De Dutch Book Stelling

Een bachelorscriptie van

Mirte Dekkers

Onder begeleiding van

Klaas Landsman

Nijmegen, juli 2006

Inhoudsopgave

Voorwoord **5**

Samenvatting **7**

1 Verschillende interpetaties van kansen **9**
1.1 Een mentale of een fysische interpretatie van kansen? 9
1.2 Eénmalige en herhaaldelijke gebeurtenissen. 10
1.3 Verschillende interpretaties 11
1.4 Hoe nu verder? 12

2 Het kwantificeren van de mate van geloof **13**
2.1 Een subjectieve of objectieve mate van geloof? 13
2.2 Het kwanticiferen van de mate van geloof 14
2.3 Wed-ratio's 15
2.4 Enkele overwegingen 16

3 De Dutch Book stelling **19**
3.1 Dutch Books en coherentie 19
3.2 Uniciteit van wed-ratio's 20
3.3 De Dutch Book stelling 21
3.4 Voorwaardelijke kansen 23

4 Determinisme en de Bell-ongelijkheden **27**
4.1 Determinisme 27
4.2 Het onstaan van de kwantumtheorie 28
4.3 De Bell-ongelijkheden en determinisme 29

Bibliografie **31**

Voorwoord

Binnen de wiskunde bestaan er vele richtingen waarin je je kan specialiseren. Na de redelijk brede bachelorfase kies je één van deze richtingen om je verder in te verdiepen. Op dat punt ben ik nu aangekomen en binnenkort zou ik moeten weten welke richting dat in mijn geval wordt. Helaas is keuzes maken nooit een van mijn sterkste eigenschappen geweest en ook nu weer heb ik eigenlijk geen idee welke kant ik op wil. Gelukkig wist ik al in mijn eerste jaar wat ik in ieder geval niet wilde: kansrekening en statistiek. Alles wat met één van deze twee deelgebieden in de wiskunde van doen had werd zoveel mogelijk door mij vermeden.

Hoe heeft het dan toch zover kunnen komen dat ik mijn bachelorfase, waarin een minimum aan kanstheoretische vakken voorkomt, ga afronden met een scriptie over dit onderwerp? Dit heeft te maken met het feit dat ik een aantal maanden geleden voor het eerst in aanraking ben gekomen met een voor mij geheel nieuwe tak van de kansrekening. Naast een puur wiskundige theorie bestaat er namelijk ook een meer filosofische invalshoek van de kansrekening die zich bezighoudt met de interpretatie van het kansbegrip. Deze tak van de kansrekening zoekt naar antwoorden op vragen als 'Waarom zijn de axioma's van de kansrekening gerechtvaardigd?', 'Zijn kansen mentaal of fysisch?' en de meer algemene vraag 'Hoe moeten we een kans interpreteren?'. In de kansrekening zoals die op de middelbare school en ook op de universiteit gedoceerd wordt komt deze filosofische achtergrond niet aan de orde.

Onder enthousiasmerende begeleiding van Klaas Landsman heb ik me verdiept in dit onderwerp. Helaas was de tijd erg kort en konden we dus slechts een beperkt gedeelte van dit omvangrijke onderwerp bestuderen. Desalnietemin vond ik het erg leuk om op deze manier in kort tijd iets meer over de interpretatie van kansen te weten te komen.

Voordat begon met schrijven was mijn streven de inhoud van deze scriptie zo te presenteren dat deze ook voor niet-wiskundigen te begrijpen zou zijn. Gaandeweg ben ik er achter gekomen dat het opschrijven van wiskunde veel lastiger bleek te zijn dan ik dacht. Eerst moet je de stof zelf door en door begrijpen (en dat bleek niet altijd even eenvoudig) en dan is het nog de kunst om de informatie helder en duidelijk te formuleren. Ik denk dat ik iets te enthousiast was en ben bang dat ik hier en daar de niet-wiskundige lezer kwijt zal raken. Toch hoop ik dat de tekst ook door niet-wiskundigen met plezier gelezen wordt en dat de grote lijn voor iedereen te volgen is.

Deze scriptie had niet tot stand kunnen komen zonder de prettige en stimulerende samenwerking met mijn begeleider Klaas Landsman. Veel dank daarvoor. Verder wil ik Renée bedanken voor de gezelligheid tijdens het studeren; het ploeteren in het studielandschap terwijl buiten de zon scheen werd daardoor een stuk aangenamer. Tot slot wil ik Meron bedanken voor het helpen met de layout en alle andere LaTeX problemen.

Samenvatting

Zowel in het dagelijks leven als in de wetenschappelijke wereld hebben we regelmatig te maken met kansen. Op basis van gegeven informatie berekenen we de kans dat een bepaalde uitspraak waar is of dat een bepaalde gebeurtenis zal plaatsvinden. Deze scriptie gaat niet over de wiskunde die hier achter zit, maar over de manier waarop we kansen kunnen interpreteren. Het belangrijkste resultaat waar we naar toe werken is het bewijzen van de Dutch Book stelling. Deze stelling toont van één van de mogelijke interpretaties van het kansbegrip aan dat zij consistent is met de axioma's van de kansrekening.

In hoofdstuk 1 wordt allereerst onderscheid gemaakt tussen een mentale en een fysische interpretatie van kansen. Verder worden twee verschillende typen gebeurtenissen beschreven: éénmalige en herhaaldelijke gebeurtenissen. Tot slot komen de belangrijkste interpretaties van het kansbegrip aan de orde.

In hoofdtuk 2 wordt de mentale interpretatie van kansen op éénmalige gebeurtenissen verder uitgewerkt. Het concept van coherente weddenschappen wordt ingevoerd om de mate van geloof die een persoon in een gebeurtenis heeft te kwantificeren. Deze mate van geloof wordt uitgedrukt in de zogenaamde *wed-ratio*. Tot slot worden enkele kanttekeningen geplaatst bij de manier waarop deze kwantificatie tot stand komt.

In hoofdstuk 3 wordt de Dutch Book stelling bewezen. Deze stelling zegt dat coherente wed-ratio's voldoen aan de axioma's van de kansrekening.

In hoofstuk 4 wordt beschreven hoe kansen door de jaren heen een fundamentele plaats hebben gekregen in de natuur. De discussie over determinisme die aan het begin van de 20e eeuw zijn hoogtepunt bereikte komt aan de orde en we bespreken welke wetenschappers hier een bijdrage aan hebben geleverd. Tot slot schetsen we met behulp van de Dutch Book stelling een argument tegen het deterministische wereldbeeld.

1

Verschillende interpetaties van kansen

Naast een puur wiskundige kanstheorie bestaan er verschillende filosofische interpretaties van het begrip kans. Terwijl over de axioma's van de wiskundige theorie vrijwel geen discussie bestaat, is men er tot op heden niet in geslaagd om tot overeenstemming te komen wat betreft de interpretatie van het kansbegrip. Door de jaren heen zijn er verschillende theorieën ontstaan, die elk hun eigen interpretatie geven aan een kans. Een belangrijke tweedeling in deze theorieën ontstaat doordat sommige theorieën kansen als een mentale aangelegenheid beschouwen en andere als een fysische. In dit hoofdstuk bespreken we de belangrijkste interpretaties van de kanstheorie en geven we aan op welke punten ze van mening verschillen.

1.1 Een mentale of een fysische interpretatie van kansen?

Gaan we dieper nadenken over het begrip kans, dan rijst al snel de vraag welke eigenschappen we aan een kans mogen toeschrijven. Bestaan kansen slechts als menselijke hersenspinsels of liggen kansen in de aard van de natuur en hebben ze niets van doen met het bestaan van de mensheid? Het antwoord op deze vragen bepaalt in grote mate welke interpretatie je geeft aan het begrip kans. We maken in eerste instantie onderscheid tussen een *mentale* en een *fysische* interpretatie van kansen.
De *mentale* interpretatie associeert een kans met de *kennis* of *mate van geloof* van personen. Volgens deze interpretatie representeert de kans op een gebeurtenis de mate van (rationeel) geloof van een persoon in deze gebeurtenis. De mate van geloof die een persoon heeft in een bepaalde gebeurtenis zal vanzelfsprekend afhangen van de voorkennis van deze persoon met betrekking tot de gebeurtenis. Dat wil zeggen: de kans die je toekent aan een gebeurtenis hangt af van de hoeveelheid achtergrondinformatie die je hebt over de gebeurtenis. Een kans is in deze benadering eigenlijk niets anders dan een numerieke waarde voor de onzekerheid met betrekking tot het wel of niet plaatsvinden van een gebeurtenis gegeven bepaalde informatie.

Een goed voorbeeld van een mentale interpretatie van een kans is het volgende: bij de huidige kennis over de banen van planetoïden is er een kans van 0.0014 dat er de komende 100 jaar één op de aarde inslaat. Onlangs verscheen een artikel in de krant over een nieuwe telescoop die in gebruik werd genomen. Met deze telescoop kunnen de banen van planetoïden veel beter in kaart worden gebracht. De hoop is met deze nieuwe informatie de inslagkans tot 0 terug te brengen. Dit is precies in lijn met de mentale interpretatie. De kans van 0.0014 representeert volgens deze interpretatie immers de mate van geloof die wetenschappers op basis van hun voorkennis hebben in de gebeurtenis (in dit geval de inslag van een planetoïde). Als de voorkennis met betrekking tot deze gebeurtenis verandert, zal ook de kans die ze aan de gebeurtenis toeschrijven veranderen. Ze hopen dat deze kans met extra voorkennis terug te brengen is tot nul. De mentale benadering wordt ook wel de *epistemologische* benadering genoemd.
De *fysische* interpretatie gaat er vanuit dat kansen niets van doen hebben met het geloof van mensen: ze bestaan slechts in de *objectieve materiële wereld* om ons heen. Kansen liggen volgens deze interpretatie als het ware 'in aard van de natuur' en bestaan dus onafhankelijk van de mensheid. De fysische interpretatie wordt ook wel de *zuivere* of *objectieve* interpretatie genoemd. Deze laatste benaming is wat ongelukkig gekozen, omdat men binnen de mentale interpretatie ook weer onderscheid maakt tussen een subjectieve en een objectieve mentale interpretatie.
In het voorbeeld van de planetoïde zal de fysische interpetatie een kans van 0 of 1 toekennen aan een inslag. Immers met de wetten van Newton kun je gegeven de huidige toestand van het heelal exact voorspellen hoe het zich in de toekomst zal gedragen. Omdat wetenschappers (nog) niet precies op de hoogte zijn van de huidige stand van het heelal, kennen ze een kans van 0.0014 toe aan een inslag. 'Voor de natuur' is de huidige toestand echter wel bekend en is het dus geen verrassing of er een planetoïde zal inslaan of niet: een fysische kans zal dus gelijk zijn aan 0 of 1.
Samengevat: De mentale interpretatie associeert kansen met mate van geloof. Deze mate van geloof hangt af van voorkennis. Als deze voorkennis verandert zal ook de kans veranderen. De fysische interpretatie verwerpt de betrokkenheid van de mensheid bij het toeschrijven van kansen en in deze interpretatie is een kans dan ook niet afhankelijk van kennis of informatie. Een fysische kans zal -eenmaal bepaald- ook niet meer veranderen, in tegenstelling tot een mentale kans die verandert als de voorkennis verandert.

1.2 Eénmalige en herhaaldelijke gebeurtenissen.

Een kans heeft altijd betrekking op een bepaalde gebeurtenis. Gegeven een gebeurtenis willen we weten hoe groot de kans is dat deze gebeurtenis zal plaatsvinden. We onderscheiden twee verschillende *typen* gebeurtenissen.
Een gebeurtenis noemen we *éénmalig* als slechts één keer bepaald kan worden of deze gebeurtenis al dan niet plaatsvindt. Een éénmalige gebeurtenis is bijvoorbeeld 'de zon schijnt op 1 augustus 2007' of 'de uitkomst van de eerstvolgende worp met deze dobbelsteen is zes'.
Bij een *herhaaldelijke* gebeurtenis daarentegen kunnen we meerdere keren achter elkaar bepalen of de gebeurtenis plaatsvindt. Voorbeelden van herhaaldelijke gebeurtenissen zijn: 'de zon schijnt op zondag' en 'de uitkomst van een worp met een dobbelsteen is zes'. Iedere zondag opnieuw kunnen we bepalen of de zon schijnt en we kunnen zo vaak met een dobbelsteen werpen als we willen.

Het onderscheid tussen éénmalige en herhaaldelijke gebeurtenissen is van groot belang met betrekking tot de interpretatie van het kansbegrip.

1.3 Verschillende interpretaties

De vier belangrijkste interpretaties van de kanstheorie zijn de volgende:[1]

De logische theorie De logische theorie interpreteert primair kansen op éénmalige gebeurtenissen. Deze theorie interpreteert een kans als de mate van geloof in een gebeurtenis. Ze gaat er vanuit dat rationele personen die beschikken over dezelfde achtergrondinformatie dezelfde mate van geloof zullen hebben in een gebeurtenis. De kans op een gebeurtenis is in deze theorie dus niet afhankelijk van één enkel individu en wordt daarom ook wel objectief of 'objective Bayesian' genoemd.

De subjectieve theorie Ook de subjectieve theorie interpreteert kansen op eenmalige gebeurtenissen en associeert een kans met een bepaalde mate van geloof. In tegenstelling tot de logische theorie, kan het bij de subjectieve interpretatie wél voorkomen dat twee personen met dezelfde voorkennis een andere mate van geloof (en dus een andere kans) toekennen aan een gebeurtenis. De subjectieve theorie wordt ook wel 'subjective Bayesian' genoemd.

De frequentietheorie De frequentietheorie definieert alleen een kans op een gebeurtenis die herhaaldelijk kan plaatsvinden. Er wordt steeds opnieuw gekeken of een gebeurtenis wel of niet plaatsvindt. Na elke evaluatie wordt de frequentie van de gebeurtenis berekend en zo ontstaat een (oneindige) rij van frequenties. De limiet van deze rij is, als deze bestaat, de kans dat de gebeurtenis plaatsvind.

De propensity theorie De propensity theorie is een aangepaste versie van de frequentietheorie zodat deze interpretatie toepasbaar wordt op éénmalige gebeurtenissen. Sommigen argumenteren echter dat deze toepasbaarheid op éénmalige gebeurtenissen maar schijn is en dat de propensity theorie slechts kansen op herhaardelijke gebeurtenissen beschrijft.[2]

Zowel de logische als de subjectieve theorie associëren kansen met mate van geloof en geven hierdoor een mentale interpretatie aan kansen. De frequentie en propensity theorie beschrijven een objectieve methode om een kans toe te kennen aan een gebeurtenis. Bijvoorbeeld 'genereer een rij uitkomsten en bepaal de frequentie' is een dergelijke objectieve methode van de frequentietheorie. Deze theorieën geven dus een objectieve oftewel fysische interpretatie aan kansen.

De meeste aanhangers van een bepaalde theorie zien hun interpretatie als de enige geldige en verwerpen de andere interpretaties. Bruno de Finetti (1906-1985), één van de grondleggers van de subjectieve theorie, was van mening dat *alle* kansen van nature mentaal zijn. Karl Popper (1902-1994), de grondlegger van de propensity theorie, beschouwde juist alle kansen als fysisch en verwierp het bestaan van mentale kansen. Er zijn echter ook voorstanders van een meer pluralistische interpretatie, waarbij de interpretatie van een kans afhangt van de context. In Gillies (2000) wordt beargumenteerd dat economische en sociale wetenschappen meer baat hebben bij een mentale interpretatie, terwijl de natuurwetenschappen beter overweg kunnen met het begip fysische kans.

---

1. Een uitgebreide beschrijving van deze vier theorieën is te vinden in Gillies (2000).
2. Williamson (2005, blz. 9-10)

1.4 Hoe nu verder?

In de volgende hoofdstukken zal de mentale interpretatie van kansen op éénmalige gebeurtenissen centraal staan. We zullen laten zien dat een mentale interpetatie van kansen de wiskundige axioma's van de kansrekening respecteert. Om dit te laten zien moeten we eerst een manier vinden om een numerieke waarde toe te kennen aan een bepaalde mate van geloof. In hoofdstuk 2 zullen we zien hoe het concept van coherente weddenschappen wordt geïntroduceerd om dit voor elkaar te krijgen. We ontwikkelen een methode om aan elke gebeurtenis een getal (de wed-ratio) toe te kennen dat de mate van geloof in deze gebeurtenis representeert. In hoofdstuk 3 laten we zien dat de functie die aan elke gebeurtenis een wed-ratio toevoegt een *kansfunctie* is, dat wil zeggen een functie die voldoet aan de axioma's van de kansrekening. Dit belangrijke resultaat is geformuleerd in de 'Dutch Book' stelling en werd onafhankelijk bewezen door Frank Ramsey (1903-1930) en Bruno de Finetti (1906-1985).[3] Tot slot zullen we in hoofdstuk 4 laten zien welke rol kansen in de natuurwetenschappen spelen en we laten zien hoe de Dutch Book stelling opduikt in een argument tegen het deterministische wereldbeeld.

3. Een voorloper van deze stelling vindt men al bij Bayes, zie Earman (1992). Meer over de fol van Ramsey en de Finetti met betrekking tot de Dutch Book stelling is onder andere te vinden in Gillies (2000) en von Plato (1994).

2

Het kwantificeren van de mate van geloof

In het vorige hoofdstuk zijn we kort ingegaan op de verschillende interpretaties van kansen. We hebben gezien dat het associëren van een kans op een bepaalde gebeurtenis met de mate van geloof in deze gebeurtenis één van de mogelijkheden is om een kans te interpreteren. In dit hoofdstuk gaan we eerst in op de vraag of de mate van geloof in een gebeurtenis subjectief of objectief is. Daarna laten we zien hoe je, gebruik makend van weddenschappen, de mate van geloof die een persoon in een gebeurtenis heeft zou kunnen kwantificeren.

2.1 Een subjectieve of objectieve mate van geloof?

We hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat zowel de subjectieve als de logische theorie de kans op een gebeurtenis interpreteren als de *mate van geloof* in deze gebeurtenis. Toch is er een belangrijk verschil tussen beide interpretaties.

De logische theorie gaat er vanuit dat de mate van geloof alleen maar afhangt van de achtergrondinformatie die een persoon heeft over een gebeurtenis. De kans hangt dus niet af van de persoon zelf. Twee logisch denkende personen met dezelfde achtergrondinformatie hebben volgens deze theorie altijd dezelfde mate van geloof in een gebeurtenis. Je zou kunnen zeggen dat de logische theorie de mate van een geloof als een objectief goed beschouwt.

In de subjectieve theorie -de naam zeg het al- is het wél mogelijk dat de mate van geloof in een bepaalde gebeurtenis van persoon tot persoon verschilt. Een kans is in deze theorie afhankelijk van een persoon en we kunnen bij de subjectieve interpretatie dan ook niet meer spreken over *de* kans op een bepaalde gebeurtenis, maar alleen over de kans die jij, ik of iemand anders toekent aan een gebeurtenis.

In beide gevallen hoeft de kans die een persoon toekent aan een gebeurtenis niets te maken te hebben met de werkelijkheid. Denk bijvoorbeeld aan het voorbeeld van de planetoïde in het vorige hoofdstuk.

De volgende situatie is goed voorbeeld van mentale kansen en het verschil tussen subjectieve en objectieve mentale kansen.
Mijn overbuurmeisje zal een grote mate van geloof hechten aan het feit dat Sinterklaas bestaat en voor haar is de kans dat Sinterklaas bestaat bijna gelijk aan 1. Natuurlijk weten we allemaal dat Sinterklaas niet bestaat en de meeste mensen zullen aan de bewering 'Sinterklaas bestaat' de kans 0 toekennen.
Het verschil tussen de subjectieve en logische theorie wordt als volgt duidelijk. Stel mijn overbuurmeisje heeft een tweelingzusje dat op precies dezelfde wijze door haar ouders over Sinterklaas is voorgelicht. Gaan we er vanuit dat zij hierdoor ook over exact dezelfde voorkennis bezit, dan moet zij volgens de logische theorie ook exact dezelfde mate van geloof hechten aan het bestaan van Sinterklaas als haar zusje. De subjectieve theorie echter laat toe dat het ene zusje sterker in Sinterklaas gelooft dan het andere.
De discussie over het al dan niet objectief zijn van de mate van geloof is onder meer zo gecompliceerd omdat we in werkelijkheid nooit een situatie hebben waarin twee personen exact dezelfde voorkennis hebben over een gebeurtenis. Allerlei factoren kunnen van invloed zijn op de mate van geloof van een persoon in een bepaalde gebeurtenis. Wanneer twee personen een verschillende mate van geloof hebben in een gebeurtenis kunnen we dit vrijwel altijd toeschrijven aan een verschil in voorkennis.
In het vervolg van dit hoofdstuk gaan we op zoek naar een manier om de mate van geloof die een persoon in een gebeurtenis heeft te kwanticiferen. De theorie die we opzetten is zowel bruikbaar voor een subjectieve als objectieve mate van geloof.

2.2 Het kwanticiferen van de mate van geloof

Als we een kans willen opvatten als een bepaalde mate van geloof, dan zullen we een manier moeten bedenken om aan de mate van geloof een numerieke waarde toe te kennen. In het bovenstaande voorbeeld hebben we eigenlijk al iets dergelijks gedaan. We identificeerden een grote mate van geloof met een kans van bijna één en wanneer er geen enkel geloof in een bepaalde bewering aanwezig was associeerden we dit met een kans gelijk aan nul. Maar wat nu als we 'enigzins', 'redelijk veel' of 'een beetje' in een theorie geloven? Hoe kunnen we op een een getal toekennen aan deze intuïtieve uitspraken?
We moeten in ieder geval in ons achterhoofd houden waar we naar toe willen: een interpretatie van het kansbegrip die consistent is met de axioma's van de kansrekening. Als we een manier gevonden hebben om de mate van geloof te kwantificeren dan moeten we controleren of deze de axioma's van de kansrekening respecteert. Dit resultaat is geformuleerd in de Dutch Book stelling, die we in het volgende hoofdstuk bewijzen.
Maar eerst moeten we dus een methode bedenken om de mate van geloof te kwantificeren. Dit doen we op basis van de veronderstelling dat je bereid bent actie te ondernemen op basis van je geloof. Een mogelijke actie met betrekking tot een gebeurtenis is het aangaan van een weddenschap over deze gebeurtenis. Je bereidheid een weddenschap aan te gaan zal natuurlijk afhangen van de uitbetaling van de weddenschap, dat wil zeggen van je winst of verlies als de gebeurtenis waarover een weddenschap wordt afgesloten plaatsvindt. We zullen een theorie opstellen waarbij de uitbetaling van een weddenschap afhangt van een zogenaamde *wed-ratio*. Het is de bedoeling dat deze wed-ratio een maat zal zijn voor het geloof van een persoon in een bepaalde gebeurtenis. We zijn hier misschien wat kort door de bocht wanneer we er zomaar vanuit gaan dat iedereen bereid is een weddenschap aan te gaan; over dit onderwerp zijn al vele discussies gevoerd en we komen hier aan het eind van dit hoofdstuk op terug. Voorlopig nemen we echter aan dat

iemand die een bepaalde mate van geloof heeft in een gebeurtenis ook bereid is daar een weddenschap over af te sluiten.

2.3 Wed-ratio's

We gaan het bovenstaande nu precies maken met behulp van een voorbeeld. Stel Maria wil van Daan weten in welke mate hij gelooft dat een bepaalde gebeurtenis G zal plaatsvinden. G is een éénmalige gebeurtenis en we doen de aanname dat G *wél* of *níet* zal plaatsvinden.[1] Verder gaan we er vanuit dat we ook daadwerkelijk kunnen vaststellen of G plaatsvindt of niet. Deze twee aannames zijn nodig omdat we willen dat het mogelijk is een weddenschap over de gebeurtenis G af te sluiten. In het voorbeeld zullen we voor G de gebeurtenis 'Duitsland wint het WK 2006' nemen.
Omdat Maria wil weten in welke mate Daan gelooft dat Duitsland het WK zal winnen, stelt ze hem voor hierover te wedden. Daan mag daarbij de *wed-ratio* r bepalen en daarna zal Maria een getal I kiezen dat zowel positief als negatief mag zijn. Dat het teken van I aan Daan niet bekend is op het moment dat hij r mag kiezen zorgt ervoor dat Daan r niet hoger of lager kan kiezen dan zijn werkelijke mate van geloof. We komen hier zo meteen op terug. De wed-ratio r bepaalt samen met het getal I het bedrag dat Daan zal winnen of verliezen, zodra de uitslag van de weddenschap bekend is. In de onderstaande tabel zie je hoe deze bedragen afhangen van r en I. [2]

Gebeurtenis	*Uitbetaling*
Duitsland wint het WK	$I(1-r)$
Duitsland wint het WK niet	$-Ir$

In het volgende hoofdstuk zullen we bewijzen dat een verstandige keuze van r altijd tussen 0 en 1 moet liggen. Met een verstandige keuze bedoelen we een keuze van r die voorkómt dat Daan in een situatie verzeild raakt waarbij hij met zekerheid geld zal verliezen, onafhankelijk van de eindstand van het WK. Een dergelijke situatie wordt ook wel een *Dutch Book* genoemd; meer hierover in het volgende hoofdstuk.
Nemen we even aan dat Daan daadwerkelijk zo verstandig is geweest r tussen 0 en 1 te kiezen, dan kunnen we het volgende opmerken: Als Maria $I > 0$ kiest dan zal Daan geld *winnen* als Duitsland het WK wint en geld *verliezen* als Duitsland niet het WK wint. Als Maria $I < 0$ kiest dan zal Daan juist geldt *verliezen* als Duitsland het WK wint en geld *winnen* als Duitsland het WK niet wint. Eigenlijk weet Daan dus op het moment dat hij r kiest nog niet of hij juist vóór of tegen de Duitse overwinning gaat wedden. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat hij op het moment dat hij r kiest niet weet of I positief of negatief is. Deze onwetendheid over het teken van I zorgt ervoor dat hij r niet hoger of lager kan kiezen dan zijn werkelijke mate van geloof.
Stel je immers voor dat Daan op het moment dat hij r mag kiezen al weet dat I een positief getal is. Het is dan, ongeacht de mate van geloof die hij heeft, voordelig voor hem om r zo klein mogelijk te kiezen. Kiest hij bijvoorbeeld $r = -100$ dan zal hij verzekerd zijn

1. Dit lijkt misschien een trivialiteit maar dat is het niet. Meer hierover in hoofdstuk 4.
2. Met de uitbetaling van de weddenschap bedoelen we hier en in de volgende hoofdstukken altijd de winst of het verlies van degene die de wed-ratio kiest. In ons voorbeeld is de uitbetaling dus de winst of het verlies van Daan.

van winst ongeacht de uitslag van het WK. [3] Anderzijds, als hij weet dat I een negatief getal is dan is het in zijn voordeel r zo groot mogelijk te kiezen. Om dit te voorkomen moet Daan de waarde r kiezen voordat Maria het teken van I bepaalt.
Wiskundig kunnen we de bewering dat Daan r gelijk moet kiezen aan de kans p die hij werkelijk toedicht aan een Duitse overwinning, als volgt kracht bij zetten: de verwachte winst van Daan uitgedrukt in p, r en I is gelijk aan:[4]

$$pI(1-r) + (1-p)(-Ir) = (p-r)I.$$

Zodra $p \neq r$ kan Maria het teken van I zo kiezen zodat de weddenschap gemiddeld in het nadeel van Daan zal uitvallen: als $p > r$ kiest ze $I < 0$ en als $p < r$ kiest ze $I > 0$.

2.4 Enkele overwegingen

Mogen we nu aannemen dat we altijd in staat zijn iemands mate van geloof in een gebeurtenis vast te stellen met behulp van weddenschappen? We maken hierover twee opmerkingen: enerzijds over de bereidheid weddenschappen aan te gaan, anderzijds over het type gebeurtenis waarover een weddenschap kan worden afgesloten.
We hebben al eerder opgemerkt dat het misschien niet juist is te veronderstellen dat iedereen bereid is een weddenschap af te sluiten op basis van zijn geloof. Niet iedereen is immers bereid het risico te lopen geld te verliezen. Als de absolute waarde van I groot wordt kan het potentiële verlies zelfs behoorlijk oplopen. Meestal wordt dan ook aangenomen dat I relatief klein wordt gekozen ten op zichte van het kapitaal van de personen die de weddenschap aangaan.
Maar ook bij relatief kleine bedragen blijft de onvoorwaardelijke bereidheid te wedden twijfelachtig. Howson en Urbach (1990) gebruiken de volgende strategie om dit probleem te omzeilen. Het kiezen van een bepaalde wed-ratio hoeft in hun interpetatie niet meer te betekenen dat je daadwerkelijk bereid bent (van beide kanten) te wedden tegen deze wed-ratio. Ze gaan er slechts vanuit dat je een weddenschap met betrekking tot de door jou gekozen wed-ratio voor beide partijen *eerlijk* vindt. Een eerlijke weddenschap is een weddenschap waarvan de verwachte uitkomt voor beide partijen 0 is (zie het einde van sectie 2.3). We hebben al gezien dat dit ook onder de aanname dat je daadwerkelijk bereid bent om te wedden het geval is. We krijgen dus uiteindelijk met een iets andere motivatie dezelfde wed-ratio's.
Een tweede kanttekening die we moeten maken bij onze theorie is de beperking van het type gebeurtenis waaraan we met behulp van weddenschappen een kans kunnen toekennen. Door het gebuik van weddenschappen beperken we ons in ieder geval tot éénmalige gebeurtenissen.[5] We kunnen namelijk geen weddenschap afsluiten over een herhaaldelij-

3. Merk op: Omdat het het teken van I in dit geval bekend is voordat r wordt bepaald gaat het bewijs dat een verstandige keuze van r tussen 0 en 1 moet liggen niet meer op.
4. We nemen hier het volgende aan: als Daans mate van geloof in een Duitse overwinning gelijk is aan p dan is Daans mate van geloof in een Duitse nederlaag gelijk aan $1-p$. Dit volgt uit de axioma's van de kansrekening. We zullen in het volgende hoofdstuk bewijzen dat onze manier om de mate van geloof te kwantificeren deze axioma's respecteert.
5. Ook op een combinatie van éénmalige gebeurtenissen kunnen we de kans bepalen. We kunnen namelijk elke combinatie van éénmalige gebeurtenissen weer opvatten als een éénmalige gebeurtenis. De éénmalige gebeurtenissen 'het regent op 1 januari 2007' en 'de zon schijnt op 2 januari 2007' kunnen we combineren tot de gebeurtenis 'het regent op 1 januari 2007 en de zon schijnt op 2 januari 2007'. Van deze laatste gebeurtenis

ke gebeurtenis als 'het regent op zondag'. Om over deze gebeurtenis te kunnen wedden moeten we specificeren welke zondag we bedoelen en dat is precies het terugbrengen van de herhaaldelijke gebeurtenis tot een éénmalige gebeurtenis. Maar naast de beperking tot eenmalige gebeurtenissen is er nog een belangrijke eis die we moeten opleggen aan gebeurtenissen waarover we weddenschappen kunnen afsluiten. Om de uitkomst van de weddenschap te bepalen moet immers worden vastgesteld of de gebeurtenis al dan niet heeft plaatsgevonden. We kunnen alleen weddenschappen afsluiten (kansen toekennen) aan gebeurtenissen die wél of níet plaatsvinden. Een dergelijke gebeurtenis noemen we *bepaald*. Op het eerste gezicht zou je misschien verwachten dat elke éénmalige gebeurtenis bepaald is, maar zo eenvoudig ligt het niet! We komen hier in hoofdstuk 4 op terug.

We hebben een numerieke waarde aan de mate van geloof toegekend en geprobeerd aannemelijk te maken dat deze waarde een indicatie vormt voor een bepaalde mate van geloof. Eerder merkten we op dat een verstandig persoon zijn wed-ratio r altijd zo zal kiezen dat deze tussen 0 en 1 ligt. Misschien vind je dit niet meteen vanzelfsprekend. We zagen immers al dat als het teken van I al bekend is, dit helemaal niet hoeft te gelden. De eis dat een kans altijd een waarde tussen 0 en 1 moet hebben is één van de axioma's van de kansrekening. In het volgende hoofdstuk bewijzen we dat de zojuist ingevoerde wed-ratio's r de axioma's van de kansrekening respecteren (de Dutch Book stelling).

---

kunnen we slechts één keer vaststellen of de gebeurtenis al dan niet heeft plaatsgevond.

3

De Dutch Book stelling

In het vorige hoofdstuk hebben we wed-ratio's geïntroduceerd om de mate van geloof uit te drukken op een gebeurtenis. Volgens de mentale interpretatie is deze mate van geloof gelijk aan de de kans op deze gebeurtenis. In dit hoofdstuk zullen we laten zien dat deze wed-ratio's voldoen aan de axioma's van de kansrekening.

3.1 Dutch Books en coherentie

Om te bewijzen dat de wed-ratio's voldoen aan de axioma's van de kansrekening doen we een voor de hand liggende maar belangrijke aanname. We gaan er vanuit een persoon nooit tegen zijn eigen belang handelt. In ons geval betekent dat dat Daan zijn wed-ratio nooit zo zal kiezen dat hij, ongeacht de uitkomst van de weddenschap, met zekerheid zal verliezen.
Een weddenschap hoeft zich niet per se te beperken tot één gebeurtenis G, maar kan ook over een aantal gebeurtenissen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gaan. Omdat Daan in elke gebeurtenis natuurlijk een ander mate van geloof kan hebben mag bij hij bij elke gebeurtenis G_i een wed-ratio r_i kiezen. Maria kiest bij elke G_i en r_i een getal I_i. We krijgen zo twee rijtjes getallen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ en $I_1, I_2, \ldots, I_n$, die samen de uitbetaling van de weddenschap bepalen zodra vastgesteld is welke van de gebeurtenissen G_i hebben plaatsgevonden en welke niet.

Definitie:
Een *Dutch Book* is een weddenschap op een serie gebeurtenissen waarbij Maria de getallen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ zo kan kiezen dat Daan, ongeacht de uitkomst, geld zal verliezen.

Definitie:
Als Maria bij de door Daan gekozen wedratio's $r_1, r_2, \ldots, r_n$ geen mogelijkheid heeft door

een slimme keuze van $I_1, I_2, \ldots, I_n$ een Dutch book af te dwingen, dan worden de wed-ratio's $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *coherent* genoemd.

We kunnen de aanname dat niemand een weddenschap zal aangaan waarbij hij zeker is van verlies nu als volgt herformuleren: iedereen zal ervoor zorgen dat zijn wed-ratio's coherent zijn.

3.2 Uniciteit van wed-ratio's

Willen we dat onze theorie over weddenschappen een goede interpretatie is van de kansrekening, dan zullen we moeten bewijzen dat onze wedratio's aan de axioma's van de kansrekening voldoen. Maar voor het zover is, gaan we eerst bewijzen dat het niet mogelijk is twee verschillende wed-ratio's te kiezen voor één en dezelfde gebeurtenis. Onder de aanname van coherentie is dat gemakkelijk te bewijzen.[1]

Stelling:
Stel r_1 en r_2 zijn coherente wed-ratio's behorende bij gebeurtenissen G_1 en G_2. Er geldt: als $G_1 = G_2$ dan $r_1 = r_2$.

We bekijken de situatie waarin Maria op zoek is naar Daans mate van geloof in de gebeurtenissen G_1 en G_2. De stelling zegt nu dat Daan dezelfde mate van geloof in G_1 en G_2 moet hebben als dit dezelfde gebeurtenissen zijn. Gevoelsmatig heel logisch natuurlijk, maar voor de volledigheid volgt hier het bewijs.

Bewijs:
Stel Daan kiest $r_1 \neq r_2$. Dan mogen we er, zonder verlies van algemeenheid, van uit gaan dat $r_1 > r_2$. We laten zien dat Maria in dit geval I_1 en I_2 zo kan kiezen zodat Daan met zekerheid geld verliest.
Stel Maria kiest $I_1 = 10$ en $I_2 = -10$. De uitbetaling aan Daan is dan als volgt:

Gebeurtenis	*Uitbetaling*
G_1	$10(1 - r_1)$
$\neg G_1$	$-10r_1$
G_2	$-10(1 - r_2)$
$\neg G_2$	$10r_2$

Omdat $G_1 = G_2$ zijn er twee mogelijkheden:

1. G_1 en G_2 vinden beide plaats.
   De uitbetaling U is in dat geval gelijk aan $10(1-r_1)-10(1-r_2) = 10(r_2-r_1)$. Omdat $r_1 > r_2$ geldt $U < 0$.
2. G_1 en G_2 vinden beide niet plaats.
   De uitbetaling U is in dat geval gelijk aan $-10r_1 + 10r_2 = 10(r_2 - r_1)$. Opnieuw geldt $U < 0$.

1. Merk op dat de stelling niet zegt dat *iedereen* dezelfde wed-ratio's toe zal kennen aan een gebeurtenis G. De stelling zegt alleen dat *Daan* niet twee verschíllende wed-ratio's toe kan kennen aan één en dezelfde gebeurtenis G.

De mogelijkheid van Maria I_1 en I_2 zo te kiezen dat Daan met zekerheid verliest is in strijd met onze aanname dat Daan coherente wed-ratio's zal kiezen. Blijkbaar moet dus gelden $r_1 = r_2$.

$\square$

Uit deze stelling kunnen we concluderen dat het toekennen van wedratio's aan gebeurtenissen opgevat kan worden als een functie R op een verzameling gebeurtenissen. Deze functie kent aan elke van de gebeurtenissen in deze verzameling een getal toe, dat volgens de subjectieve theorie geïnterpreteerd kan worden als de kans op deze gebeurtenis. Willen we laten zien dat onze theorie over wed-ratio's de axioma's van de kansrekening zoals geformuleerd door Kolmogorov in 1933 respecteert[2], dan moeten we laten zien dat deze functie R een *kansfunctie* is. Een kansfunctie is gedefinieerd op een verzameling A van gebeurtenissen die aan bepaalde eigenschappen voldoet. Voor alle gebeurtenissen G_1, G_2 in A moet gelden dat ook de gebeurtenissen $G_1 \vee G_2, G_1 \wedge G_2, \neg G_1$ en $\neg G_2$ in A zitten. Verder moet A een gebeurtenis Ω bevatten die met zekerheid plaatsvindt.
Het is eenvoudig in te zien dat onze functie R gedefinieerd is op een dergelijke verzameling. Als de gebeurtenissen G_1 en G_2 voldoen aan onze aannamen[3], dan voldoen ook de volgende gebeurtenissen aan de aannamen: G_1 en G_2 vinden beide plaats , G_1 óf G_2 vindt plaats, G_1 vindt niet plaats, G_2 vindt niet plaats. We zullen nu bewijzen dat onze functie R een kansfunctie is.

3.3 De Dutch Book stelling

Laten G, G_1, G_2 en Ω gebeurtenissen zijn waarin een bepaalde mate van geloof kan bestaan dat ze plaatsvinden. Verder geldt dat G_1 en G_2 elkaar uitsluiten, dat wil zeggen: ze kunnen niet beide plaatsvinden. Met $G_1 \vee G_2$ duiden we zoals gezegd aan dat de gebeurtenis G_1 of G_2 plaatsvindt. Ω is een gebeurtenis die met zekerheid zal plaatsvinden. De wedratio's behorende bij de gebeurtenissen $G, G_1, G_2, G_1 \vee G_2$ en Ω duiden we aan met $R(G), R(G_1), R(G_2), R(G_1 \vee G_2)$ en $R(\Omega)$.
Met behulp van deze notatie kunnen we de axioma's van de kansrekening als volgt uitdrukken: [4]

1. $0 \leq R(G) \leq 1$;
2. $R(\Omega) = 1$;
3. $R(G_1 \vee G_2) = R(G_1) + R(G_2)$;
4. $R(G_1|G_2) = \frac{R(G_1 \wedge G_2)}{R(G_2)}$ als $R(G_2) \neq 0$.

Hier staat $R(G_1|G_2)$ voor de voorwaardelijke kans op G_1 gegeven G_2. We concentreren ons eerst op de axioma's 1-3 en komen later terug op de betekenis van voorwaardelijke kansen.

Stelling:

2. Von Plato (1994, blz. 18-26)
3. Dat wil zeggen G_1 en G_2 zijn éénmalige bepaalde gebeurtenissen waarvan we kunnen vaststellen of ze wel of niet hebben plaatsgevonden.
4. Gegeven de eerste twee axioma's is het derde axioma equivalent met het principe van eindige additiviteit: $R(G_1) + R(G_2) + \ldots + R(G_n) = R(G_1 \vee \ldots \vee G_n)$ als $G_1, G_2, \ldots, G_n$ elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn.

Coherente wedratio's voldoen aan de eerste drie axioma's van de kansrekening.

Bewijs:
Het bewijs zit, net als het vorige, als volgt in elkaar: we gaan er vanuit dat Maria geïnteresseerd is in Daans geloof met betrekking tot een bepaalde gebeurtenissen. We tonen voor elk axioma aan dat als Daan zijn wed-ratio's zo kiest dat ze *niet* aan dit axioma voldoen, Maria een mogelijkheid heeft om een Dutch Book af te dwingen. Met andere woorden: als Daans wed-ratio's een van de axioma's schenden en Maria handelt optimaal, dan zal hij met zekerheid geldt verliezen. We voeren de variabele U in om de winst (of het verlies) van Daan met betrekking tot de weddenschap aan te geven. Als $U < 0$ zal Daan dus geld verliezen.

- $0 \leq R(G) \leq 1$.

  Stel $R(G) < 0$. Maria hoeft alleen maar een $I < 0$ te kiezen om Daan tot een Dutch Book te dwingen. Stel zij kiest $I = -10$. Er zijn twee mogelijkheden:
  1. G vindt plaats; dan geldt $U = -10(1 - R(G))$. Omdat $(1 - R(G)) > 0$, geldt $U < 0$.
  2. G vindt niet plaats; dan geldt $U = 10R(G)$. Omdat $R(G) < 0$, geldt eveneens $U < 0$.

  Stel $R(G) > 1$. Nu hoeft Maria slechts $I > 0$ te kiezen om Daan tot een Dutch Book te dwingen. Stel zij kiest $I = 10$. Wederom zijn er twee mogelijkheden:
  1. G vindt plaats; dan geldt $U = 10(1-R(G))$. Omdat $(1-R(G)) < 0$, geldt $U < 0$.
  2. G vindt niet plaats; dan geldt $U = -10R(G)$. Omdat $R(G) > 1$ geldt $U < 0$.

  Om aan de coherentie aanname te voldoen en daarmee de mogelijkheid tot een Dutch Book uit te sluiten moet dus gelden: $0 \leq R(G) \leq 1$.

- $R(\Omega) = 1$.

  Omdat we zeker weten dat Ω zal plaatsvinden, geldt $U = (1 - R(\Omega))I$.

  Stel $R(\Omega) < 1$. Dan is $(1 - R(\Omega)) > 0$. Maria hoeft slechts $I < 0$ te kiezen. Dan geldt $U < 0$ en dwingt ze een Dutch Book af.

  Stel $R(\Omega) > 1$. Dan is $(1 - R(\Omega)) < 0$. Nu hoeft Maria slechts $I > 0$ te kiezen om er voor te zorgen dat $U < 0$ en zodoende Daan tot een Dutch Book te dwingen.

  De coherentie aanname zorgt er dus voor dat $R(\Omega) = 1$.

- $R(G_1 \vee G_2) = R(G_1) + R(G_2)$.

  Omdat dit bewijs iets meer rekenwerk vergt dan het vorige, voeren we de volgende vereenvoudigde notatie in:
  $r_1 := R(G_1)$;
  $r_2 := R(G_2)$;
  $r_3 := R(G_1 \vee G_2)$.
  Dat wil zeggen r_1, r_2 en r_3 zijn respectievelijk de wedratio's die Daan gekozen heeft voor de gebeurtenissen G_1, G_2 en $G_1 \vee G_2$.

Stel $r_3 < r_1 + r_2$. We laten zien dat Maria met zekerheid een verlies afdwingt al zij $I_1 = I_2 > 0$ en $I_3 = -I_1$ kiest (bijvoorbeeld $I_1 = I_2 = 10$ en $I_3 = -10$). De uitkomst van de drie afzonderlijke weddenschappen op de gebeurtenissen G_1, G_2 en $G_1 \vee G_2$ en de totale uitkomst staan hieronder in een tabel weergegeven.[5]

Gebeurtenis	*Uitbetaling 1*	*Uitbetaling 2*	*Uitbetaling 3*	*Totaal*
$G_1 \wedge \neg G_2$	$10(1-r_1)$	$-10r_2$	$-10(1-r_3)$	$10(r_3-(r_1+r_2))$
$\neg G_1 \wedge G_2$	$-10r_1$	$10(1-r_2)$	$-10(1-r_3)$	$10(r_3-(r_1+r_2))$
$\neg G_1 \wedge \neg G_2$	$-10r_1$	$-10r_2$	$10r_3$	$10(r_3-(r_1+r_2))$

Omdat $r_3 - (r_1 + r_2) < 0$ geldt dat in alle gevallen $U < 0$, wat betekent Daan met zekerheid geld verliest ofwel dat Maria een mogelijkheid heeft tot een Dutch Book.

Stel $r_3 > r_1 + r_2$. Maria kan bijna exact hetzelfde doen als in de vorige situatie, maar nu met de tekens verwisseld. Dat wil zeggen $I_1 = I_2 < 0$, bijvoorbeeld $I_1 = I_2 = -10$ en $I_3 = 10$. Dan geldt in alle gevallen $U = -10(r_3 - (r_1 + r_2))$. Omdat geldt $r_3 - (r_1 + r_2) > 0$ is $U < 0$.

Uit bovenstaande kunnen we concluderen dat coherente wed-ratio's aan de eerste drie axioma's van de kansrekening voldoen.

□

3.4 Voorwaardelijke kansen

Het laatste axioma is van iets andere vorm dan de eerste drie; het zegt iets over *voorwaardelijke* kansen. We breiden onze theorie over wed-ratio's enigzins uit om ook voorwaardelijke kansen te kunnen interpreteren.

Definitie:
Een *voorwaardelijke* weddenschap op G_1 gegeven G_2 is een weddenschap op G_1 die alleen doorgang zal vinden als G_2 plaatsvindt. Vindt G_2 niet plaats, dan wordt de weddenschap afgeblazen.

De wed-ratio die een persoon (in ons geval Daan) zal kiezen wanneer hij een voorwaardelijke weddenschap op G_1 gegeven G_2 aangaat geven we aan met $R(G_1|G_2)$. Deze wed-ratio respresenteert Daans mate van geloof in de gebeutenis G_1 wanneer hij op de hoogte is van het feit dat G_2 zal plaatsvinden. We kunnen de uitkomst van een voorwaardelijke weddenschap op G_1 gegeven G_2 met wed-ratio $r = R(G_1|G_2)$ als volgt in een tabel weergeven:

5. De gebeurtenis $G_1 \wedge G_2$ komt niet in de tabel voor omdat G_1 en G_2 elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn.

Gebeurtenis	*Uitbetaling*
$G_1 \wedge G_2$	$I(1-r)$
$(\neg G_1) \wedge G_2$	$-Ir$
$\neg G_2$	0

Om te laten zien dat Daan zijn wedratio gelijk moet kiezen aan $\frac{R(G_1 \vee G_2)}{R(G_2)}$ moeten we onze aanname van coherentie een beetje versterken. Er bestaan namelijk geen voorwaardelijke weddenschappen waarbij Daan met zekerheid geld zal verliezen. Immers als G_2 niet plaatsvindt zal de hele weddenschap worden afgeblazen en zal Daan dus ook geen geld verliezen.

Definitie:
We noemen Daans wedratio's *strikt coherent* als Maria haar getallen I niet zo kan kiezen dat alleen zij kans heeft op een positieve uitkomst.

Omdat we hebben aangenomen dat Daan altijd in zijn eigen belang handelt is het redelijk te veronderstellen dat hij zijn wed-ratio's strikt coherent zal kiezen. Hij heeft er immers geen belang bij een weddenschap af te sluiten waarbij hij geen enkele kans maakt op een positieve uitkomst.

Stelling:
Strikt coherente wed-ratio's voldoen aan axioma 4.

Bewijs:
Wederom voeren we een vereenvoudigde notatie in:
$r_1 := R(G_1 \wedge G_2)$;
$r_2 := R(G_2)$;
$r_3 := R(G_1|G_2)$.
Dat wil zeggen r_1 en r_2 zijn de wed-ratio's die Daan kiest voor respectievelijk de gebeurtenissen $G_1 \wedge G_2$ en G_2. Voor de voorwaardelijke weddenschap op G_1 gegeven G_2 kiest hij wed-ratio r_3. We kunnen het vierde axioma met deze notatie als volgt uitdrukken: $r_3 = \frac{r_1}{r_2}$.

Stel $r_3 < \frac{r_1}{r_2}$.
Maria denkt wederom goed na, voert een aantal berekeningen uit, en besluit de volgende drie weddenschappen met Daan af te sluiten:

1. Ze sluit een weddenschap af over de gebeurtenis $G_1 \wedge G_2$ waarbij ze $I = 10$ kiest.
2. Ze sluit een weddenschap af over de gebeurtenis G_2 waarbij ze $I = -\frac{10r_1}{r_2}$ kiest.[6]
3. Ze sluit een voorwaardelijke weddenschap af over de gebeurtenis G_1 gegeven G_2 waarbij ze $I = -10$ kiest.

We geven de uitbetaling van de drie afzonderlijke weddenschappen en de totale uitbetaling weer in een tabel.

6. Herinner je dat Maria I pas hoeft te kiezen nadat Daan zijn wed-ratio's gekozen heeft. Ze kan dus I op deze manier laten afhangen van Daans wed-ratio's.

Gebeurtenis	*Uitbetaling 1*	*Uitbetaling 2*	*Uitbetaling 3*	*Totaal*
$G_1 \wedge G_2$	$10(1-r_1)$	$-\frac{10r_1}{r_2}(1-r_2) = -10(\frac{r_1}{r_2} - r_1)$	$-10(1-r_3)$	$10(r_3 - \frac{r_1}{r_2})$
$\neg G_1 \wedge G_2$	$-10r_1$	$-\frac{10r_1}{r_2}(1-r_2) = -10(\frac{r_1}{r_2} - r_1)$	$10r_3$	$10(r_3 - \frac{r_1}{r_2})$
$G_1 \wedge \neg G_2$	$-10r_1$	$r_2\frac{10r_1}{r_2} = 10r_1$	0	0
$\neg G_1 \wedge \neg G_2$	$-10r_1$	$r_2\frac{10r_1}{r_2} = 10r_1$	0	0

Omdat $r_3 < \frac{r_1}{r_2}$ geldt in alle gevallen $U \leq 0$. Daan heeft zijn wedratio's dus niet strikt coherent gekozen.
In het geval dat $r_3 > \frac{r_1}{r_2}$ geldt een zelfde soort argument. Maria sluit dezelfde weddenschappen af maar nu met tegengestelde tekens van de getallen I. Ook dan zal blijken dat in alle gevallen $U \leq 0$, ofwel Daans wedratio's zijn niet strikt coherent.

Uit bovenstaande kunnen we concluderen dat strikt coherente wedratio's voldoen aan het vierde axioma van de kansrekening.

$\square$

Met het bewijs van de Dutch Book stelling hebben we aangetoond dat er een mentale interpretatie van kansen bestaat die voldoet aan de axioma's van de kansrekening. In het volgende hoofdstuk zullen we beschrijven hoe kansen door de jaren heen een fundamentele plaats hebben gekregen in de natuur. We laten zien hoe de Dutch Book stelling een rol kan spelen in de discussie rondom fysische kansen en determinisme.

4

Determinisme en de Bell-ongelijkheden

In het begin van de 20e eeuw heerste grote verwarring over de vraag of er in de objectieve materiële wereld ruimte is voor kansen. Het deterministische wereldbeeld dat sinds de ontdekking van de klassieke natuurkunde van Newton de wetenschap beheerste, stond ter discussie. Om nieuw ontdekte natuurverschijnselen te beschrijven werden theorieën ontwikkeld waarin kansen en onzekerheid een centrale rol spelen. In dit hoofdstuk zullen aan de hand van een stukje geschiedenis zien hoe deze theorieën tot stand kwamen en welke weerstand ze opriepen. Tot slot zullen we bekijken welke rol mentale kansen en de Dutch Book stelling spelen in de discussie rondom determinisme.

4.1 Determinisme

We gaan nog eens kijken naar het voorbeeld van de planetoïde uit het eerste hoofdstuk. Volgens wetenschappers is er op dit moment een kans van 0.0014 op de inslag van een planetoïde. We gaven een mentale interpretatie aan deze kans, door het getal 0.0014 op te vatten als de mate van geloof die wetenschappers hebben met betrekking tot een inslag. Deze mate van geloof hangt af van de achtergrondinformatie van de wetenschappers. We beweerden verder dat een fysische kans op deze gebeurtenis gelijk zou moeten zijn aan 0 of 1. De begintoestand is in principe bekend en de wetten van Newton beschrijven waar de planteoïden zich in de toekomst zullen bevinden.
We kunnen ons nu afvragen of dit altijd het geval is. Is het misschien altijd 'aan de natuur' bekend of een bepaalde gebeurtenis al dan niet zal plaatsvinden? In dat geval zou volgens de fysische interpretatie de kans op elke éénmalige gebeurtenis gelijk moeten zijn aan 0 of 1.[1] Dat wil zeggen dat in de natuur alles van te voren bepaald is en er geen ruimte

1. Merk op dat we het op dit moment alleen maar over éénmalige gebeurtenissen hebben. De fysische kans op een herhaaldelijke gebeurtenis als 'ik gooi zes', is de limiet van een rij frequenties en hoeft dus zeker niet gelijk te zijn aan 0 of 1.

is voor onzekerheid. Theorieën waarin dit het geval is heten *deterministisch*, wat grofweg betekent dat ze er vanuit gaan dat de toekomst geheel door het verleden wordt bepaald. Een goed voorbeeld van een deterministische theorie is de klassieke natuurkunde van Isaac Newton (1642- 1727). In deze theorie, die bijvoorbeeld de planeetbanen beschrijft, wordt verondersteld dat alles bepaald is. Met behulp van de begincondities van een systeem en de wetten van de mechanica kun je in principe exact voorspellen hoe dit systeem zich zal gedragen. De reden dat de toekomst voor ons in een deterministische wereld onvoorspelbaar is, is dat we over onvoldoende informatie en rekenkracht beschikken. Zelfs met de meest geavanceerde meetapparatuur is het niet altijd mogelijk om de exacte begincondities van een systeem te bepalen. Tevens is de hoeveelheid informatie die wij kunnen verwerken beperkt, waardoor we de enorme berekeningen die nodig zijn om exacte voorspellingen te doen niet aankunnen.[2]

In een deterministische wereld wordt elke vorm van onzekerheid dus veroorzaakt door menselijke onwetendheid en is er geen ruimte voor fysische kansen.[3] Diverse bekende wetenschappers voerden in het begin van de 20e eeuw een verhit debat over de vraag of de wereld deterministisch is.

4.2 Het onstaan van de kwantumtheorie

De discussie over determinisme kreeg aan het begin van de 20e eeuw een nieuwe inpuls door de ontdekking van verschijnselen, als radioactiviteit, die niet zo één twee drie door de klassieke natuurkunde verklaard konden worden. Max Planck (1858-1947) gebruikt in 1900 in zijn theorie over warmtestraling, die vaak wordt gezien als het begin van de kwantumtheorie, als één van de eersten een kanstheoretische aanpak om dit verschijnsel te beschrijven. Ook in het atoommodel van Bohr uit 1913, waarin de elektronen om de kern zwermen als planeten om de zon, spelen kansen een centrale rol. De meeste natuurkundigen in die tijd verwachtten echter, onder aanvoering van Einstein (1879-1955), dat spoedig een definitieve, deterministische theorie van de microscopische wereld zou worden ontdekt. In deze theorie zou, net als in Newtons theorie van de macroscopische natuur, geen ruimte zijn voor het begrip (fysische) kans. Het tegendeel bleek echter het geval. In januari 1926 kwamen er twee nieuwe theorieën op de markt. De ene, opgesteld door Werner Heisenberg (1901-1976), was zeer wiskundig van aard. De andere theorie, afkomstig van Erwin Schrödinger (1887-1961), was eveneens op geavanceerde wiskunde gebaseerd, maar ging uit van de eenvoudige voorstelling dat alle vormen van materie (en dus ook deeltjes zoals elektronen) golven zijn. Schrödinger was veel conservatiever dan Heisenberg. Hij benadrukte niet alleen het aanschouwelijke karakter van zijn theorie, maar ook zijn visie dat deze deterministisch zou zijn. Hij bleek helaas niet in staat deze visie wiskundig waar te maken. Max Born (1882-1970) stelde voor om de 'materiegolven' van Schrödinger niet als werkelijk bestaandegolven te interpreteren, maar als wiskundige beschrijvingen van kansen. Het voorstel van Born was een keerpunt in de geschiedenis van de natuurwetenschappen: het was de eerste keer dat kansen een fundamentele plaats kregen in de natuurkunde. Dit idee vond vrijwel algehele instemming, en vormt tot op de dag van vandaag de basis voor ons begrip van de microscopische wereld. In 1927 lieten

2. Denken we terug aan het voorbeeld van de planetoïde dan zou het goed mogelijk zijn dat er zoveel planetoïden ontdekt worden dat het onbegonnen werk is om al hun banen in kaart te brengen.
3. Hiermee bedoelen we in de objectieve materiële wereld is een geen ruimte voor fysische kansen op éénmalige gebeurtenissen ongelijk aan 0 of 1.

de natuurkundige Paul Dirac (1902-1984) en de wiskundige John von Neumann (1903-1957) zien hoe de theorieën van Heisenberg en Schrödinger samenhingen. Ze stelden een algemene theorie op die nu als kwantummechanica bekend staat. De kwantummechanica vervangt op microscopische schaal de klassieke mechanica van Newton, en is volgens de interpretatie van Born geen deterministische theorie. Schrödinger en Einstein waren echter niet tevreden met deze uitkomst. Eind 1926 schreef Einstein in een brief aan Born, met wie hij bevriend was, de volgende beroemde woorden over de kwantummechanica:

> *"Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ichüberzeugt, dass der nicht würfelt."*

In vertaling:

> De theorie levert veel op, maar brengt ons nauwelijks dichter bij het geheim van God. In iedergeval ben ik er van overtuigd dat hij niet dobbelt.

Bohr daarentegen schaarde zich (net als Heisenberg) onmiddellijk achter Born en begon zich zelfs als de kampioen van het indeterminisme te manifesteren. Volgens Bohr was het niet aan Einstein om te vertellen wat God had te doen en laten. Bohr en Einstein voerden tussen 1927 en 1949 een verhit debat over de mogelijke rol van kansen in de natuur, maar werden het nooit met elkaar eens. Tot hun dood waren er ook geen argumenten om de een of de ander gelijk te geven: hun debat leek filosofisch en onoplosbaar.

4.3 De Bell-ongelijkheden en determinisme

Het feit dat kansen een belangrijke rol spelen in theorieën die bepaalde natuurverschijnselen beschrijven bewijst nog niet dat kansen ook daadwerkelijk deel uitmaken van de materiële wereld om ons heen. Het zou kunnen dat een deterministische wereld beschreven kan worden met een kanstheoretisch model. Het debat over determinisme kreeg een nieuwe wending toen John Bell (1928-1990) in 1964 bepaalde ongelijkheden voor correlaties formuleerde[4]. Later werd aangetoond dat alle kansen die aan de axioma's van de kansrekening voldoen ook voldoen aan deze ongelijkheden. Met behulp van dit belangrijke resultaat en de Dutch Book stelling kunnen we een argument geven voor de onhoudbaarheid van het deterministische wereldbeeld. We nemen daarvoor aan dat de wereld deterministisch is en geven een bewijs uit het ongrijmde.

Uit de definitie van determinisme volgt dat in een deterministische wereld alle gebeurenissen bepaald zijn. De Dutch Book stelling doet een uitspraak over dit soort gebeurtenissen. De stelling zegt namelijk dat de kansen op gebeurtenissen die bepaald zijn aan de axioma's van de kansrekening voldoen. Tot zover niets nieuws. Maar nu duiken de ongelijkheden van Bell op. Deze zeggen immers dat kansen die aan de axioma's voldoen ook aan deze ongelijkheden voldoen. Zou de wereld deterministische zijn, dan zouden dus alle kansen aan de Bell-ongelijkheden moeten voldoen. Nu blijkt dat er bepaalde processen zijn, bijvoorbeeld de absorbtie van fotonen door een polaroidglas, waarbij zowel uit metingen als uit de theorie blijkt dat ze de Bell-ongelijkheden schenden. Blijkbaar zijn deze processen niet deterministisch en is onze aanname dat de wereld deterministisch is onjuist.

Is met het bovenstaande argument de discussie rondom determinisme nu voor eens en

4. Correlaties zijn de kansen dat twee (of meer) gebeurtenissen beide plaatsvinden.

altijd gesloten? Zo simpel ligt het helaas niet. We moeten tenminste één belangrijke kanttekening plaatsen bij het argument. Om te kunnen conluderen dat alle kansen die aan de axioma's voldoen ook aan de Bell-ongelijkheden voldoen moeten we het principe van localiteit in de natuur aannemen (in de zin dat informatie zich niet sneller kan voortplanten dan licht). Sommige wetenschappers ontkennen deze localiteitsaanname. In dat geval gaat ons argument niet door en ontstaat er ruimte voor determinisme.

De inhoud van dit laatste hoofstuk is grotendeels afkomstig uit 'Bestaat toeval?', een tekst in (die nog in ontwikkeling is) bedoeld voor leerlingen uit de hoogste klassen van het VWO. In deze tekst wordt de inhoud van dit hoofdstuk verder uitgewerkt. Zo komen onder andere de Bell-ongelijkheden uitgebreid aan bod.

Bibliografie

Dekkers, Mirte en Landsman, Klaas. *Bestaat Toeval? (in ontwikkeling)*.

Earman, John. *Bayes or Bust?* Massachusetts Institute of Technology, 1992.

Emch, Gérard, en Chuang, Liu. *The Logic of Thermostatistical Physics*. Springer-Verlag, 2002.

Gilles, D. *Philosophical theories of probability*, Londen: Routledge, 2000.

Howson C. en Urbach P. *Scientific Reasoning: the Bayesian Approach*, Illiniois: Open Court, 1990.

Plato, Jan von. *Creating Modern Probability*. Cambridge University Press, 1994.

Williamson, Jon. *Countable Additivity and Subjective Probablility*. British Journal of Philosophical Science, 1999.

Williamson, Jon. *Bayesian Nets and Causality*. Oxford University Press, 2005