte-tijd voldoet aan de voorwaarden van een gesloten systeem. Een gesloten systeem heeft de eigenschap dat er geen interactie is met dingen buiten het systeem en energie of materie niet uit het systeem ontsnapt. Hoewel er geen interactie is met externe krachten of materie, kan straling, zoals zwaartekrachtsgolven, “ontsnappen” naar oneindig. Energie blijft daarom niet binnen een eindig gebied, waardoor het de vraag is of het systeem beschouwd kan worden als een gesloten systeem.

Andere problemen met Poppers definitie volgen uit zijn gebruik van een waarnemer. Uit de Speciale Relativiteitstheorie (SRT) blijkt al dat het voor een waarnemer in de wereld niet mogelijk is om genoeg informatie te verkrijgen om accurate voorspellingen te maken voor toekomstige gebeurtenissen. Het is namelijk mogelijk dat een punt in de toekomst causaal verbonden kan zijn met punten die niet causaal verbonden zijn met ons, waardoor we niet genoeg informatie kunnen hebben om de toekomst te voorspellen [17, 52]. Als een visualisatie van dit idee zou men weer kunnen kijken naar Afbeelding 1. Als ik een ander punt op de x-as kies en weer een lichtkegel teken, dan zal er een overlap zijn van de kegels boven het horizontale vlak. Zoals de kegel laat zien zijn er dan toekomstige gebeurtenissen die wij waar zouden kunnen nemen, maar beïnvloed worden door punten die ruimteachtig van ons verwijderd zijn. Een voorbeeld van zo’n punt is het gekozen punt op de x-as. Aangezien deze punten ruimteachtig verwijderd zijn van ons, kunnen we geen informatie hebben over deze punten, waardoor het niet mogelijk is om toekomstige gebeurtenissen te voorspellen. Aangezien Poppers definitie te veel afhankelijk is van de waarnemer, is deze definitie niet toepasbaar op de vraag of ART *in principe* deterministisch is.

Het laatste probleem is dat Popper stelt dat determinisme en voorspelbaarheid hetzelfde zijn. Echter, determinisme gaat over een theorie die de toekomst vastlegt, niet over de kennis die een individu heeft over de toestand van het universum en de natuurwetten. Het is bijvoorbeeld mogelijk dat het universum wordt beschreven door een deterministische theorie, terwijl het individu praktisch geen voorspellingen kan doen (door bijvoorbeeld chaotische processen waarin een klein verschil in de begintoestand grote gevolgen hebben voor de eindtoestand). Poppers definitie lijkt daarom niet de kern te raken over de vraag of ART als theorie *in principe* deterministisch is.

3.3 Butterfield en determinisme

Butterfield beschrijft twee groepen definities die gedefinieerd zijn binnen ART. Hij heeft een eerdere definitie die hij uitwerkt in *Determinism and indeterminism* [53]. In later werk geeft Butterfield twee meer wiskundige definities van determinisme die gebruik maken van isometrieën [28, 40].

Butterfields eerdere definitie maakt gebruik van modellen van een wetenschappelijke theorie. Hij definieert een model van een theorie als een opvolgende reeks van toestanden van geïsoleerde systemen die de wetten van de theorie volgen. Toestanden moeten aan twee voorwaarden voldoen: een toestand moet een intrinsieke eigenschap zijn en moet maximaal zijn. Deze eigenschappen zijn niet expliciet gedefinieerd. Echter, het doel is om eigenschappen toe te laten die niet van tevoren het verloop van de toekomst vastleggen. Een eigenschap moet geïntroduceerd worden voor een reden die los staat van

determinisme, anders zou determinisme a priori worden aangenomen. Tegelijkertijd moet de toestand bestaan uit de logisch sterkste consistente eigenschappen van de theorie, zodat de beschrijving uit de maximale mogelijke informatie bestaat [53]. Binnen ART betekent dit dat een model een ruimte-tijd is die voldoet aan de Einsteinvergelijkingen. De ruimte-tijd wordt opgedeeld in ‘instantane sneden’, ook wel tijdsneden genoemd: verzamelingen van punten die hetzelfde tijd-coördinaat hebben. De eigenschappen van een punt p zijn de kromming, en energie- en materie-inhoud op dat punt p .

Definitie 3.4. Een theorie is **vroeg Butterfield deterministisch** wanneer geldt: als twee modellen een tijdsnede hebben die hetzelfde zijn tot op isometrie, dan is er een isometrie tussen alle toekomstige tijdsneden.

Butterfields eerste definitie van determinisme heeft meerdere problemen. Ten eerste is deze definitie vaag, omdat de definities van toestanden en intrinsieke eigenschappen niet uitgelegd worden. Ten tweede gaat deze definitie uit van geïsoleerde systemen. Echter, zoals we zagen bij Poppers definitie, is het niet duidelijk of we spreken over geïsoleerde systemen wanneer we ruimte-tijden beschouwen als een beginwaardeprobleem. Daarnaast gaat deze definitie (net zoals Earman's definitie) uit van tijdsneden, waardoor er wordt aangenomen dat er een specifieke tijdsfunctie bestaat. Zoals ik al heb besproken, is de mogelijkheid van zo'n beschrijving van tijd niet evident voor elk model van ART.

Butterfields latere definities maken geen gebruik van gelijktijdigheid. Hij bouwt verder op Lewis' definitie van determinisme die gebruik maakt van afwijkende mogelijke werelden [54]. Butterfield definieert een model voor ART als een ruimte-tijd M met geometrische objecten O_i . Deze geometrische objecten zijn de metriek g en de energie- en materie-inhoud T op ieder punt van M .²⁷ Een model wordt door Butterfield weergegeven als $\langle M, O_i \rangle$. De eerste definitie van Butterfields latere werk wordt ook wel **DM1** genoemd en is afhankelijk van eigenschappen S die een gebied in de ruimte-tijd kan hebben.

Definitie 3.5 (DM1). Neem twee willekeurige modellen $\langle M, O_i \rangle$ en $\langle M', O'_i \rangle$ waarvoor een isometrie ϕ tussen M en M' . Stel er is een gebied A in M die voldoet aan conditie S , bijvoorbeeld het hebben van dezelfde waarde voor het tijdscoördinaat. De theorie is **S -deterministisch** als voor zulke modellen de volgende stelling geldt: als $\phi(A)$ ook voldoet aan S en de geometrische objecten O'_i voor de punten $\phi(p) = p'$ in $\phi(A)$ dezelfde waarden hebben als O_i voor p op A , dan hebben de geometrische objecten O'_i voor de punten $\phi(q) = q'$ in heel M' dezelfde waarden als O_i voor q uit heel M .

Grofweg betekent deze definitie dat als de structuur overeenkomt tussen twee gebieden A en A' van type S die niet te onderscheiden zijn (want er is een isometrie ϕ tussen de twee gebieden), dan moet de structuur van de rest van de ruimte-tijden ook niet te onderscheiden zijn (de structuur van de ruimte-tijden worden gegeven door de geometrische objecten).

Butterfield geeft ook een sterkere definitie van determinisme die **DM2** wordt genoemd. Deze definitie volgt een soortgelijke structuur als **DM1**.

Definitie 3.6 (DM2). Neem twee willekeurige modellen $\langle M, O_i \rangle$ en $\langle M', O'_i \rangle$, waar M een gebied A heeft van type S en M' een gebied A' bevat van type S . Stel er is een isometrie ϕ tussen A en A' . De theorie is **S -deterministisch** als voor zulke modellen de volgende stelling geldt: als de geometrische objecten O'_i voor de punten $\phi(p) = p'$ in $\phi(A)$ dezelfde waarde als O_i voor p op A , dan

²⁷Voor de natuurkundigen: Butterfield neemt de verbinding ∇ ook op als een geometrisch object. Echter, deze nuance is niet nodig voor het begrijpen van zijn definitie. Het is daarnaast gewoonlijk bij ART om de Levi-Civita connectie te nemen die uniek volgt uit comptabiliteit met de metriek g en de torsievrijheid conditie [55].

is er een isometrie ψ tussen M en M' , zodanig dat $\psi(A) = A'$ en de geometrische objecten O_i hebben voor de punten $\psi(q) = q'$ in heel M' dezelfde waarde als O_i voor q uit heel M .

Het verschil tussen **DM1** en **DM2** is dat in het tweede geval ϕ niet gedefinieerd hoeft te zijn op geheel M en M' en dat ψ niet overeen hoeft te komen met ϕ op A en A' . Dit betekent dat er hier wordt geïmpliceerd dat er een lokale equivalentie is op een bepaald gebied die een globale equivalentie van modellen impliceert, wat een sterkere vorm van determinisme is [28, 40].

Noch **DM1** noch **DM2** zijn bevredigende definities van determinisme, omdat Belot heeft laten zien dat er intuïtief indeterministische processen zijn die voldoen aan **DM1** en/of **DM2** [56]. Belot bespreekt daarna twee andere definities van determinisme die verder bouwen op Butterfields definities, maar komt ook hier tot de conclusie dat er voorbeelden zijn van indeterministische processen die voldoen aan de nieuwe definities [57].

3.4 Halvorson, Manchak en Weatherall over determinisme

Hoewel Belot zelf negatief stond tegenover zijn voorgestelde definities van determinisme, hebben Halvorson, Manchak en Weatherall een positievere blik op Belots laatste definitie [58]. Ze passen deze laatste definitie een beetje aan, maar laten zien dat de definities equivalent zijn. Vervolgens laten ze zien dat Belots tegenvoorbeelden niet effectief zijn [58].

Halvorson's et al. definitie van determinisme maakt gebruik van beginsegmenten en duplicaties.

Definitie 3.7 (Halvorson-Manchak-Weatherall). Laat M een ruimte-tijd zijn die voldoet aan de condities van een theorie. Laat U een initieel segment zijn van de ruimte-tijd, dat ingebed wordt in M via i . Laat M' een fysisch mogelijke ruimte-tijd ten opzichte van M zijn, met initieel segment U' dat ingebed wordt via i' . Stel, er is een isometrie ϕ van U naar U' . Een theorie is deterministisch als er een unieke duplicatie ψ van M naar M' bestaat.²⁸

Deze definitie houdt in dat de begintoestand U uniek de rest van de ruimte-tijd M bepaalt, op equivalentie na: als er een begintoestand U' is die equivalent is aan U , dan is de uitbreiding van U' , de ruimte-tijd M' , equivalent aan M .

Er zullen twee concepten moeten worden uitgelegd: een “fysisch mogelijke ruimte-tijd” en een “duplicatie”. Een ruimte-tijd M is fysisch mogelijk ten opzicht van een ruimte-tijd M' als ze dezelfde natuurwetten volgen. In dit geval zijn de natuurwetten de Einsteinvergelijkingen. De definitie van duplicatie ψ is minder rechtaan en is meer omstreken binnen het determinisme debat. Lewis stelt dat twee objecten duplicaten van elkaar zijn als de objecten (1) exact dezelfde perfect natuurlijke eigenschappen hebben, en (2) de onderdelen in correspondentie met elkaar kunnen worden gebracht zodat de gecorrespondeerde delen dezelfde perfect natuurlijke eigenschappen hebben en dezelfde perfect natuurlijke verhoudingen hebben [54, 59, 60].²⁹ Echter, de scheidslijn tussen perfect natuurlijke en onnatuurlijke relaties is omstreken en kan leiden tot tegenintuïtieve conclusies omtrent determinisme [56, 57]. Belot bouwt voor op Lewis' definitie en maakt de duplicatie ψ explicieter. Belot definieert

²⁸Origineel gebruiken Halvorson, Manchak en Weatherall, en Belot “world W ”, wat vertaald zou moeten worden als “wereld W ”. Echter, omdat ik het probleem van determinisme binnen ART bespreek, kies ik om het woord “ruimte-tijd M ” te gebruiken. Daarnaast gebruiken ze voor de duplicatie het teken g , maar om de verwarring met de metriek te voorkomen, kies ik voor het teken ψ .

²⁹Ter illustratie: stel het object bestaat uit twee stenen die vastgebonden aan elkaar zijn. Voorbeelden van perfect natuurlijke eigenschappen kunnen in dit geval de massa of grootte van het object zijn. De componenten van de duplicatie, zoals de stenen, moeten ook dezelfde massa en grootte hebben van het originele object. De duplicatie moet ook dezelfde perfect natuurlijke verhouding tussen de stenen hebben: de stenen in de duplicatie moeten aan elkaar gebonden zijn met een touw.

ψ als een afbeelding die alle punten p van M stuurt naar een uniek punt p' van M' , waarbij elk punt in M' wordt bereikt. Dit zorgt er voor dat M en M' even groot zijn en er een één op één verhouding is tussen de ruimte-tijden. De afbeelding ψ moet drie andere eigenschappen behouden (1) alle ruimte-tijdelijke relaties (zoals de afstand tussen twee punten), (2) de perfect natuurlijke eigenschappen van de ruimte-tijd punten en (3) de toestanden van deeltjes op verschillende momenten [57]. De afbeelding lijkt dus een isometrie te zijn met een paar extra eigenschappen. Het is moeilijk om de afbeelding te categoriseren, omdat Belot niet verder uitwerkt wat perfect natuurlijke eigenschappen van ruimte-tijdpunten zijn. Halvorson, Manchak en Weatherall stellen dat het bespreken van details rondom duplicaties geen extra informatie biedt, omdat de notie van een duplicatie contextueel is: het zou moeten worden beschreven door een precieze formulering van een theorie [58].

Het onderliggende idee van Halvorson-Manchak-Weatherall determinisme komt overeen met Butterfields definities van determinisme: equivalentie op een lokaal gebied impliceert een globale equivalentie. Echter, bij Halvorson-Manchak-Weatherall wordt expliciet het beginsegment gebruikt in plaats van gebieden met eigenschap S, zoals bij **DM1** en **DM2**. Daarnaast wordt er bij Halvorson-Manchak-Weatherall determinisme een duplicatie gebruikt om de globale ruimte-tijden te vergelijken. Deze duplicatie hoeft niet een isometrie te zijn, terwijl bij **DM1** en **DM2** een isometrie wordt gekozen.

Binnen deze scriptie wordt de duplicatie ψ binnen ART als een isometrie gedefinieerd. Ik neem namelijk aan dat relationisme de juiste interpretatie is van ART. Dit betekent dat ik een ruimte-tijd zie als een verzameling van relaties. Als een punt anders genoemd wordt in een andere ruimte-tijd, maar de relaties tussen alle objecten blijven hetzelfde, dan zijn de ruimte-tijden (voor ons) fysisch “hetzelfde”. De ene ruimte-tijd is dan een duplicatie van een andere ruimte-tijd in de zin van Lewis, omdat de equivalent zijn. Dit komt exact overeen met de definitie van isometrie.

Het is ook mogelijk om een pluraliteit van definities van determinisme te verdedigen door gebruik te maken van gebieden binnen de ruimte-tijd, zoals Doboszewski doet [61, 62]. Hij werkt verder op Butterfields definities **DM1** en **DM2** [53]. Echter, hij past de definitie aan om een set condities C en C' toe te voegen aan de ruimte-tijden (M, g) en (M', g') . Hoewel deze definities goed passen bij de bespreking van maximale ontwikkelingen binnen ART, is het buiten het bereik van deze scriptie om de wiskunde en de details uit te leggen. Daarnaast voldoet de definitie van Halvorson, Manchak en Weatherall om het beginwaardeprobleem van ART te bespreken.

4 Het beginwaardeprobleem binnen ART

In deze sectie zal ik uitleggen wat het voor een ruimte-tijd betekent om als een oplossing van een beginwaardeprobleem te worden beschreven. Daarna zal ik uitleggen hoe deze ruimte-tijden binnen ART soms nog verder uitgebreid kunnen worden.

4.1 Formulering van het beginwaardeprobleem

Om een systeem te beschrijven als een beginwaardeprobleem zijn er twee aspecten nodig: (1) een begintoestand en (2) wetten die bepalen hoe het systeem zich verder ontwikkelt. Ik zal eerst de historische context van deze aanpak binnen ART bespreken, daarna de voorwaarden voor de begintoestand, en als laatste de ontwikkeling van het systeem.

Het idee om de Einsteinvergelijkingen te zien als ontwikkelingsvergelijkingen bestond al in het werk van Einstein zelf, die deze aanpak gebruikte om te beargumenteren dat zwaartekrachtsgolven bestaan en propageren met de lichtsnelheid. In 1916 publiceerde Einstein het bewijs hiervoor, maar dit bewijs was gebaseerd op een specifieke coördinatenkeuze. Eddington wees in 1923 deze afhankelijkheid op coördinaten en stelde dat het bewijs daarom fysisch dubieus was. Als antwoord op Eddington ontwikkelden Darmois in 1923 coördinatenstelsels waarin de Einsteinvergelijkingen de vorm van golfvergelijkingen aannemen. Darmois bewees daarnaast dat onder bepaalde restricties de metriek en de afgeleide van de metriek op een bepaald soort drie-dimensionale ruimtelijke submanifold³⁰ de Einsteinvergelijkingen lokaal de oplossing bepalen in reële analytische contexten. Stellmacher bouwde in 1937 hierop voort en toonde aan dat oplossingen met identieke beginvoorwaarden met elkaar samenhangen via een coördinatentransformatie. Dit vormde een geometrisch bewijs dat zwaartekrachtsgolven met de lichtsnelheid propageren. Hij gebruikte zogenaamde isotherme coördinaten waardoor het mogelijk was om klassieke PDE-technieken te gebruiken. Lichnerowicz vatte deze ontwikkelingen samen en benadrukte dat er nog geen uitbreiding was naar niet-analytische contexten. Deze uitbreiding werd gebracht door Yvonne Choquet-Bruhat die aan dit probleem werkte in 1950-1970 [63]. In haar werk in 1969 met Geroch bewees ze uiteindelijk het bestaan, de uniciteit en stabiliteit van oplossingen van het beginwaardeprobleem in ART voor vacuüm ruimte-tijden ($T = 0$) [18].³¹

Een **Cauchy-oppervlak** Σ in een ruimte-tijd M is een drie-dimensionale (deel)ruimte van M waarvoor geldt dat elke onuitbreidbare causale kromme het oppervlak exact één keer snijdt. Dit betekent dat er geen causaal pad is binnen de ruimte-tijd dat niet door Σ heen gaat. Dit betekent dat het Cauchy-oppervlak een soort “perfecte momentopname” van het universum is.

De begintoestand van de ruimte-tijd kan worden gegeven door een vier-dimensionale manifold U met een metriek g . De eerste voorwaarde voor de begintoestand is dat de metriek g voldoet aan de Einsteinvergelijkingen [18]. De tweede voorwaarde is dat de manifold U de vorm heeft van een vier-dimensionale pannenkoekenstapel, wat betekent dat het bestaat uit een “opeenstapeling” van drie-dimensionale

³⁰Voor de natuurkundigen: het gaat hier om een ruimtelijke hypersurface. Het probleem wordt daarnaast geanalyseerd in de reële analytische context.

³¹Het is belangrijk om te begrijpen dat het hier gaat om de ontwikkeling van de ruimte-tijd zelf en niet krommen of functies op de ruimte-tijd. Dit laatste geval wordt ook het karakteristiek beginwaardeprobleem genoemd. De beginwaarden worden gedefinieerd op een specifiek soort drie-dimensionaal oppervlak in de ruimte-tijd (een hypersurface) en moeten voldoen aan bepaalde beperkingsvergelijkingen. Vervolgens kunnen de krommen of functies verder ontwikkelen door het oplossen van evolutievergelijkingen met hulp van de beginwaarden. Zowel de beperkingsvergelijkingen als de evolutievergelijkingen volgen uit de Einsteinvergelijkingen. Deze methode is ontstaan na het werk van Choquet-Bruhat en Geroch en heeft veel vooruitgang genoten sinds de jaren negentig. Een uitgebreidere discussie hierover valt buiten het bereik van dit verslag, maar is te vinden in onder andere in hoofdstuk 7 in [18]

ruimten.³² De derde voorwaarde is dat U een **Cauchy-oppervlak** heeft.³³

De Einsteinvergelijkingen geven vervolgens partiële differentiaalvergelijkingen die samen met de begintoestand (U, g) een oplossing geven voor een ruimte-tijd (M, g) die groter is dan (U, g) .³⁴ De oplossing (M, g) wordt ook wel een **Cauchy-ontwikkeling** of **globaal hyperbolische ontwikkeling** genoemd. Er is een unieke Cauchy-ontwikkeling die maximaal $(M_{\max}, g_{\max})$ is, in de zin dat elke andere Cauchy-ontwikkeling (M, g) bevat kan worden in M door een isometrie ψ van M naar $M_{\max}$ die de tijdsoriëntatie, metriek en begintoestand behoudt. Deze ontwikkeling wordt ook wel een **Maximale Globaal Hyperbolische Ontwikkeling** genoemd en afgekort tot MGHD. Een belangrijke nuance is dat *maximaal* niet betekent dat het een maximale ontwikkeling is van de Einsteinvergelijkingen zelf of ontwikkeling van een algemene manifold. Er wordt bedoeld dat als $(M_{\max}, g_{\max})$ binnen een grotere ruimte-tijd (M', g') bevat kan worden door middel van een isometrie ψ , dan zal $\psi(U) \subset M'$ geen begintoestand zijn die M' bepaalt. Dit betekent dat als de MGHD binnen een andere ruimte-tijd (M', g') geplaatst kan worden, dat er óf een groter beginsegment in M' bestaat die de ruimte-tijd (M', g') bepaalt óf dat er geen beginsegment in de ruimte-tijd (M', g') bestaat die de ruimte-tijd bepaalt. Simpelweg, het beginsegment van de MGHD bevat niet meer informatie waardoor een grotere ruimte-tijd uniek bepaald wordt. Choquet-Bruhat and Geroch hebben bewezen dat een maximale globaal hyperbolische ontwikkeling uniek is op isometrie na, als er geen materie en energie is in het universum ($T = 0$) [66, 67].

Globaal hyperbolische ruimte-tijden (M, g) hebben de sterkste causale eigenschappen die een ruimte-tijd kan hebben [47]. Ten eerste zijn er geen causale lussen in de ruimte-tijd. Dit betekent dat er geen causale kromme is die terugkeert naar zichzelf en zo een lus vormt. Het bestaan van een causale lus zou betekenen dat bijvoorbeeld een deeltje terug in de tijd zou kunnen gaan. Door deze vorm van tijdreizen zou iets in de toekomst iets in het verleden kunnen beïnvloeden, wat causaliteit in de weg staat [18, 68]. Ten tweede kan de ruimte-tijd beschreven worden als een opeenstapeling van drie-dimensionale Cauchy-oppervlakken. Deze structuur wordt ook wel een **foliatie** genoemd en maakt het mogelijk om de ruimte-tijd te beschrijven als een opeenvolging van “perfecte moment-opnamen”. Dit betekent dat binnen deze ruimte-tijd een tijdsfunctie gedefinieerd kan worden. De resulterende MGHD heeft dus sterke causale eigenschappen, die niet elk model van ART heeft. De laatste eigenschap heet lokale causaliteit en stelt dat causale interacties alleen lokaal plaatsvinden. Stel er zijn twee punten p en q in de ruimte-tijd die causaal met elkaar verbonden kunnen worden. Lokale causaliteit stelt dat de invloed van punten p op punt q volledig wordt bepaald door het causale verleden van q . Dit betekent dat er geen invloeden van buitenaf mogelijk zijn, zoals oneindig verre gebieden of gebieden die niet causaal verbonden zijn met p en q .³⁵ Lokale causaliteit garandeert daarmee dat alle informatie die van p naar q gaat binnen een eindig gebied blijft.³⁶ Ruimte-tijden die lager in de causaliteitshiërarchie staan,

³²Voor de natuurkundigen: dit betekent dat topologisch $U = I \times \Sigma$, waar Σ een drie-dimensionale submanifold is. Gewoonlijk krijgt de metriek lokaal dan de vorm van $ds^2 = -Ndt^2 + h_{ab}dx_a dx_b$, waar h_{ab} de metriek is op Σ .

³³Voor de natuurkundigen: het is ook mogelijk om een begintoestand te beschrijven door middel van louter een drie-dimensionaal Cauchy-oppervlak Σ . De beginwaarden zijn dan de ruimtelijke drie-dimensionale metriek h_{ab} en de extrinsieke kromming K_{ab} , die ook wel de tweede fundamenteelvorm wordt genoemd. Het is mogelijk om de vier-dimensionale metriek g en het koppel h en K expliciet aan elkaar te relateren, zie [64, 65].

³⁴Voor de natuurkundigen: in het geval dat je een Cauchy-oppervlak pakt als beginwaarde, dan worden de Einsteinvergelijkingen gesplitst in beperkingsvergelijkingen van Gauss-Codazzi en de ontwikkelingsvergelijkingen.

³⁵Het feit dat causaliteit lokaal is betekent dus niet dat alleen punten die dicht bij elkaar staan causaal invloed op elkaar kunnen hebben. Gebeurtenissen die ruimtelijk ver van elkaar verwijderd zijn, zoals gebeurtenissen aan verschillende kanten van een sterrenstels, kunnen nog steeds elkaar beïnvloeden, zolang er een tijdachtige of lichtachtige kromme bestaat die de punten verbindt. Hetzelfde geldt voor gebeurtenissen die temporeel ver van elkaar verwijderd zijn.

³⁶Voor de natuurkundigen: lokale causaliteit heeft te maken met het feit dat de causale diamanten van deze ruimte-tijd compact zijn. Ter herinnering, de verzameling $J^+(p)$ bestaat uit punten die bereikt kunnen worden vanaf p door toekomstgerichte causale krommen. De verzameling $J^-(q)$ bestaat uit punten die bereikt kunnen worden door verleden-gerichte causale krommen die beginnen in q . Het gebied van punten die zowel in $J^+(p)$ als $J^-(q)$ zitten zijn compact in

zoals causaal continue ruimte-tijden, voldoen in het algemeen niet aan lokale causaliteit [47].³⁷

4.2 Uitbreidingen van MGHD

Het is soms mogelijk om een ruimte-tijd die voortvloeit uit een maximale ontwikkeling van het beginwaardeprobleem nog verder uit te breiden. Deze ruimte-tijden voldoen nog steeds aan de Einsteinvergelijkingen en zijn daarom geldige modellen binnen de Algemene Relativiteitstheorie. Ik zal twee voorbeelden bespreken: Kruskal uitbreidingen van niet-roterende zwarte gaten en Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen van roterende zwarte gaten.

4.2.1 Singulariteiten en zwarte gaten

Voordat ik de uitbreidingen van MGHD's bespreek, zal ik zowel singulariteiten als zwarte gaten moeten uitleggen. Om deze concepten uit te leggen en te definiëren, zal ik eerst de concepten van geodeten en onvolledigheid introduceren. Hierna bespreek ik de gebieden van ruimte-tijden met zwarte gaten en de eigenschappen van singulariteiten.

Een **geodeet** γ is een specifieke kromme die gedefinieerd kan worden op M en geen versnelling heeft.³⁸ Dit soort kromme kan daarom gebruikt worden om de paden van deeltjes te beschrijven die een vrije val ervaren. Dit betekent dat de beweging van de deeltjes bepaald wordt door de kromming van de ruimte-tijd en dus alleen bepaald wordt door de zwaartekracht. Analoog aan krommen, kunnen geodeten opgedeeld worden in drie verschillende groepen: tijdsachtige, lichtachtige of ruimteachtige geodeten. Een ruimteachtige geodeet is een ruimteachtige kromme die de vrije val van theoretische deeltjes beschrijft die sneller dan de lichtsnelheid gaan. Een ruimteachtige geodeet tussen twee punten p en q in M is het kortste pad tussen p en q . Lichtachtige geodeten zijn lichtachtige krommen die de paden weergeven die afgelegd worden door lichtstralen in vrije val.³⁹ Een tijdsachtige geodeet is een tijdsachtige kromme die het pad beschrijft van (theoretische) deeltjes in vrije val met een snelheid kleiner dan de lichtsnelheid. Een tijdsachtige geodeet tussen twee punten p en q in M is het kortste pad tussen p en q . Tijdsachtige geodeten beschrijven paden die deeltjes met massa afleggen in een vrije val. Causale geodeten zijn geodeten die lichtachtig of tijdsachtig zijn en beschrijven paden van licht of (theoretische) deeltjes zonder externe krachten [18].

Om singulariteiten te beschrijven, moet het begrip onvolledigheid voor geodeten geïntroduceerd worden. Een geodeet γ is **onvolledig**, wanneer γ op een eindig open interval (a, b) gedefinieerd is, maar niet verder uitgebreid kan worden zodat $\gamma(b)$ ook bestaat in M . Dit betekent dat de gehele mogelijke geschiedenis en toekomst van het pad dan al beschreven zijn. Het belangrijke verschil met onuitbreidbaarheid is dat het hier gaat om een specifiek eindig interval waarop de kromme is gedefinieerd. Elke onvolledige geodeet is dus onuitbreidbaar maar niet elke onuitbreidbare geodeet is onvolledig. Fysiek gezien betekent onuitbreidbaarheid dat deeltjes of lichtstralen in een eindige tijd “het einde” van het universum bereiken.

Nu het concept van een onvolledige geodeet gedefinieerd is, kunnen singulariteiten geïntroduceerd worden zodat later zwarte gaten besproken kunnen worden. Er is per definitie sprake van een **singulariteit** als de ruimte-tijd geodetisch onvolledig is. Dit betekent dat er een causale geodeet is die

globaal hyperbolische ruimten. Dit impliceert dat alle causale paden tussen p en q zich bevinden in een eindig gebied en er geen informatie van buitenaf kan komen.

³⁷Voor de natuurkundigen: een voorbeeld van een ruimte-tijd zonder lokale causaliteit is de Anti-de Sitter ruimte-tijd. Deze ruimte-tijd is niet globaal hyperbolisch en causale diamanten zijn over het algemeen niet compact.

³⁸Voor de natuurkundigen: een geodeet is een kromme met extremale lengte. Dit betekent dat de geodeet voldoet aan de geodetische vergelijking. Deze vergelijking volgt uit een variationeel principe, zie hoofdstuk 3 van [18] voor meer details.

³⁹In dit geval is het ruimte-tijdinterval altijd nul.

onvolledig is. Het is belangrijk om te begrijpen dat de singulariteit geen punt of verzameling punten in de ruimte-tijd zelf is: het is een soort grens van de ruimte-tijd. Men kan de singulariteit zelf dus niet fysiek “betreden”. Als een geodeet de singulariteit benadert en hem eindelijk “bereikt”, dan bestaat de geodeet niet meer in het model. Als men de singulariteit bereikt zou men dus als het ware stoppen met bestaan.

De singulariteiten in de context van zwarte gaten hebben, naast geodetische onvolledigheid, ook de eigenschap dat als men naar de singulariteiten toe gaat, de kromming van de ruimte-tijd divergeert. Dit betekent dat de zwaartekracht hier zo sterk is dat een object dat een singulariteit nadert oneindig sterk uitgerekt of samengedrukt wordt [19]. Soms definieert men singulariteiten door middel van de divergerende kromming, maar deze definitie is niet equivalent aan geodetische onvolledigheid. Alle singulariteiten waar de kromming divergeert impliceren geodetische onvolledigheid van de ruimte-tijd, maar niet andersom. Het is bijvoorbeeld mogelijk om simpelweg een punt te verwijderen uit een ruimte-tijd, waardoor de ruimte-tijd ineens geodetisch onvolledig wordt, maar er geen oneindige kromming ontstaat [69].

Een **zwart gat** is een astronomisch object dat zo’n sterke kromming van ruimte-tijd veroorzaakt, dat er een gebied ontstaat waaruit zelfs lichtdeeltjes niet kunnen ontsnappen. De rand van dit gebied heet een **event horizon**. Binnen deze horizon ligt een singulariteit waar de kromming van de ruimte-tijd theoretisch naar oneindig zou gaan. Als de event horizon gepasseerd wordt, kan er niet teruggekeerd worden naar het vorige gebied.

Het is mogelijk om ruimte-tijden te beschrijven met meerdere zwarte gaten, maar voor simpliciteit zal ik ruimte-tijden bespreken met één zwart gat. Het eerste geval dat ik zal bespreken is een ruimte-tijd met een niet-roterend zwart gat in vacuüm, ook wel een **Schwarzschild ruimte-tijd** genoemd. Zodra de event horizon gepasseerd wordt, zal alles richting het middelpunt van het gebied bewegen. Dit komt omdat er formeel gezien een **singulariteit** is bij $r = 0$, waar alles naar toe wordt aangetrokken. Zoals eerder uitgelegd kan men de singulariteit bereiken, maar niet betreden, omdat een singulariteit niet in de ruimte-tijd ligt.

Het tweede geval dat ik zal bespreken is een ruimte-tijd met een roterend zwart gat, ook wel een **Kerr ruimte-tijd** genoemd. In dit geval is er naast een event horizon ook een Cauchy-horizon. Een **Cauchy-horizon** is de grens van het gebied waarin de Cauchy-ontwikkeling met betrekking tot een beginsegment nog welgedefinieerd is. Dit betekent dat gebieden buiten deze horizon niet meer uniek kunnen worden opgelost op basis van het beginsegment: er zijn meerdere ruimte-tijden die de MGHD bevatten en die voldoen aan de Einsteinvergelijkingen [70].

De Cauchy-horizon ligt in het geval van een roterend zwart gat vlak achter de event horizon. Als men de event horizon passeert, dan wordt alles naar de Cauchy-horizon getrokken en draait men mee met de rotatie van het zwarte gat. Deze laatste beweging wordt **frame-dragging** genoemd en vindt ook plaats buiten de event horizon.

Achter de Cauchy-horizon bevindt zich de singulariteit van het roterende zwarte gat. In tegenstelling tot de Schwarzschild ruimte-tijd is er niet één punt waar de singulariteit plaatsvindt, maar een ringvormige structuur.⁴⁰ Echter, het gebied achter de Cauchy-horizon is niet deel van de MGHD. Dit gebied zal ik daarom bespreken wanneer ik Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen analyseer.

Het bestaan van singulariteiten kan in sommige gevallen zorgen dat modellen niet deterministisch zijn. Penrose formuleerde daarom de *Weak cosmic censorship conjecture*, waarin hij stelt dat er nooit een “naakte” singulariteit kan bestaan.⁴¹ Dit vermoeden houdt in dat een singulariteit altijd verborgen ligt achter een horizon, zoals een event horizon [68]. Als dit vermoeden zou gelden, dan zou men

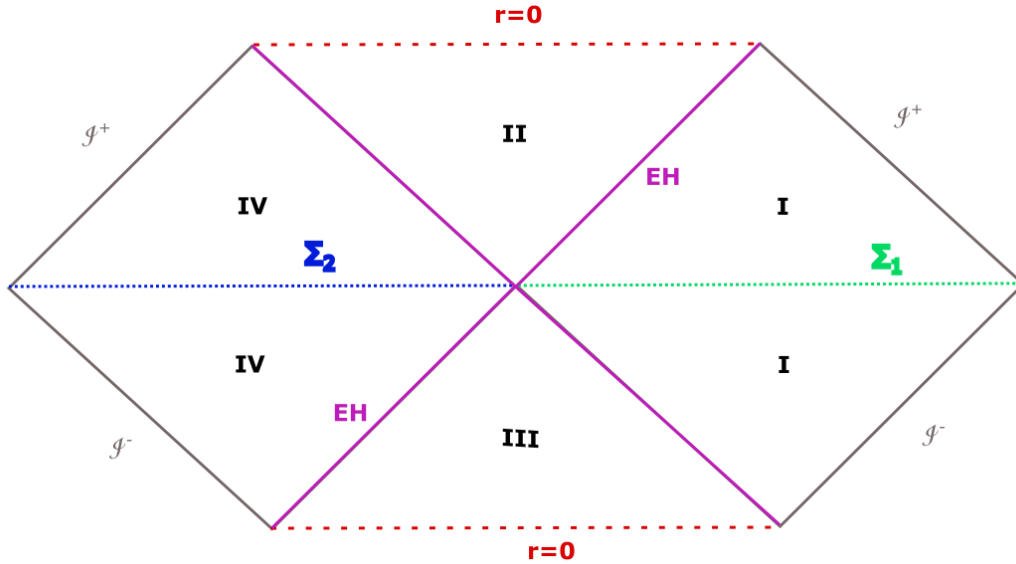
⁴⁰Voor de natuurkundigen: in Boyer-Lindquist coördinaten ligt de singulariteit bij $r = 0$ en $\theta = \pi/2$.

⁴¹Penrose formuleerde ook een *Strong cosmic censorship conjecture* die besproken zal worden in Sectie 5.3.

kunnen verklaren waarom we singulariteiten niet zien. Als singulariteiten naakt zijn, zouden geodeten kunnen vloeien uit de singulariteit, waardoor er informatie het systeem binnen kan komen. Als gevolg zou een Cauchy-ontwikkeling niet meer uniek bepaald kunnen worden door het beginsegment voorafgaande aan de singulariteit [71, 72].

Er zijn meerdere modellen van ART waarin naakte singulariteiten bestaan. Een groep van deze voorbeelden bestaat uit een bijzondere subgroep van statische modellen. Hieronder vallen modellen van niet-roterende zwarte gaten met een negatieve massa, extreem snel roterende zwarte gaten en zwarte gaten met een extreem hoge elektrische lading. De tweede groep modellen zijn instortingsmodellen, zoals Tolman–Bondi–Lemaître modellen (TML) en Roberts modellen.⁴² TML-modellen beschrijven sferisch symmetrische ruimte-tijden waarin drukloze materie, ook wel stof genoemd, inhomogeen verspreid is. Als de inhomogeniteit groot genoeg is in het midden van de ruimte-tijd, dan kan er daar een naakte singulariteit ontstaan door de gravitationele ineenstorting van stof [74]. Een beschrijving van verdere voorbeelden of eigenschappen van deze modellen ligt buiten het bereik van deze scriptie en kan onderwerp zijn van toekomstig onderzoek.

De bovenstaande modellen worden vaak als onfysisch gezien vanwege onrealistische aannames, zoals een negatieve massa, een perfecte stofwolk zonder druk, extra massaloze scalaire velden. Er wordt daarom nog steeds onderzoek gedaan om te bewijzen dat naakte singulariteiten niet kunnen bestaan [75]. De stelling is echter niet bewezen en de status van het vermoeden staat nog steeds ter discussie [76].



Figuur 2: Een Penrose diagram van een Kruskal uitbreiding. De roze lijnen geven de event horizon weer van zowel het zwarte als witte gat. De rode stippellijnen geven de singulariteit op $r = 0$ weer. De groene lijn geeft Σ_1 weer, wat het originele Cauchy-oppervlak is die in het beginsegment zit van de MGHD. De blauwe lijn geeft Σ_2 weer, de extensie van het originele Cauchy-oppervlak.

⁴²Voor de natuurkundigen: Roberts modellen beschrijven sferisch symmetrische ruimte-tijden met massaloze scalaire velden en zelfgelijkvormigheid. Voor bepaalde waarden van de sterkte van het scalaire veld kan er een naakte singulariteit ontstaan [73].

4.2.2 Kruskal uitbreiding voor niet-roterende zwarte gaten

Het eerste geval dat ik zal bespreken is een Kruskal uitbreiding. Dit is een uitbreiding van een ruimte-tijd met een niet-roterend zwart gat in vacuüm (een Schwarzschild ruimte-tijd). Om deze uitbreiding beter te kunnen uitleggen zal ik een korte introductie geven in Penrose diagrammen.

Een **Penrose diagram** is een schematische weergave waarbij een vier-dimensionale ruimte-tijd wordt weergegeven als een twee-dimensionaal diagram. Dit zorgt ervoor dat er bepaalde vertekeningen kunnen zijn, net zoals de projectie van de aarde op een kaart ervoor zorgt dat bepaalde gebieden relatief groter (of kleiner) lijken dan ze werkelijk zijn. In het geval van Afbeelding 2 betekent dit bijvoorbeeld dat afstanden tussen punten en gebieden vertekend zijn. Het doel van het Penrose diagram is om de causale structuur van de ruimte-tijd op een overzichtelijke manier te visualiseren.

Een Penrose diagram geeft verschillende oneindigheden weer: $\mathcal{I}^+$ geeft **toekomstige null oneindigheid** weer waar zowel r als t naar $+\infty$ gaat. $\mathcal{I}^-$ geeft het **verleden null oneindigheid** weer waar r naar $+\infty$ gaat en t naar $-\infty$ gaat.⁴³ Deze oneindigheden zijn geen plekken in de ruimte-tijd zelf, maar geven de grenzen van de ruimte-tijd op oneindig aan. Een singulariteit wordt weergegeven met een rode stippenlijn en geeft dus de grens van het diagram weer: de singulariteit zelf zit niet in de ruimte-tijd. Voor een uitgebreidere uitleg van Penrose diagrammen, zie hoofdstuk 10 van [18].

De MGHG voor een Schwarzschild ruimte-tijd is op te delen in twee gebieden: het gebied buiten de event horizon (regio I) en het gebied voorbij de horizon (regio II). Deze gebieden zijn weergegeven in Afbeelding 2 die een Penrose diagram weergeeft van een Kruskal uitbreiding. De event horizon van de MGHG is alleen de roze lijn van het midden naar rechtsboven. De event horizon die wordt weergegeven door de roze diagonale lijn van rechtsonder naar linksboven is dus geen deel van de MGHG, maar een grens van de MGHG.

Een Kruskal uitbreiding voegt twee gebieden toe: een gebied voorbij de horizon van een **wit gat** (regio III) en een nieuwe ruimte-tijd voorbij het witte gat (regio IV). Deze gebieden liggen in het verleden van de oplossing en zorgen voor een symmetrie in de tijd. Een wit gat is daarom te beschouwen als het omgekeerde in de tijd of een spiegeling van een zwart gat. Het witte gat heeft een horizon waarbinnen geen materie uit regio's I en IV kan komen. Daarnaast straalt het witte gat materie uit naar regio's III en IV. Regio IV ligt voorbij regio III en is een ruimte-tijd zoals regio I. Het is niet mogelijk voor regio I om regio IV te beïnvloeden langs causale krommen, maar het is wel mogelijk voor causale krommen van regio IV om naar regio I te gaan [dafermos2017interiordynamicalvacumblack].

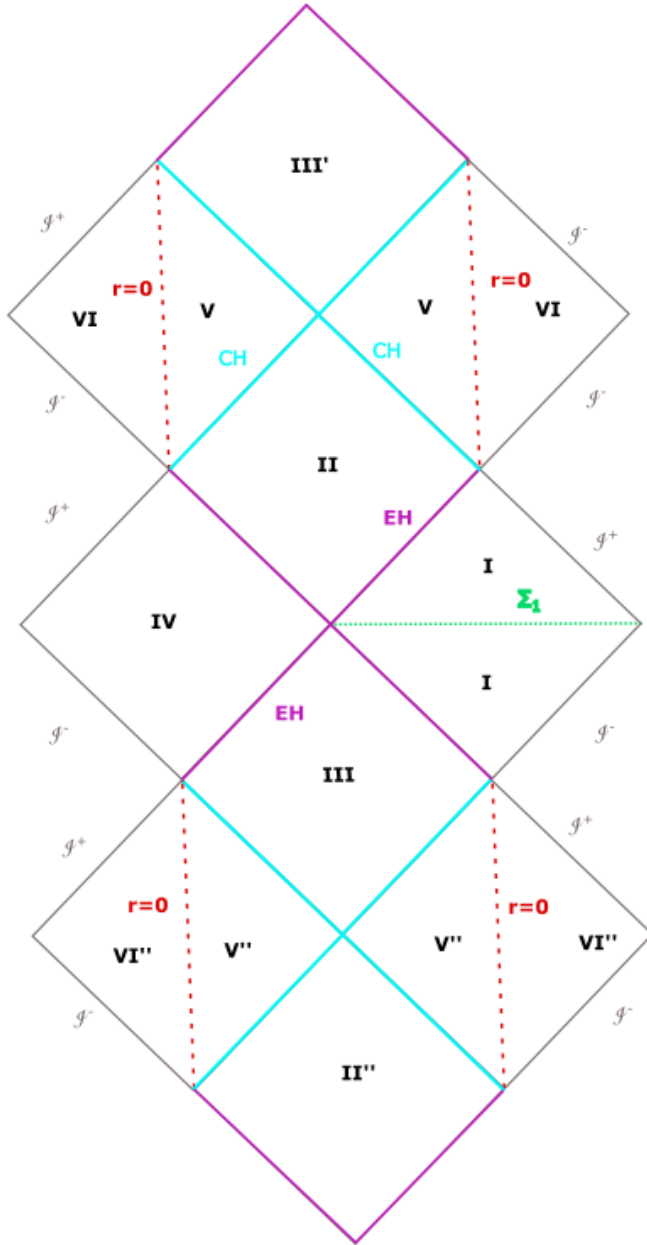
De Kruskal uitbreiding is niet uniek, maar wel maximaal en globaal hyperbolisch. Het is namelijk mogelijk om het beginsegment uit te breiden, waardoor ook regio's III en IV bepaald worden door de nieuwe begintoestand. Het nieuwe beginsegment zou de Cauchy-oppervlakken moeten bevatten die zijn weergegeven in groen Σ_1 en blauw Σ_2 in Afbeelding 2. Er zijn dus geen causale lussen in Kruskal uitbreidingen en er is nog steeds sprake van een foliatie van Cauchy-oppervlakken. Echter, de foliatie in regio III en IV wordt niet uniek bepaald door de begintoestand van de Schwarzschild oplossing die alleen Σ_1 bevat.

4.2.3 Boyer-Lindquist/Carter uitbreiding voor roterende zwarte gaten

Het is ook mogelijk om ruimte-tijden met een roterend zwart gat in vacuüm, ook wel Kerr ruimte-tijden genoemd, uit te breiden [67, 77].

De originele oplossing bestaat weer uit een gebied buiten de event horizon (regio I) en de ruimte voorbij de event horizon (regio II). De event horizon in de MGHG is alleen de roze lijn tussen regio I en regio II in Afbeelding 3. De Cauchy-horizon en de event horizon tussen regio I en regio III behoort niet tot

⁴³Het teken $\mathcal{I}$ spreekt men uit als “skri”.



Figuur 3: Een Penrose-diagram van een Boyer-Lindquist/Carter-uitbreiding. De roze lijnen geven de event horizon van zowel het zwarte als het witte gat weer. De rode stipellijnen geven de ring singulariteit op $r = 0$ weer. De groene lijn geeft Σ_1 weer, wat het originele Cauchyoppervlak is dat in het beginsegment van de MGH zit. De lichtblauwe lijn geeft de Cauchy-horizon weer.

de MGH [78].

De maximale analytische uitbreiding, ook wel de Boyer-Lindquist/Carter uitbreiding genoemd, voor Kerr zwarte gaten verloopt deels analoog aan de Kruskal uitbreidingen voor Schwarzschild ruimtetijden. Men kan weer een gebied binnen de horizon van een wit gat (regio III) toevoegen en een gebied voorbij het witte gat (regio IV). Regio III bevat ook een Cauchy-horizon, net zoals regio II, en wordt ook weergegeven met lichtblauw in Afbeelding 3. Daarnaast kan men twee gebieden toevoegen achter

de Cauchy-horizon, het gebied direct achter de Cauchy-horizon (regio V) en een nieuwe ruimte-tijd (regio VI). Tussen regio V en regio VI is er een ringsingulariteit die niet binnen de ruimte-tijd is, maar als grens fungeert.

Regio V en regio VI zijn niet analoog aan regio II of regio IV, omdat het niet mogelijk is om deze gebieden globaal hyperbolisch te maken. In regio V kunnen er in het geval van hoge rotatie van het zwarte gat causale lussen ontstaan door frame dragen, waardoor de ruimte-tijd alvast niet globaal hyperbolisch kan zijn. Dit geldt ook voor het gebied in regio VI dicht bij de ringsingulariteit. Dit betekent dat het niet mogelijk is om een beginsegment te vinden in regio V of VI die diens gebied vastlegt.⁴⁴ Dit verschilt dus met regio's II en IV, die wel globaal hyperbolisch zijn.

Twee opmerkingen over deze uitbreiding. Ten eerste, het is mogelijk voor een deeltje vanuit regio I om binnen het zwarte gat te vallen, door de Cauchy-horizon te gaan om vervolgens in een nieuw universum terecht te komen. Alles wat de Cauchy-horizon passeert wordt nog steeds naar het middelpunt toegetrokken, maar niet alles wat de Cauchy-horizon passeert gaat naar de ringsingulariteit. Het is namelijk mogelijk om door de ring heen te gaan naar regio VI. Overigens is het pad niet uniek bepaald, omdat er meerdere mogelijke paden zijn in regio V, gegeven het pad in regio's I en II.⁴⁵ Ten tweede, het is mogelijk om nog nieuwe gebieden toe te voegen naast de hierboven besproken vier gebieden, zoals te zien is in Afbeelding 3. Het is bijvoorbeeld mogelijk om de ruimte-tijd uit te breiden achter de Cauchy-horizon van het witte gat (regio V'' en regio VI'). Vervolgens is het weer mogelijk om achter de Cauchy-horizon van regio V'' een regio II'' toe te voegen. Regio II'' is het gebied van een roterend zwart gat tussen de event horizon en de Cauchy-horizon. Vervolgens zou iemand hieronder weer een regio I''' of regio IV''' kunnen toevoegen etc. Hetzelfde kan gedaan worden achter de Cauchy-horizon van regio V, waarbij men een regio III' kan toevoegen die het gebied van een wit gat is tussen de event horizon en de Cauchy-horizon. Men kan zowel onder als boven het Penrose diagram oplossingen op elkaar kunnen blijven plakken.

4.3 Determinisme bij het beginwaardeprobleem

De Kruskal en Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen laten zien dat ART niet Halvorson-Manchak-Weatherall deterministisch is.

Ten eerste hebben kunnen er verschillende Kruskal uitbreidingen vormen uit dezelfde begintoestand van een Schwarzschild ruimte-tijd. Deze uitbreidingen van de MGHD van de Schwarzschild ruimte-tijd zijn niet isometrisch, omdat regio's III en IV van verschillende Kruskal uitbreidingen in het algemeen niet isometrisch zijn. Dit betekent dat de beginsegmenten van Kruskal uitbreidingen isometrisch zijn, maar er geen duplicatie mogelijk is tussen de uiteindelijk Kruskal uitbreidingen, waardoor ART niet Halvorson-Manchak-Weatherall deterministisch is. Daarnaast is het bestaan van een Kruskal uitbreiding op zichzelf een bewijs dat ART niet Halvorson-Manchak-Weatherall deterministisch is. Zowel de MGHD als de Kruskal uitbreiding volgen uit hetzelfde beginsegment. Echter, het is niet mogelijk om regio's III en IV af te beelden op een gebied in de MGHD. De Kruskal oplossing bevat meer punten en is daarmee "groter" (ruw gezegd, twee keer zo groot).

Uitbreidingen van Kerr ruimte-tijden kunnen op verschillende manieren van elkaar verschillen. Ten eerste zijn zowel regio V als regio VI niet globaal hyperbolisch, wat betekent dat er causale lussen zijn

⁴⁴Voor de natuurkundigen: In dit geval wordt sterke causaliteit geschonden. Dit betekent dat voor elk punt p in de ruimte-tijd er een open omgeving U moet zijn waarop geen enkele causale kromme meer dan een keer door loopt. Echter, door de sterke rotatie kunnen er kleine lussen ontstaan in de ϕ richting, waardoor causale lussen ontstaan.

⁴⁵Een natuurkundige opmerking: regio I en regio VI kunnen niet dezelfde ruimte-tijd zijn omdat ze hun eigen grensen hebben in de vorm van verleden null oneindigheid $\mathcal{I}^-$ en toekomstig null oneindigheid $\mathcal{I}^+$. Er is dus geen sprake van een wormgat, maar een pad naar een echt ander nieuw universum.

in dat gebied. Dit betekent dat het niet mogelijk is om een begintoestand met een Cauchy-oppervlak te definiëren binnen de gebieden die de gebieden vastlegt. Het is dus ook niet mogelijk om, zoals bij Kruskal, het oorspronkelijke beginsegment in regio I (die het groene Cauchy-oppervlak in Afbeelding 3 bevat) uit te breiden zodat gebieden V en VI bepaald worden door het nieuwe beginsegment. Een andere reden waarom zo'n uitbreiding van het beginsegment niet mogelijk is, is dat causale krommen die door het Cauchy-oppervlak in regio I gaan, via regio II de Cauchy-oppervlakken in regio's V en VI zouden bereiken. Als gevolg zouden causale krommen dan twee keer door het nieuwe samengestelde Cauchy-oppervlak gaan. Dit is in strijd met de definitie van een Cauchy-oppervlak, waardoor het niet mogelijk is om het beginsegment uit te breiden zodat regio's V en VI bepaald worden.⁴⁶

Ten slotte is er in principe geen limiet op hoeveel uitbreidingen men aan elkaar zou kunnen plakken bij de Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen. Een uitbreiding die 6 keer de groep van nieuwe gebieden heeft toegevoegd, heeft hetzelfde beginsegment (en voldoet net zo sterk aan de Einsteinvergelijkingen) als een uitbreiding waar de groep 666 keer is toegevoegd. Dit betekent dat er in principe oneindig veel uitbreidingen mogelijk zijn voor hetzelfde beginsegment. Deze uitbreidingen laten zien dat het beginsegment de ruimte-tijden van ART niet uniek bepaalt.

5 Discussie

Hieronder zal ik twee verschillende soorten kritieken op de beredenering in Sectie 4.3 naar voren brengen om ze vervolgens te weerleggen. Als eerste zou men kunnen stellen dat het beginsegment groter had moeten zijn. Ten tweede zou men kunnen zeggen dat de uitbreidingen die ik beschouw niet relevant zijn, omdat ze empirisch onbereikbaar, onfysisch of onrealistisch zijn.

5.1 Kritiek 1: Groter beginsegment

De eerste kritiek die iemand zou kunnen hebben is dat een “beter” beginsegment gekozen had moeten worden in het Schwarzschild-geval. Een beter beginsegment zou de gehele Kruskal ruimte-tijd vastleggen. Het uitgebreidere beginsegment zou zowel het Cauchy-oppervlak Σ_1 van het originele beginsegment bevatten als het Cauchy-oppervlak Σ_2 in Afbeelding 3. Het probleem was dat de verkeerde begintoestand was genomen, omdat de inclusie van Σ_2 ervoor zorgt dat ook regio's III en IV vastgelegd worden. Dit zou betekenen dat onze definitie van determinisme aangepast moet worden, zodat de begintoestanden U en U' “maximaal” zouden moeten zijn.

Het eerste probleem is dat men niet van tevoren zou kunnen weten hoe deze begintoestand uitgebreid zou moeten worden. Of een beginsegment “maximaal” is, kan alleen vastgelegd worden als er een verdere uitbreiding van het beginsegment is gevonden. Het concept kan niet van tevoren worden gedefinieerd. In het geval van de Kruskal uitbreiding is deze uitbreiding van het beginsegment niet evident, nog volgt die uit ART zelf. Het is daarmee ook onduidelijk of het concept van maximaliteit altijd gefalsificeerd of geverifieerd kan worden, aangezien het afhankelijk is van de kennis van de wetenschapper.

Bovendien werkt deze kritiek niet voor het Kerr-geval, omdat het onmogelijk is om het beginsegment uit te breiden zonder de voorwaarde van een Cauchy-oppervlak te breken. Dit betekent dat maximaliteit op zichzelf niet een voldoende eigenschap is om te garanderen dat ART deterministisch is.

⁴⁶Het is echter nog steeds mogelijk om, net zoals bij de Kruskal uitbreiding, om het beginsegment uit te breiden naar regio IV zodat regio's IV en III bepaald worden.

5.2 Kritiek 2: Empirische status van uitbreidingen

Een tweede manier om kritiek te leveren op de argumentatie in Sectie 4.3, is door te stellen dat uitbreidingen onfysisch zijn en daarom niet als legitiem model van ART zou moeten worden beschouwd. Dit zou betekenen dat ik te vrij ben geweest in mijn gebruik van modellen en een nieuwe eigenschap zou moeten invoeren.

Een eerste eigenschap zou kunnen zijn dat deze uitbreidingen van ruimte-tijden niet empirisch te bewijzen zijn. In het Schwarzschild- en Kerr-geval gaat alle materie van het witte gat naar regio II, die achter een event horizon ligt. In het Kerr-geval liggen regio's V en VI voorbij de event horizon van een roterend zwart gat. In beide gevallen betekent dit dat er geen signaal zou kunnen komen van de nieuwe gebieden, waardoor het bestaan van deze uitbreidingen niet onderzocht of gefalsificeerd kan worden.

Het eerste probleem met dit argument is dat het er van uitgaat dat een model van ART alleen fysisch is als het gaat om het waarneembare universum. Deze aanname heeft als gevolg dat zelfs regio II, het gebied voorbij de event horizon, als onfysisch wordt beschouwd. Echter, veel wetenschappers zouden stellen dat regio II wel fysisch is. Als men deze lijn zou doortrekken, zouden ook gebieden van regio I niet fysisch zijn, omdat die buiten onze waarneembare horizon zitten. ART zou dan een heel beperkte theorie worden, waardoor deze vereiste onrealistisch is.

Het tweede probleem is dat deze gebieden als serieuze delen van de theorie moeten worden gezien. Uit andere (historische) gevallen zien we dat wiskundige modellen die eerst als onfysisch werden gezien, later toch de werkelijkheid representeerden. Neem bijvoorbeeld de Dirac vergelijking die het gedrag van bepaalde subatomaire deeltjes beschrijft.⁴⁷ Deze oplossing beschrijft deeltjes als elektronen, maar ook zogenaamde antideeltjes die een positieve lading hebben. Deze antideeltjes waren oorspronkelijk enkel wiskundige modellen. Echter, Carl Anderson nam later positronen waar in een nevelkamer [79]. Deze wiskundige modellen zijn een investering in de toekomst: het zou mogelijk kunnen zijn dat deze gebieden bestaan. Het is daarom belangrijk om dit soort wiskundige modellen, zoals de uitbreidingen, als een serieus deel te zien van de theorie.

5.3 Kritiek 3: Onfysische ruimte-tijden

Men zou ook kunnen stellen dat modellen die niet globaal hyperbolisch zijn onfysisch of onwerkelijk zijn. Dit komt overeen met Penrose's *Strong cosmic censorship conjecture*, die stelt dat elke fysiek "redelijke" ruimte-tijd globaal hyperbolisch is [68, 80]. Dit zou dus betekenen dat regio's V en VI in de Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen niet fysisch zijn, terwijl regio III's en IV in de Kruskal en Boyer-Lindquist/Carter uitbreiding dit wel zijn.

Een van de manieren om Penrose's vermoeden te verdedigen is dat Cauchy-horizonnen instabiel zijn: het invallen van materie zorgt voor een kleine storing, waardoor de energie lokaal divergeert en bepaalde krommingen oneindig groot worden. Dit heet het blauwverschuiving-effect en was voorgesteld door Penrose. Dit effect zorgt ervoor dat de Cauchy-horizon singulier wordt gemaakt, waardoor het niet mogelijk is voor materie om voorbij de Cauchy-horizon te gaan. Dit betekent dat het onmogelijk zou zijn om regio's V en VI te definiëren in een Boyer-Lindquist/Carter uitbreiding. Er zijn bewijzen gevonden voor specifieke gevallen, zoals ruimte-tijden met subextreme roterende zwarte gaten, maar er is geen algemeen bewijs voor het vermoeden [81–83].

Een minder sterk vermoeden is Stephen Hawking's *Chronology protection conjecture*, dat stelt dat nog onbekende natuurkundige wetten het bestaan van causale lussen voorkomen [84]. In het geval van Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen zou een bewijs de instabiliteit van de Cauchy-horizon kunnen

⁴⁷Voor de natuurkundigen: het gaat om een bewegingsvergelijking voor fermionen.

zijn. Het is ook mogelijk om de Kwantumveldentheorie toe te passen op ruimten met causale lussen, om de lussen te destabiliseren. Dit zou betekenen dat invallende materie ervoor zorgt dat er de verwachte waarde van de massa-energie tensor T divergeert, waardoor de zwaartekracht zo sterk wordt dat er een singulariteit ontstaat. Ten gevolge van deze singulariteit kunnen causale lussen dan niet meer bestaan [85, 86].⁴⁸ Onder Hawkings vermoeden zouden Kruskal uitbreidingen wel nog steeds als fysisch realistisch worden gezien, omdat er geen Cauchy-horizon is of causale lussen ontstaan in de uitbreiding. Deze stelling is reeds een vermoeden: er is geen sluitend bewijs voor de geldigheid van deze stelling [87].

Beide vermoedens vormen echter geen sluitend bewijs voor determinisme binnen ART. Ten eerste, als men deze vermoedens op zichzelf aanneemt, is er sprake van een cirkelredenering. Het voldoen aan globale hyperboliciteit impliceert namelijk dat de ruimte-tijden altijd deterministisch bepaald kunnen worden door een begintoestand. Om te voorkomen dat er een cirkelredenering gemaakt wordt, moet er daarom een andere onafhankelijke en redelijke eigenschap of conditie te plaatsen is op modellen. Deze eigenschappen en condities moeten verdedigd worden op andere gronden dan determinisme.

Echter, het lijkt niet mogelijk om een redelijke conditie op de ruimte-tijd te stellen. Dit volgt uit het feit dat uitbreidingen van MGHD niet (bewezen) vaste eigenschappen hebben, waardoor ze a priori afgewezen zouden kunnen worden. Daarnaast wordt aan eventuele kandidaatseigenschappen, zoals geodetische compleetheid, ook niet voldaan door andere ruimte-tijden binnen ART. De enige mogelijkheid om uitbreidingen van MGHD uit te sluiten, is dus om determinisme als fysische eigenschap te eisen, wat opnieuw een cirkelredenering zou creëren [77].

Het tweede probleem is dat de huidige bewijzen van de vermoedens eigenlijk bewijzen dat ART *in principe* niet deterministisch is. In het geval van Hawking's vermoeden is namelijk zowel ART als de Kwantumveldentheorie nodig om het vermoeden te bewijzen. De inval van materie en de invloed op de lokale energie wordt namelijk beschreven door de Kwantumveldentheorie. Dit is een geval waarin het tegenbewijs de regel bevestigt: ART is op zichzelf niet deterministisch en heeft andere theorieën nodig om niet-deterministisch bepaalde gebieden uit te sluiten. Hetzelfde geldt voor Penrose's vermoeden: het heeft storingen nodig om de Cauchy-horizon singulier te maken. Zelfs als men het vermoeden zou kunnen bewijzen, geldt nog steeds dat ART niet deterministisch is, omdat de verschillende mogelijke Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen van een Kerr ruimte-tijd volgen uit ART.

5.4 Kritiek 4: Onrealistische idealisaties

Een laatste kritiek is dat uitbreidingen niet relevant zijn omdat ze geen fysische problemen beschrijven door het gebruik van onrealistische idealisaties. Zo beschrijven Schwarzschild en Kerr ruimte-tijden vacuüm ruimte-tijden, wat betekent dat er geen massa of energie in het universum zou zijn. Het is evident dat een model voor het universum materie zou moeten hebben, omdat bijvoorbeeld de aarde bestaat. Er wordt daarnaast een wit gat geïntroduceerd door een tijd-omgekeerd zwart gat te beschrijven. Echter, er zijn geen astronomische processen die het ontstaan van witte gaten kunnen beschrijven. Bovendien ontstaan zwarte gaten realistisch door gravitationele instorting van bijvoorbeeld een ster. Echter, Schwarzschild en Kerr ruimte-tijden beschrijven zwarte gaten zonder een vormingsproces. Zulke zwarte gaten worden ook wel eeuwige zwarte gaten genoemd.

Deze kritiek werkt echter niet, omdat de vraag is of ART als theorie *in principe* deterministisch is. Het feit dat er bepaalde aannames worden gemaakt die het systeem makkelijker maken, is niet genoeg om de modellen als irrelevant te zien. Binnen elk model worden er versimpelingen aangenomen, zoals het negeren van wrijving met lucht bij de beschrijving van de baan van een kogel, of door de sterkte van

⁴⁸Tot nu toe zijn deze berekeningen binnen simpele modellen van ART gedaan, maar nog niet bij complexere modellen zoals Kerr ruimte-tijden.

de wind te beschrijven als constant. Zulke modellen kunnen nog steeds inzicht geven over de theorie en kunnen ook gebruikt worden om (juiste) voorspellingen te maken. Ze vormen daarom een legitiem deel van de theorie. De vraag of deze modellen realistisch zijn gaat alleen over de correspondentie tussen modellen en de werkelijkheid, niet over de theorie als zodanig [88].

Het tweede probleem met deze kritiek is dat meerdere empirische onderzoeken laten zien dat de Kerr ruimte-tijd een realistische benadering is van veel zwarte gaten [89–91]. Deze onderzoeken laten zien dat het niet uit maakt dat er wordt aangenomen dat er een vacuüm is. Daarnaast impliceert de kritiek dat de Kerr ruimte-tijd geen vormingsproces bevat alleen dat regio's III en IV onrealistisch zijn. Deze regio's hebben namelijk te maken met het witte gat. Echter, het gebrek aan een vormingsproces kan geen kritiek zijn op de inclusie van regio's V en VI. Deze gebieden liggen namelijk voorbij de ringsingulariteit en zouden bestaan nadat het zwarte gat al gevormd is. Dit betekent dat de Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen nog steeds laten zien dat ART niet Halvorson-Manchak-Weatherall deterministisch is.

6 Conclusie

In deze scriptie wordt, na enig vallen en opstaan, uiteindelijk de Halvorson-Manchak-Weatherall definitie van determinisme gebruikt om te bepalen of de Algemene Relativiteitstheorie deterministisch is. Dit doe ik door middel van een analyse van ART modellen (M, g, T) die bestaan uit vacuüm ruimte-tijden ($T = 0$) met een Lorentzianse metriek die voldoen aan de Einsteinvergelijkingen. Deze ruimte-tijden kunnen worden beschreven door middel van het beginwaardeprobleem, waarin men een beginsegment met een Cauchy-oppervlak ontwikkelt naar een grotere ruimte-tijd. In deze scriptie analyseer ik vacuüm ruimte-tijden (dat wil zeggen $T = 0$) en bespreek ik uitbreidingen van maximaal globaal hyperbolische ontwikkelingen: de Kruskal uitbreiding voor ruimte-tijden met niet-roterende zwarte gaten en de Boyer-Lindquist/Carter uitbreiding voor ruimte-tijden met roterende zwarte gaten.

Zowel Kruskal als Boyer-Lindquist/Carter uitbreidingen laten zien dat ART niet Halvorson-Manchak-Weatherall deterministisch is, omdat er niet unieke uitbreidingen bestaan van de MGHG van Schwarzschild en Kerr ruimte-tijden. Kritieken dat deze ruimte-tijden onfysisch, onrealistisch of irrelevant zijn, kloppen niet, omdat deze uitbreidingen volgen uit ART en voldoen aan de Einsteinvergelijkingen, en de Kerr ruimte-tijd al behoorlijk realistisch lijkt. De uitbreidingen zijn geldige modellen van ART en zouden serieus genomen moeten worden. ART is dus niet Halvorson-Manchak-Weatherall deterministisch.

Referenties

- ¹J. G. Cramer, „The Curious History of Quantum Mechanics”, in *The Quantum Handshake: Entanglement, Nonlocality and Transactions* (Springer International Publishing, Cham, 2016), p. 9–38.
- ²D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2017) hfdstk. 1-3.
- ³J. S. Bell, „On the Einstein Podolsky Rosen paradox”, *Physics Physique Fizika* **1**, 195–200 (1964).
- ⁴S. J. Freedman en J. F. Clauser, „Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938–941 (1972).
- ⁵T. Visser, *A Comprehensive Evaluation of the Viability of Superdeterminism*, Msc. scriptie, 2023.
- ⁶M. van Strien, „Was physics ever deterministic? The historical basis of determinism and the image of classical physics”, *The European Physical Journal H* **46**, 1–20 (2021).
- ⁷F. Del Santo en N. Gisin, „Physics without determinism: Alternative interpretations of classical physics”, *Phys. Rev. A* **100**, 062107 (2019).
- ⁸J. D. Norton, „The Dome: An Unexpectedly Simple Failure of Determinism”, *Philosophy of Science* **75**, 786–798 (2008).
- ⁹A. Korolev, „Indeterminism, Asymptotic Reasoning, and Time Irreversibility in Classical Physics”, *Philosophy of Science* **74**, 10.1086/525635 (2007).
- ¹⁰S. C. Fletcher, *What Counts as a Newtonian System? The View from Norton’s Dome*, dec 2010.
- ¹¹L. Vaidman, „Quantum theory and determinism”, *Quantum Studies: Mathematics and Foundations* **1**, 5–38 (2014).
- ¹²M. Wilson, „Determinism and the Mystery of the Missing Physics”, *The British Journal for the Philosophy of Science* **60**, 173–193 (2009).
- ¹³J. Jauch, „Determinism in Classical and Quantal Physics”, *Dialectica* **27**, 13–26 (1973).
- ¹⁴T. Müller en T. Placek, „Defining Determinism”, *The British Journal for the Philosophy of Science* **69**, 215–252 (2018), eprint: <https://doi.org/10.1093/bjps/axv049>.
- ¹⁵J. Earman, „How Determinism Can Fail in Classical Physics and How Quantum Physics Can (Sometimes) Provide a Cure”, *Philosophy of Science* **75**, 817–829 (2008).
- ¹⁶J. Earman, *A Primer on Determinism*, Pallas paperback (Springer Netherlands, 1986) hfdstk. 1,2,4,10.
- ¹⁷J. Earman, „Aspects of determinism in modern physics”, *Handbook of the Philosophy of Science* (2007).
- ¹⁸K. Landsman, *Foundations of General Relativity: From Einstein to Black Holes* (Radboud University Press, 2021) hfdstk. 2-10.
- ¹⁹C. Misner, K. Thorne en J. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, 1973) hfdstk. 8,9,16,31-38.
- ²⁰F. W. Dyson, A. S. Eddington en C. Davidson, „A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **220**, 291–333 (1920).
- ²¹B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott e.a. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), „Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).

- ²²T. E. H. T. Collaboration, K. Akiyama, A. Alberdi e.a., „First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole”, *The Astrophysical Journal Letters* **875**, L4 (2019).
- ²³K. Landsman, *Reopening the Hole Argument*, 2023, arXiv:2206.04943 [gr-qc].
- ²⁴N. Dewar, *The Hole Argument and Determinism(s)*, dec 2024, eprint: 24432.
- ²⁵F. Cudek, „Counterparts, Determinism, and the Hole Argument”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 10.1086/729767 (forthcoming).
- ²⁶M. Giovanelli, „Erich Kretschmann as a Proto-Logical-Empiricist: Adventures and Misadventures of the Point-Coincidence Argument”, *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **44**, 115–134 (2013).
- ²⁷J. Earman en J. D. Norton, „What Price Spacetime Substantivalism? The Hole Story”, *The British Journal for the Philosophy of Science* **38**, 515–525 (1987).
- ²⁸J. Butterfield, „The Hole Truth”, *The British Journal for the Philosophy of Science* **40**, 1–28 (1989).
- ²⁹J. Stachel, „The Relations Between Things’ Versus ’the Things Between Relations’: The Deeper Meaning of the Hole Argument”, in *Reading Natural Philosophy: Essays in the History and Philosophy of Science and Mathematics*, red. door D. B. Malament (Open Court, 2002), p. 231–66.
- ³⁰J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* (Springer, 2002) hfdstk. 1-4,8.
- ³¹J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity* (Cambridge University Press, 2021) hfdstk. 4,5,6.
- ³²R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984) hfdstk. 6,8,9,10, 491 p.
- ³³S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, 2019) hfdstk. 2-7, B.
- ³⁴C. W. Misner, K. S. Thorne en J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).
- ³⁵D.-G. Wang, Y. Zhang en J.-W. Chen, „Vacuum and gravitons of relic gravitational waves and the regularization of the spectrum and energy-momentum tensor”, *Physical Review D* **94**, 10.1103/physrevd.94.044033 (2016).
- ³⁶D. Walsh, R. F. Carswell en R. J. Weymann, „0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?”, *Nature* **279**, 381–384 (1979).
- ³⁷R. A. Hulse en J. H. Taylor, „A high-sensitivity pulsar survey”, *The Astrophysical Journal* **191** (1974).
- ³⁸M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Geometry, Topology, and Physics (Institute of Physics Pub., 2003).
- ³⁹M. Casariego, *Diffeomorphism invariance and general covariance: a pedagogical introduction*, 2024, arXiv:2405.09703 [gr-qc].
- ⁴⁰J. Butterfield, „Substantivalism and Determinism”, *International Studies in the Philosophy of Science* **2**, 10–32 (1987).
- ⁴¹J. D. Norton, O. Pooley en J. Read, „The Hole Argument”, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. door E. N. Zalta en U. Nodelman, Summer 2023 (Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023).
- ⁴²G. F. R. Ellis en T. Rothman, „Time and Spacetime: The Crystallizing Block Universe”, *International Journal of Theoretical Physics* **49**, 988–1003 (2010).

- ⁴³G. F. R. Ellis, „The evolving block universe and the meshing together of times”, *Annals of the New York Academy of Sciences* **1326**, 26–41 (2014).
- ⁴⁴P. Thyssen, „The Block Universe: A Philosophical Investigation in Four Dimensions”, *Theses* (Institute of Philosophy, KU Leuven (Belgium), sep 2020).
- ⁴⁵E.ourgoulhon, „3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity”, *arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology* (2007), *arXiv:gr-qc/0703035* [gr-qc].
- ⁴⁶J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Second edition, Graduate texts in mathematics 218 (Springer, New York Heidelberg Dordrecht London, 2013), 708 p.
- ⁴⁷E. Minguzzi en M. Sanchez, *The causal hierarchy of spacetimes*, 2008, *arXiv:gr-qc/0609119* [gr-qc].
- ⁴⁸T. Müller en T. Placek, „Defining Determinism”, *British Journal for the Philosophy of Science* **69**, 215–252 (2018).
- ⁴⁹P. de Laplace, F. Truscott en F. Emory, *A Philosophical Essay on Probabilities*, A Philosophical Essay on Probabilities (Wiley, 1902).
- ⁵⁰B. C. Nolan, *Causality violation without time-travel: closed lightlike paths in Gödel’s universe*, 2019, *arXiv:1911.08602* [gr-qc].
- ⁵¹K. Popper en W. Bartley, *The Open Universe: An Argument for Indeterminism From the Postscript to The Logic of Scientific Discovery* (Taylor & Francis, 2012).
- ⁵²J. Butterfield, *On Under-determination in cosmology*, 2014, *arXiv:1406.4747* [physics.hist-ph].
- ⁵³J. Butterfield, „Determinism and indeterminism”, 10.4324/9780415249126-Q025-1 (1998).
- ⁵⁴D. K. Lewis, „New Work for a Theory of Universals”, *Australasian Journal of Philosophy* **61**, 343–377 (1983).
- ⁵⁵J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds* (Springer, 2019) hfdstk. 1-8.
- ⁵⁶G. Belot, „Determinism and ontology”, *International Studies in the Philosophy of Science* **9**, 85–101 (1995), eprint: <https://doi.org/10.1080/02698599508573508>.
- ⁵⁷G. Belot, „New Work for Counterpart Theorists: Determinism”, *The British Journal for the Philosophy of Science* **46**, 185–195 (1995).
- ⁵⁸H. Halvorson, J. Manchak en J. O. Weatherall, *Defining Determinism*, 2025, *arXiv:2503.05681* [physics.hist-ph].
- ⁵⁹D. Lewis, „Are We Free to Break the Laws?”, *Theoria* **47**, 113–21 (1981).
- ⁶⁰D. K. Lewis, *On the Plurality of Worlds* (Wiley-Blackwell, Malden, Mass., 1986) hfdstk. 1,4.
- ⁶¹J. Doboszewski, „Epistemic Holes and Determinism in Classical General Relativity”, *British Journal for the Philosophy of Science* **71**, 1093–1111 (2020).
- ⁶²J. Doboszewski, „Relativistic Spacetimes and Definitions of Determinism”, *European Journal for Philosophy of Science* **9**, 1–14 (2019).
- ⁶³H. Ringström, „Origins and development of the Cauchy problem in general relativity”, *Classical and Quantum Gravity* **32** (2015).
- ⁶⁴C. Kiefer, *Quantum Gravity: Third Edition*, International Series of Monographs on Physics (OUP Oxford, 2012) hfdstk. 4.
- ⁶⁵A. Corichi en D. Núñez, *Introduction to the ADM formalism*, 2023, *arXiv:2210.10103* [gr-qc].

- ⁶⁶Y. Choquet-bruhats en R. P. Geroch, „Global aspects of the Cauchy problem in general relativity”, *Communications in Mathematical Physics* **14**, 329–335 (1969).
- ⁶⁷J. O. Weatherall, „Where Does General Relativity Break Down?”, *Philosophy of Science* **90**, 1342–1351 (2023).
- ⁶⁸K. Landsman, „Singularities, Black Holes, and Cosmic Censorship: A Tribute to Roger Penrose”, *Foundations of Physics* **51**, 1–38 (2021).
- ⁶⁹Y. C. Ong, „Space–time singularities and cosmic censorship conjecture: A Review with some thoughts”, *International Journal of Modern Physics A* **35**, 2030007 (2020).
- ⁷⁰X. Y. Chew en D.-h. Yeom, „Insights and guidelines on the Cauchy horizon theorems”, *Journal of the Korean Physical Society* **85**, 1050–1061 (2024).
- ⁷¹R. P. Newman, „Strengths of naked singularities in Tolman-Bondi spacetimes”, *Classical and Quantum Gravity* **3**, 527–539 (1986).
- ⁷²R. M. Wald, „The Thermodynamics of Black Holes”, *Living Reviews in Relativity* **4** (1999).
- ⁷³M. D. Roberts, „Scalar field counterexamples to the cosmic censorship hypothesis”, *General Relativity and Gravitation* **21**, 907–939 (1989).
- ⁷⁴D. Christodoulou, „Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud”, *Communications in Mathematical Physics* **93**, 171–195 (1984).
- ⁷⁵D. Christodoulou, „The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field”, *Annals of Mathematics* **149**, 183–217 (1999).
- ⁷⁶R. M. Wald, *Gravitational Collapse and Cosmic Censorship*, 1997, arXiv:gr-qc/9710068 [gr-qc].
- ⁷⁷J. Doboszewski, „Non-uniquely Extendible Maximal Globally Hyperbolic Spacetimes in Classical General Relativity: A Philosophical Survey”, in *Making it Formally Explicit*, red. door G. Hofer-Szabó en L. Wroński (2017), p. 193–212.
- ⁷⁸G. Dotti, R. J. Gleiser, I. F. Ranea-Sandoval e.a., „Gravitational instabilities in Kerr spacetimes”, *Classical and Quantum Gravity* **25**, 245012 (2008).
- ⁷⁹C. D. Anderson, „The Positive Electron”, *Phys. Rev.* **43**, 491–494 (1933).
- ⁸⁰R. Penrose, „Gravitational Collapse and Space-Time Singularities”, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57–59 (1965).
- ⁸¹J. Luk en J. Sbierski, *Instability results for the wave equation in the interior of Kerr black holes*, 2016, arXiv:1512.08259 [gr-qc].
- ⁸²J. Luk en S.-J. Oh, „Proof of linear instability of the Reissner–Nordström Cauchy horizon under scalar perturbations”, *Duke Mathematical Journal* **166**, 10.1215/00127094–3715189 (2017).
- ⁸³B. S. Kay, M. J. Radzikowski en R. M. Wald, „Quantum Field Theory on Spacetimes with a Compactly Generated Cauchy Horizon”, *Communications in Mathematical Physics* **183**, 533–556 (1997).
- ⁸⁴S. W. Hawking, „Chronology protection conjecture”, *Phys. Rev. D* **46**, 603–611 (1992).
- ⁸⁵T. Bunyaratavej, P. Burikham en D. Senjaya, *Revisiting Chronology Protection Conjecture in The Dyonic Kerr-Sen Black Hole Spacetime*, 2025, arXiv:2408.06023 [gr-qc].
- ⁸⁶C. Burrage, C. d. Rham, L. Heisenberg e.a., „Chronology protection in Galileon models and massive gravity”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2012**, 004–004 (2012).
- ⁸⁷M. S. Modgil, „The Chronology Protection Conjecture and the Formation of the Kerr Black Hole Through Gravitational Collapse”, viXra (2018).

- ⁸⁸M. L. G. Redhead, „Models in Physics”, The British Journal for the Philosophy of Science **31**, 145–163 (1980).
- ⁸⁹L. W. Brenneman en C. S. Reynolds, „Constraining Black Hole Spin via X-Ray Spectroscopy”, The Astrophysical Journal **652**, 1028–1043 (2006).
- ⁹⁰K. e. a. Akiyama, „First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole”, The Astrophysical Journal Letters **875**, L1 (2019).
- ⁹¹B. P. e. a. Abbott (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), „Tests of General Relativity with GW150914”, Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016).