Tentamen Analyse 2 (januari 2006)

Op het mondeling worden twee van de onderstaande vier vragen gesteld. Schrik niet van de vele bullet points. De antwoorden zijn kort, en bovendien eenvoudig in het boek (of in je collegedictaat) te vinden. Ze zijn bedoeld als samenvatting van de behandelde stof.

1. Over Ch. 9 en §10.1:
   - Geef de definitie van een ruimte met inproduct, een ruimte met norm, een metrische ruimte, en een topologische ruimte. Laat zien hoe een inproduct een norm geeft, een norm een metriek, een metriek een topologie.
   - Geef een voorbeeld van een functieruimte die al deze structuren tegelijk heeft.
   - Geef de abstracte definitie van een continue functie tussen twee topologische ruimten, en geef aan hoe deze definitie zich specialiseert als de ruimte een metriek heeft (die de gegeven topologie induceert). Geef ten slotte aan hoe de definitie van een continue *lineaire* afbeelding tussen twee genormeerde ruimtes eruit ziet (als speciaal geval van continuïteit van een functie tussen twee metrische ruimtes).
2. Over Ch. 10:
   - Geef de definitie van de afgeleide van een functie $f : U \to Y$ waarbij $U \subset X$ open is en X en Y genormeerde lineaire ruimtes zijn.
   - Werk deze definitie concreet uit in het geval $X = \mathbb{R}^n$ en $Y = \mathbb{R}^m$.
   - Leg de Taylor-expansie uit in dit laatste geval (en geef dus i.h.b. aan hoe de hogere afgeleiden er uit zien).
3. Over Ch. 11:
   - Formuleer de Stelling van Fubini (§11.4.1) - geen bewijs, wel de precieze voorwaarden.
   - Formuleer de Change of variables formule (11.10) op p. 136 - geen bewijs, wel de precieze voorwaarden.
   - Leg het Example op pp. 146-147 uit - let op dat we hier niet met een diffeomorfisme te maken hebben! Geef dus aan welke versie van de Change of variables formule hier van toepassing is.
4. Over Ch. 12 en §8.7.3. van Zorich Vol. I:
   - Geef de definitie van een glad oppervlak (van gegeven dimensie k in $\mathbb{R}^n$).
   - Geef de voorwaarden op een stelsel vergelijkingen $F = 0$ (met $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) die garanderen dat de oplossingsverzameling een glad oppervlak is.
   - Leg Example 9 op p. 530 van §8.7.3 uit (zonder meetkundige achtergrond, alleen de correcte toepassing van de methode van Lagrange-multiplicatoren).

Veel succes!