Opgave Toegepaste Wiskunde 2

28 februari 2008

3. Beschouw het volgende Kalmanfilter voor herhaalde onnauwkeurige waarneming van een stilstaand object. De positie van het object wordt (a priori) beschreven door een normaal verdeelde stochast X met verwachting 0 en variantie α^2, en de k^{e} waarneming Z_k wordt gegeven door

$$Z_k = X + R_k \ ,$$

waarbij de rij onderling onafhankelijk stochasten $R_1, R_2, R_3, \ldots$ de waarnemingsfouten of *ruis* voorstellen. De waarnemingsfout R_k is onafhankelijk van X, en normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie $\varepsilon_k^2 > 0$.
Dit Kalmanfilter verschilt in twee opzichten van het filter dat in het dictaatje is behandeld: het object wordt verondersteld stil te staan (dit is een vereenvoudiging), en de waarnemingen mogen verschillende nauwkeurigheden hebben (dit is een complicatie).

   (a) Wat is de beste schatting $\widehat{X}_n$ van X op basis van $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$? (Geef een directe uitdrukking, geen recursieve.)

   Hint: $\widehat{X}_n$ is een lineaire combinatie van $Z_1, Z_2, \ldots$ en Z_n.

   (b) Druk $\alpha_n^2 := \mathbb{E}\big((X - \widehat{X}_n)^2\big)$ uit in α en $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

   (c) Ga na dat je resultaat, wanneer je de ε_k allemaal gelijk veronderstelt, voldoet aan de in het dictaatje gegeven recursierelaties voor $\widehat{X}_n$ en voor α_n, toegepast op een stilstaand object. Hoe luiden deze relaties als de ε_k verschillend mogen zijn?

   (d) Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big((X - \widehat{X}_n)^2\big) = 0$$

   dan en slechts dan als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n^2} = \infty \ .$$

   Als de ε_k gelijk zijn, en $\alpha = \infty$, staat hier een bekende wet uit de kansrekening. Welke?