Calculus

1 en 2

voor eerstejaars wiskunde- en natuurkundestudenten

docent: Hans Maassen

September 2004

Mathematisch Instituut
Radboud Universiteit Nijmegen

Inhoudsopgave

Referenties

[Fri]: Avner Friedman: Foundations of modern analysis. Dover Publications, New York 1970.

[Kor]: R.A. Kortram: De theorie van complexe functies. Epsilon Uitgaven 13, Utrecht, 1989.

[Len]: H. Lenstra et al.: Escher and the Droste Effect. Website Universiteit Leiden: `http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/`

[Rud1]: W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis. Mc. Graw-Hill 1953.

[Rud2]: W. Rudin: Real and Complex Analysis. Mc. Graw-Hill 1966.

1 De reële getallen

Met het woord '*calculus*' wordt in het Engels de differentiaal- en integraalrekening aangeduid, en deze is een onderdeel van de *analyse*, de studie van getallen, functies en limieten. Voor een goed begrip van calculus beginnen we daarom met een behandeling van getallen.

De natuurlijke getallen

De getallen die bij het tellen worden gebruikt heten *natuurlijke getallen*.
We beginnen te tellen bij het natuurlijke getal 0. Elk natuurlijk getal heeft een *opvolger*, die niet 0 is, en geen enkel natuurlijk getal is opvolger van meer dan één natuurlijk getal.
Als we van 0 de opvolger nemen (dat is 1), en dan daarvan weer de opvolger (dat is 2), etcetera, komt elk natuurlijk getal op den duur aan de beurt. We zijn echter nooit klaar met tellen: er zijn *oneindig veel* natuurlijke getallen.
De verzameling van alle natuurlijke getallen duiden we aan met de letter $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \cdots\}.$$

De natuurlijke getallen met uitzondering van 0 geven we aan met $\mathbb{N}^*$.
Natuurlijke getallen kunnen worden gebruikt voor het tellen van voorwerpen: het *aantal* elementen van een eindige verzameling is een natuurlijk getal. We kunnen natuurlijke getallen *optellen* en *vermenigvuldigen*:
Als een verzameling van a elementen en een verzameling van b elementen die niet met elkaar overlappen, worden samengevoegd, dan ontstaat een verzameling van $a + b$ elementen.
Als a verzamelingen van b elementen elk, die elkaar niet overlappen, worden samengevoegd, dan ontstaat een verzameling van $a \cdot b$ elementen. We schrijven $a \cdot b$ vaak kortweg als ab.
De natuurlijke getallen vormen de 'grondstof' van de rekenkunde. Ze voldoen aan de volgende *rekenregels*.

$a + b = b + a$ en $ab = ba$,
optelling een vermenigvuldiging zijn beide *commutatief*,
$(a + b) + c = a + (b + c)$ en $(ab)c = a(bc)$,
beide bewerkingen zijn *associatief*,
$a(b + c) = ab + ac$,
de vermenigvuldiging is *distributief* over de optelling,
$a + 0 = a$ en $a \cdot 1 = a$,
de optelling heeft *neutraal element* 0
en de vermenigvuldiging heeft neutraal element 1.

(1)

Ook is er een *ordening*: van elk tweetal natuurlijke getallen is er één het grootste. We schrijven '$a \geq b$' voor 'a is groter dan b of gelijk aan b'. Uit het bovenstaande volgt: Als $a \geq b$ en $b \geq a$, dan is $a = b$. Bovendien geldt voor elk tweetal natuurlijke getallen a en b:

Als $a \geq b$ en $b \geq c$, dan ook $a \geq c$.
Als $a \geq b$, dan geldt voor alle c dat $a + c \geq b + c$.
Als $a \geq b$ en $c \geq 0$, dan is $a \cdot c \geq b \cdot c$.

(2)

(In de laatste regel is de voorwaarde dat $c \geq 0$ eigenlijk overbodig, maar hij staat erbij voor later gebruik.)

Negatieve gehele getallen en breuken

Getallen worden niet alleen gebruikt om aantallen elementen van verzamelingen uit te drukken, maar ook voor de beschrijving van afstanden, hoogten, hoeveelheden, krachten, banktegoeden, en nog veel meer.
Hierbij treedt al gauw een zekere onvolledigheid van het stelsel $\mathbb{N}$ aan het licht. Soms is in $\mathbb{N}$ *aftrekking* mogelijk. Zo wordt bijvoorbeeld onder '$8 - 5$' verstaan: het antwoord op de vraag: 'Hoeveel moet ik aan een verzameling van 5 elementen toevoegen om een verzameling van 8 elementen te krijgen?'. Dit antwoord luidt: 3, want 3 is inderdaad de oplossing van de vergelijking $5 + x = 8$.
Hoe zit dit echter met '$5 - 8$'? We zoeken nu een oplossing van de vergelijking

$$8 + x = 5 \ . \tag{3}$$

Maar deze vergelijking heeft helemaal geen oplossing!
Toch is er vaak behoefte aan zo'n getal, bijvoorbeeld als we praten over de waterstand: 'Op welke hoogte staat het water als een stijging van 8 meter het op een niveau van 5 meter boven de grond zou brengen?'. Iets dergelijks doet zich voor bij banktegoeden.
Laten we daarom in gedachten zo'n getal maken, en laten we het gewoon '$5 - 8$' noemen. Hetzelfde doen we voor elk paar natuurlijke getallen. We willen graag dat onze rekenregels in box (1) blijven gelden. Dan moet:

$$(0 - 3) + 8 = (0 - 3) + (3 + 5) = ((0 - 3) + 3) + 5 = 0 + 5 = 5 \ .$$

We zien dus dat $0 - 3$ hetzelfde getal moet zijn als $5 - 8$. We duiden het getal $0 - 3$ aan met -3.
Zo komen we tot de verzamelingen $\mathbb{Z}$ van de *gehele* getallen:

$$\mathbb{Z} := \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} \ .$$

In $\mathbb{Z}$ is aftrekking altijd mogelijk.

Iets dergelijks doet zich voor ten aanzien van de vermenigvuldiging: Soms is in $\mathbb{N}$ (en in $\mathbb{Z}$) het 'omgekeerde van vermenigvuldiging', namelijk *deling*, mogelijk: Onder $\frac{12}{3}$ verstaat men bijvoorbeeld dàt getal, dat 12 oplevert na vermenigvuldiging met 3. Met andere woorden, $\frac{12}{3}$ is per definitie *de* oplossing van de vergelijking $3x = 12$. Deze oplossing is 4. Dus $\frac{12}{3}$ is gewoon een andere naam voor het natuurlijke getal 4.
Maar soms gaat het niet: de vergelijking

$$7x = 3 \tag{4}$$

heeft geen oplossing. Toch zou je zo'n getal wel willen hebben, natuurlijk niet als *aantal* elementen van een verzameling, maar bijvoorbeeld wel als *hoeveelheid* vloeistof, wanneer je 3 liter drank onder 7 personen wilt verdelen.
Als p en q gehele getallen zijn, en q is niet 0, dan verstaan we onder $\frac{p}{q}$ *de* oplossing van de vergelijking $qx = p$.

Opgaafje 1. Laat zien dat $\dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$.

Trouwens, waarom zouden we dat alleen doen als $q \neq 0$? Als we toch getallen aan het bijmaken zijn, wat is er dan tegen om ook getallen als $\frac{1}{0}$ en $\frac{-2}{0}$ te maken? Wel, in dat geval komen we in een akelig dilemma terecht: Immers, als we een getal $\frac{1}{0}$ bijmaken, dan zeggen onze rekenregels dat

$$1 = \frac{1}{0} \cdot 0 = \frac{1}{0} \cdot (0 + 0) = \frac{1}{0} \cdot 0 + \frac{1}{0} \cdot 0 = 1 + 1 = 2\ .$$

Met een beetje extra moeite tonen we aan dat ook $2 = 3$ en $3 = 4$, etcetera. Dus, òfwel we raken onze rekenregels kwijt, òfwel we houden nog maar één getal over! Dit vonden we zó erg, dat we liever geen getallen van het type $\frac{p}{0}$ bijmaken. ('Delen door 0 gaat niet'.) Ook $\frac{0}{0}$ definiëren we niet.

Optelling en vermenigvuldiging van rationale getallen gaan als volgt in hun werk:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \qquad \text{en} \qquad \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}\ .$$

Opgaafje 2. Bewijs deze formules zelf uit de rekenregels, die we ook voor rationale getallen eisen.

Zo komen we tot de verzameling $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen.

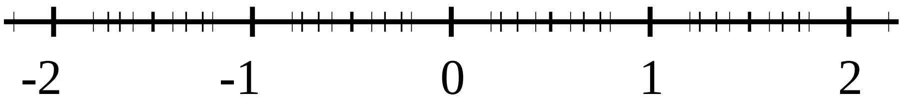
$$\mathbb{Q} := \left\{ \ \frac{p}{q} \ \middle| \ p \in \mathbb{Z}\ , \quad q \in \mathbb{N}^* \ \right\}.$$

In $\mathbb{Q}$ gelden dezelfde rekenregels die we voor $\mathbb{N}$ hebben gezien (commutativiteit, associativiteit, distributiviteit, neutrale elementen), en bovendien zijn in $\mathbb{Q}$ aftrekking en deling, behalve door 0, altijd mogelijk. Ook de lineaire ordening blijft bestaan.
Een getallenverzameling met bovenstaande eigenschappen wordt een *lichaam* genoemd. Voldoet hij ook nog aan de eigenschappen in box (2), dan heet hij een *lineair geordend lichaam*.

Opgaafje 3. Laat zien dat de getallenverzameling $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ met optelling en vermenigvuldiging modulo 7 een lichaam is. Is dit lichaam lineair geordend?

De getallenlijn

Al deze getallen kunnen worden afgezet op een lijn; Dat gaat zó:

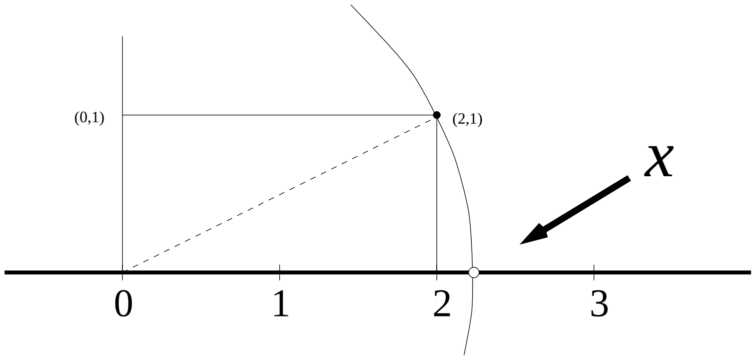


De rationale getallen

Je kiest 0 op de lijn en verder een punt 1. Vervolgens laat je de gehele getallen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ corresponderen met punten met opeenvolgend gelijke afstanden. Vervolgens teken je de getallen $p/2$ met $p \in \mathbb{Z}$ in, met half zo grote tussenafstanden, voorzover je die niet al gehad hebt. Dan komen de getallen $p/3$ met $p \in \mathbb{Z}$ aan de beurt. Etcetera. In het plaatje hebben we maar enkele eenvoudige breuken aangegeven, maar de lijn ligt ermee bezaaid: tussen elk paar rationale getallen liggen er telkens weer oneindig veel andere.

De onvolledigheid van de rationale getallen

Tot grote verbazing van de antieke wiskundigen zijn de rationale getallen toch *niet* in staat de getallenlijn helemaal op te vullen: het is mogelijk punten op de getallenlijn aan te wijzen waar geen rationaal getal bij hoort. Onderstaande figuur wijst zo'n punt aan. (De kromme is een cirkelboog met middelpunt (0,0).)



Een gaatje in $\mathbb{Q}$

Immers, volgens de stelling van Pythagoras moet dit getal x voldoen aan

$$x^2 = 1^2 + 2^2 = 5. \tag{5}$$

Maar:

Stelling 1. *Er bestaat geen rationaal getal dat 5 als kwadraat heeft.*

Met andere woorden: de vergelijking $x^2 = 5$ heeft geen rationale oplossing.

Bewijs. Stel $x = \frac{p}{q}$ en $x^2 = 5$. We kunnen p en q zó kiezen dat ze geen factoren gemeen hebben. Dan zijn in elk geval

$$p \text{ en } q \text{ niet beide deelbaar door 5.} \tag{6}$$

Nu moet gelden:

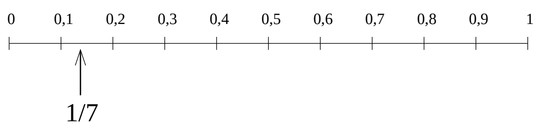
$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 5, \qquad \text{dus} \qquad p^2 = 5q^2.$$

Dat wil zeggen: p^2 is deelbaar door 5. Maar dan is p deelbaar door 5. (Ga zelf na dat als p bij deling door 5 een rest van 1, 2, 3 of 4 oplevert, ook p^2 niet deelbaar door 5 kan zijn.) Zeg $p = 5k$. Dan is $p^2 = 25k^2$ en dus $q^2 = 5k^2$. Maar als q^2 deelbaar is door 5, dan ook q zelf. Dit is in strijd met (6). Uit deze tegenspraak volgt dat het gestelde onmogelijk is: er is geen rationaal getal met kwadraat 5.

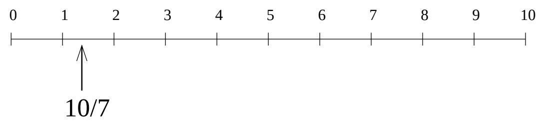
□

De reële getallen

Om de getallenlijn helemaal op te vullen gaan we over op een notatie bedacht door Simon Stevin: de tiendelige breuken. Dit zijn breuken waarvan de noemer een macht is van 10, en we schrijven ze in decimale notatie:
Met 17,3702 bedoelen we bijvoorbeeld $\frac{173702}{10000}$, wat hetzelfde is als $17 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{10.000}$.
Bekijk nu eens het getal $\frac{1}{7}$. Het is zelf geen decimale breuk, maar we kunnen het wel tussen de decimale breuken een plek geven: het ligt om te beginnen ergens op de getallenlijn tussen 0 en 1. Zijn plaats is nauwkeuriger bepaald door aan te geven dat het ligt tussen $\frac{1}{10}$ en $\frac{2}{10}$. Dat is het best te zien door het segment $[0, 1]$



met 10 te vermenigvuldigen:



Het getal $\frac{1}{7}$ gaat dan naar $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, een getal tussen 1 en 2. We hebben dan

$$0,1 \leq \frac{1}{7} \leq 0,2.$$

Als je wilt weten waar $\frac{1}{7}$ ligt ten opzichte van de veelvouden van $\frac{1}{100}$, dan kun je daartoe $\frac{3}{7}$ met 10 vermenigvuldigen en kijken waar het resultaat ligt ten opzichte van de getallen 0 t/m 10. Je krijgt dan

$$0{,}14 \leq \frac{1}{7} \leq 0{,}15$$

Eigenlijk zijn we met een staartdeling bezig:

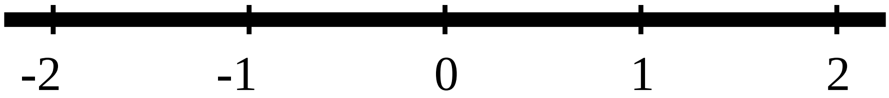
$$\begin{array}{l}
7/1{,}000000\ldots\backslash 0{,}1428571\ldots \\
\quad\;\; \underline{7} \\
\quad\;\; 30 \\
\quad\;\; \underline{28} \\
\quad\quad\; 20 \\
\quad\quad\; \underline{14} \\
\quad\quad\quad 60 \\
\quad\quad\quad \underline{56} \\
\quad\quad\quad 40 \\
\quad\quad\quad \underline{35} \\
\quad\quad\quad\quad 50 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{49} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 10 \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{\;\;7} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 3
\end{array}
\qquad\qquad \tfrac{1}{7} = 0{,}142857142857142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857} \tag{7}$$

Daarmee bedoelen we:
$\frac{1}{7}$ ligt tussen 0 en 1, verdelen we het segment $[0,1]$ in 10 gelijke delen en nummeren we die van 0 tot en met 9, dan ligt $\frac{1}{7}$ in segmentje nummer 1, verdelen we dit segmentje op de zelfde manier, dan ligt $\frac{1}{7}$ in segmentje nummer 4, etc. Het getal $\frac{1}{7}$ kan dus geschreven worden als een oneindig voortlopende decimale breuk. Deze procedure kunnen we toepassen op elk punt op de lijn.
De schrijfwijze van oneindige decimale breuken is niet altijd eenduidig. Soms heb je een keuze tussen twee segmentjes, namelijk als het getal een uiteinde van een segmentje is, dat wil zeggen als het een tiendelige breuk is. Zo kan $\frac{1}{4}$ op twee manieren decimaal worden genoteerd: als $0{,}250000000\ldots$ en als $0{,}24999999\ldots$.
(Voor als je het niet gelooft: stel $a = 0{,}009999\ldots$, dan $10a = 0{,}09999\ldots = 0{,}09 + a$ en dus $9a = 0{,}09$, ofwel $a = 0{,}01$, zodat $0{,}2499999\ldots = 0{,}24 + a = 0{,}24 + 0{,}1 = 0{,}25$.)
Gewoonlijk vermijdt men staarten met alleen negens, dat wil zeggen: als er een keuze uit twee segmentjes is, dan wordt aan de rechterkant van 0 steeds het rechter segmentje gekozen, aan de linkerkant steeds het linker. Als we negenstaarten vermijden, en ook de oneindige decimale breuk $-0{,}00000\ldots$, dan is de decimale notatie van ieder punt op de lijn uniek.
Zo komen we tot de volgende definitie.

Definitie. Onder een *reëel getal* verstaan we een uitdrukking van het type

$$\pm n{,}d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots \quad ,$$

waarbij n een natuurlijk getal is, en de *decimalen* $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \ldots$ gekozen worden uit de verzameling $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hierbij stellen verschillende uitdrukkingen verschillende reële getallen voor, met dien verstande dat $-0{,}000000\ldots$ hetzelfde getal voorstelt als $+0{,}000000\ldots$, en $\pm n{,}d_1 \ldots d_k 99999\ldots$ hetzelfde als $\pm(n{,}d_1 \ldots d_k + 10^{-k})000000\ldots$.
Meetkundig gesproken hebben we nu de lijn helemaal opgevuld, en zo hebben we de verzameling $\mathbb{R}$ van de *reële getallen* geconstrueerd.

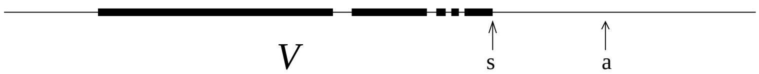


De reële getallen

De supremum-eigenschap

Laten we nu eens kijken naar *verzamelingen* van reële getallen. Eindige verzamelingen, zoals bijvoorbeeld $\{2, \frac{3}{7}, (1{,}121121112\ldots)\}$, hebben altijd een maximum (een grootste element). In dit voorbeeld is dat 2. Maar oneindige verzamelingen reële getallen hoeven geen maximum te hebben: $\mathbb{N}$ bijvoorbeeld heeft geen maximum, want er zijn, hoe hoog je ook klimt, altijd nog grotere natuurlijke getallen aan te wijzen. Maar ook een verzameling als $V := \{\ 1 - \frac{1}{n} \ \mid\ n \in \mathbb{N}^*\ \}$ heeft geen maximum, ook al komt geen enkel element van V boven de 2 uit. We noemen 2 een *bovengrens* van V. Trouwens, ook 1 en $\frac{3}{2}$ zijn bovengrenzen van V. Je ziet vast wel in dat 1 de kleinste bovengrens is: elk getal dat kleiner is dan 1 wordt door sommige elementen van V overtroffen. Het getal 1 is daarom een soort van 'maximum' van V, maar het is niet echt een maximum, omdat het zelf niet in V zit. We noemen het getal 1 het *supremum* van V. Meer algemeen definiëren we:

Definitie. Zij V een verzameling reële getallen. We zeggen dat V *naar boven begrensd* is als er een getal $a \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle $v \in V$ geldt: $v \leq a$.



In dat geval heet a een *bovengrens* voor V. Een getal $s \in \mathbb{R}$ heet het *supremum* van V als s de kleinste bovengrens is van V.

Naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of van $\mathbb{Q}$ hoeven geen grootste element te hebben. Denk bijvoorbeeld aan het interval

$$(0, 3) := \{\ x \in \mathbb{R}\ \mid\ 0 < x < 3\ \}$$

of aan de verzameling

$$\{\ x \in \mathbb{Q}\ \mid\ x^2 \leq 5\ \}. \tag{8}$$

Maar het mooie van $\mathbb{R}$ is nou juist dat de verzameling van bovengrenzen van een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling V *wel* altijd een *kleinste* element heeft. Dit is het supremum van V.

Stelling 2. (De supremum-eigenschap van de reële getallen)
Iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling van reële getallen heeft een supremum (in $\mathbb{R}$).

Voor het bewijs verwijzen we naar het college Analyse.

We duiden het supremum van een verzameling V aan met $\sup(V)$. De grootste ondergrens van een verzameling $V \subset \mathbb{R}$ wordt zijn *infimum* genoemd en aangeduid met $\inf(V)$.

Opgaafje 4. Bewijs uit Stelling 2 dat elke niet-lege van beneden begrensde verzameling reële getallen een infimum heeft.

Rekenen met reëele getallen

We weten hoe we moeten rekenen met natuurlijke getallen, gehele getallen en rationale getallen, maar hoe je reëele getallen moet optellen en vermenigvuldigen, aftrekken en delen, moeten we nog precies vastleggen. Bedenk wel dat rekenmachientjes dit niet kunnen, omdat ze maar eindig veel decimalen kunnen bevatten. We zouden nu heel precieze algoritmen kunnen gaan vastleggen voor de genoemde operaties met reëele getallen, maar dat doen we niet. We maken ons ervan af door te zeggen hoe sommen, producten en dergelijke in principe gedefinieerd zijn. De supremumstelling komt ons hierbij te hulp.

Elk positief reëel getal $a := n{,}d_1d_2d_3d_4\ldots$ kan worden opgevat als het supremum van de verzameling rationale getallen $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, waarbij we met a_j de tiendelige breuk $n{,}d_1d_2\ldots d_j$ aanduiden, (en $a_0 = n$). Als we nu twee positieve getallen $a = \sup\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ en $b = \sup\{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ willen optellen, dan nemen we het supremum van de verzameling van sommen:

$$a + b := \sup\{\ a_j + b_k \ \mid\ j, k \in \mathbb{N}\ \}\ .$$

Op dezelfde manier kunnen we het product van positieve reëele getallen definieren:

$$ab := \sup\{\ a_jb_k \ \mid\ j, k \in \mathbb{N}\ \}\ ,$$

en de inverse van een positief getal:

$$a^{-1} := \inf\{\ a_j^{-1} \ \mid\ j \in \mathbb{N}\ \}\ .$$

Met deze definities vormen de reëele getallen ook weer een lineair geordend lichaam.

Intervallen. De ordening van de reëele getallen leidt tot de invoering van *intervallen*:

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \text{de verzameling van alle reëele getallen } x \text{ met } a \le x \le b\ ;\\
(a, b) &:= \text{de verzameling van alle reëele getallen } x \text{ met } a < x < b\ ;\\
[a, b) &:= \text{de verzameling van alle reëele getallen } x \text{ met } a \le x < b\ ;\\
[a, \infty) &:= \text{de verzameling van alle reëele getallen } x \text{ met } a \le x\ ;\\
(-\infty, \infty) &:= \text{de verzameling van alle reëele getallen.}
\end{aligned}$$

De intervallen $(a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ en $(-\infty, b)$ worden op soortgelijke wijze gedefinieerd. Het gesloten interval $[a, b]$ heet ook wel een *segment*.

Worteltrekken. Om te zien of er in $\mathbb{R}$ wèl een oplossing is van de vergelijking $x^2 = 5$, bekijken we de verzameling $V := \{\ x \in \mathbb{Q} \ \mid\ x^2 \le 5\ \}$ uit (8). V is niet leeg, want $0 \in V$. V is naar boven begrensd door bijvoorbeeld het getal 3, want als $v \in V$, dan is $v^2 \le 5 < 9 = 3^2$, dus $v \le 3$. Dus heeft V een supremum; noem het s. Volgens de definitie van vermenigvuldiging van reëele getallen is

$$s^2 = \sup(W) \qquad \text{met} \qquad W := \{\ ab \ \mid\ a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 \le 5 \text{ en } b^2 \le 5\ \}\ .$$

We beweren dat dit supremum 5 is. Inderdaad is 5 een bovengrens:

$$a^2, b^2 \le 5 \Longrightarrow (ab)^2 \le 25 \Longrightarrow ab \le 5\ .$$

Maar als $y < 5$, dan is er een $x \in V$ met kwadraat groter dan y. (Tussen elk tweetal positieve reëele getallen liggen oneindig veel kwadraten van rationale getallen, nietwaar?) Dus 5 is de kleinste bovengrens van W, dat wil zeggen $s^2 = \sup(W) = 5$. We duiden s aan met $\sqrt{5}$.

We hebben nu dus gezien dat $\sqrt{5}$ reëel is, maar niet rationaal. Zulke getallen heten *irrationaal.*

Machtsverheffen. Door herhaalde vermenigvuldiging is machtsverheffing gedefinieerd met natuurlijke exponent:

$$a^0 := 1 , \qquad a^n := a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ maal, } n \geq 1) .$$

Is het grondtal a niet 0, dan kan deze machtsverheffing tot negatieve exponenten worden voortgezet:

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Voor positieve grondtallen is verder worteltrekking gedefinieerd als de omgekeerde bewerking van machtsverheffing:

$$w = \sqrt[n]{a} \qquad \text{als} \qquad w > 0 \text{ en } w^n = a .$$

De $\frac{1}{n}$-de macht wordt gedefinieerd als de n-de wortel. Zo komen we tot machtsverheffing met positief grondtal en rationale exponent.
Tenslotte kunnen we a^b definiëren voor willekeurige positieve a en b door eerst b als $\sup(V)$ te schrijven, en dan te stellen

$$a^b := \sup\{ \ a^y \ | \ y \in V \ \} .$$

Dit supremum hangt niet af van de keuze van V.[1]

De axioma's voor de reële getallen

Onze kennis van reële getallen kunnen we in enkele korte slogans samenvatten.

I:	$\mathbb{R}$ is een lineair geordend lichaam

II:	In $\mathbb{R}$ geldt de supremumstelling

We bewijzen nog een derde eigenschap van reële getallen.

Stelling 3. (**Archimedes-Eudoxos**). *Voor elk reëel getal x is er een natuurlijk getal n dat groter is dan x.*

Bewijs. Als x negatief is, kies dan $n = 0$. Als x niet negatief is, zeg $x = m,d_1d_2d_3d_4\ldots$, kies dan $n = m + 1$.

$\square$

We voegen dit flauwe stellinkje aan onze lijst toe:

III:	In $\mathbb{R}$ geldt de stelling van Archimedes-Eudoxos

Zijn we nou helemaal gek geworden?

Nee. De eigenschappen I, II en III zijn een volledig stel *axioma's* voor de reële getallen. Dat wil zeggen dat je alles wat je ooit over reële getallen zult kunnen bewijzen, uit deze drie regels bewijzen kunt.
Voor òns waren de eigenschappen I, II en III beweringen, die we hebben afgeleid uit onze constructie van de reële getallen als oneindig voortlopende decimale breuken. Een ander zou een heel andere constructie kunnen maken, en dááruit I, II en III bewijzen. Een derde zou I, II en III voetstoots kunnen aannemen. Toch zouden we het met ons drieën steeds eens zijn over wat waar is en wat onwaar is voor reële getallen.

[1] Hier is nog wel het één en ander te bewijzen.

Het is gebleken dat eigenschap III niet uit I en II kan worden afgeleid. Zouden we eigenschap III uit ons lijstje weglaten, dan zouden er ook zogenaamde 'niet-standaard' constructies van $\mathbb{R}$ mogelijk zijn waarin andere wetten gelden. Het vakgebied van de *niet-standaard analyse* handelt hierover. Men kent daar oneindig grote en oneindig kleine getallen. Wij niet. In dit college beperken wij ons tot de standaard-analyse; we zullen gebruik maken van onze constructie met decimale breuken. Voor ons is elk reëel getal een decimale breuk. Oneindig grote getallen of oneindig kleine getallen bestaan voor ons *niet*.
We *zouden* in dit stadium onze constructie met decimalen weer mogen vergeten: de axioma's I, II en III impliceren alles wat we nodig hebben.

Opgaven bij Hoofdstuk 1

Opgave 5. Als een verzameling $V \subset \mathbb{R}$ een grootste element g heeft, dan is $g = \sup(V)$. Het omgekeerde is niet waar. Toon deze twee beweringen aan met behulp van de definitie van 'supremum'.

Opgave 6. Bepaal het supremum van de verzameling $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{x}{|x|+1} < \dfrac{1}{3} \right\}$.

Opgave 7. Is $\sqrt{6}$ een rationaal getal? En $\sqrt{27}$? En $\sqrt{121}$? Voor welke $n \in \mathbb{N}$ denk je dat $\sqrt{n}$ rationaal is? Zou je je antwoord kunnen bewijzen?

Aanwijzing: Elk positief natuurlijk getal kan op precies één manier in priemfactoren worden ontbonden.

Opgave 8. Schrijf $\frac{24}{37}$ als (oneindige) decimale breuk.

Opgave 9. Zij R de verzameling rationale getallen

$$\left\{ \frac{35}{100}, \frac{3535}{10000}, \frac{353535}{1000000}, \frac{35353535}{100000000}, \ldots \right\} .$$

Bepaal het supremum van R. Is dit supremum rationaal of irrationaal?

Opgave 10. Toon aan dat elk rationaal getal wordt voorgesteld door een *repeterende* decimale breuk (d.w.z. één waarin vanaf zeker moment hetzelfde blokje decimalen steeds herhaald wordt).

Opgave 11. Toon aan dat elke repeterende decimale breuk een rationaal getal voorstelt.

Opgave 12. Onder de *staartperiode* van een rationaal getal verstaan we de lengte van het blokje decimalen dat in zijn decimale ontwikkeling steeds herhaald wordt. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\frac{1}{n} \text{ heeft staartperiode 2} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ is deelbaar door 11.}$$

Opgave 13. Vormen de gehele getallen modulo 12 ('klokrekenen') een lichaam?

2 De complexe getallen

Met reële getallen kunnen we nu alle vergelijkingen van de types $7x = 3$, $x + 8 = 5$ en $x^2 = 5$ oplossen. Maar er is nog een heel stel algebraïsche vergelijkingen die het zonder oplossing moeten stellen: 'valse' vierkantsvergelijkingen en ook vele veeltermvergelijkingen van hogere graad. Deze beperking wordt opgeheven door de uitbreiding van $\mathbb{R}$ tot het lichaam $\mathbb{C}$ van de *complexe getallen*.

Structuur van de complexe getallen

Een typisch voorbeeld van een valse vierkantsvergelijking is

$$x^2 = -1. \tag{9}$$

In gedachten *maken* we een oplossing voor deze vergelijking, en noemen deze: i (voor 'imaginair', denkbeeldig). Per definitie geldt dus: $i^2 = -1$. We voegen i toe aan het stelsel van de reële getallen, en we kijken wat we nog meer moeten toevoegen om weer een getallenlichaam te krijgen.

(a) We moeten ook de getallen ib, met b reëel, in ons stelsel opnemen. Immers vermenigvuldiging moet voor elk paar getallen in ons nieuwe stelsel gedefinieerd zijn. Op grond van de associativiteit en de commutativiteit van de vermenigvuldiging, (die we graag weer geldig zien) moet nu:

$$(ib)^2 = (ib)(ib) = ((ib)i)b = (i(ib))b = ((i^2)b)b = (i^2)(b^2) = (-1)b^2 = -b^2.$$

Hieruit zien we dat (voor $b \neq 0$) het kwadraat van ib negatief is. Omdat we nog geen getallen hadden met negatieve kwadraten, moet ib dus een *nieuw* getal zijn. Deze nieuwe getallen

$$ib \qquad (b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$$

worden wel de *zuiver imaginaire* getallen genoemd. We voegen ze aan ons stelsel toe.
Merk op dat de vergelijking $x^2 = -1$ nu al direct *twee* oplossingen heeft: i en $-i := (-1) \cdot i$, omdat $(-1)^2 = 1$.

(b) We willen alles kunnen optellen, dus willen we ook de getallen

$$a + ib\ , \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

in ons stelsel hebben. Voor $b \neq 0$ is $a + ib$ geen reëel getal. Immers, zou $a + ib =: c \in \mathbb{R}$, dan moest $ib = c - a$ een reëel getal zijn, maar onder (a) zagen we al dat ib nieuw was. Dus is ook $a + ib$ nieuw als $b \neq 0$. Ook deze getallen voegen we toe. Zo ontstaat de verzameling van de *complexe* (= samengestelde) getallen

$$\mathbb{C} := \{\ a + ib \ \mid\ a, b \in \mathbb{R}\ \}\ .$$

Nu zijn we klaar! Deze complexe getallen kunnen we optellen:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)\ ,$$

(associativiteit en commutativiteit van de optelling). Maar ook bij vermenigvuldiging

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{10}$$

komen er geen nieuwe getallen meer bij.

Lichaamseigenschappen en consistentie

We moeten nu nog twee dingen doen.

(i) Laten zien dat de aanname dat een getal i bestaat met kwadraat -1 niet tot tegenspraken leidt.

(ii) Laten zien dat de rekenregels van een lichaam ook weer gelden voor onze nieuw geconstrueerde getallen.

Het eerste doen we door een constructie: We beschouwen het vlak $\mathbb{R}^2 := \{ \ (a,b) \ | \ a,b \in \mathbb{R} \ \}$ met daarop de vectoroptelling

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

en de vermenigvuldiging

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc) \ .$$

Hierin vinden we de reële getallen terug als de punten $(a,0)$ met $a \in \mathbb{R}$, en het getal i als het punt $(0,1)$. De boven afgeleide structuur is dus realiseerbaar, en kan niet tot tegenspraken leiden.
Het vlak $\mathbb{R}^2$ met deze optelling en vermenigvuldiging wordt het *complexe vlak* genoemd, en we identificeren het met de getallenverzameling $\mathbb{C}$. De x-as die de reële getallen voorstelt, en wordt in dit verband *de reële as* genoemd; de y-as heet de *imaginaire as*. We duiden het punt (a,b) in het complexe vlak aan met $a + ib$.

Voor punt (ii) lopen we de rekenregels voor een lichaam allemaal na:
- Optelling en vermenigvuldiging zijn commutatief en associatief (ga na!).
- $0 (= 0 + i \cdot 0)$ is het neutraal element van de optelling.
- $1 (= 1 + i \cdot 0)$ is het neutraal element van de vermenigvuldiging.
- De vermenigvuldiging is distributief over de optelling.
- Elk getal $a + ib$ heeft een tegengestelde: $(-a) + i(-b)$.
- O, pas op! Heeft elk getal $a + ib \neq 0$ wel een omgekeerde???

Gezocht: bij gegeven $a + ib$ met a en b niet allebei 0, een complex getal $c + id$ zó dat

$$(a + ib)(c + id) = 1 \ .$$

Zo'n getal bestaat inderdaad! Eerst merken we op dat

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 > 0. \tag{11}$$

Dus als we nou voor c nemen: $a/(a^2 + b^2)$ en voor d: $-b/(a^2 + b^2)$, dan vinden we dat

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + i\frac{a(-b) + ba}{a^2 + b^2} = 1 + i0 = 1.$$

We hebben een omgekeerde van $a + ib$ gevonden:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \ . \tag{12}$$

en $\mathbb{C}$ is een lichaam!

Betekenis van de complexe getallen

Waarom zou een mens geïnteresseerd zijn in deze merkwaardige getallen? Met aantallen hebben ze heel weinig meer te maken.
Wel, complexe getallen worden bijvoorbeeld gebruikt in de electrotechniek, waar zij de amplitude en de fase van een wisselstroomsignaal tegelijk aangeven. Eén enkele complexe 'weerstand' kan dan de capaciteit of de zelfinductie, en de gewone weerstand van een electronische component beschrijven.

Een ander belangrijk toepassingsgebied is de quantummechanica: de golffuncties die het gedrag van materie en licht beschrijven nemen complexe waarden aan. Dit is essentieel voor de interpretatie van de quantummechanica: alleen voor complexe golffuncties geldt de zogenaamde 'spectraalstelling', die zorgt voor voldoende observeerbare grootheden.
Weer iets geheel anders is de meetkunde van conforme afbeeldingen tussen oppervlakken. Deze worden gegeven door differentieerbare complexe functies. (Zie het slot van Hoofdstuk 7.)
Cryptosystemen van banken zijn gebaseerd op de zogenaamde 'elliptische krommen', die feitelijk complexe functies zijn met een bijzondere periodiciteit.
In de zuivere wiskunde zijn complexe getallen essentieel. Zo handelt bijvoorbeeld een klassiek probleem als het Riemann-vermoeden over de nulpunten van een complexe functie: Riemann's ζ-functie. Oplossing hiervan zou merkbaar zijn tot in de verste uithoeken van de wiskunde.

Bij overgang naar een nieuw getalstelsel moet altijd een zekere weerstand overwonnen worden. Dit is nog te horen aan de naamgeving van de nieuwe getallen: 'negatieve' getallen, 'irrationale' getallen en 'imaginaire' getallen. Het is verstandig deze weerstand maar zo snel mogelijk te laten varen.

Rekenen met complexe getallen

Blikken we nu even terug naar de axioma's I, II en III voor $\mathbb{R}$, dan zien we dat in $\mathbb{C}$ alleen het eerste axioma geldt. De ordening is verloren gegaan: het is niet meer uit te maken welk van twee complexe getallen het grootste is. (Schrijf dus *nooit*: $u > z$ voor complexe getallen!)
Als $z = x + iy$, dan wordt x het *reële deel* van z genoemd, en y het *imaginaire deel*. Notatie: $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$. Het getal $x - iy$ geven we aan met $\overline{z}$ ('z-streep'). Dit wordt de *complex geconjugeerde* van $z = x + iy$ genoemd; het is het spiegelbeeld van z ten opzichte van de de reële as.
De *absolute waarde* $|z|$ van een complex getal $z = x + iy$, is gedefinieerd als de afstand in het complexe vlak van z tot 0:

$$|z| = |x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2} \; .$$

De absolute waarde van een complex getal z is dus altijd positief (of nul voor $z = 0$). Absolute waarden zijn wel vergelijkbaar: het heeft zin om te schrijven: $|u| > |z|$.
De gevierde vergelijking (11) kunnen we nu schrijven als:

$$z\overline{z} = |z|^2 \; ,$$

en de inverse van $z \neq 0$ laat zich uitdrukken als

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \; .$$

Rekenregels voor complex geconjugeerde en absolute waarde.

(i) $\overline{z + u} = \overline{z} + \overline{u}$; $\quad \overline{zu} = \overline{z}\,\overline{u}$;

(ii) $|\overline{z}| = |z|$; $\quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|$; $\quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$;

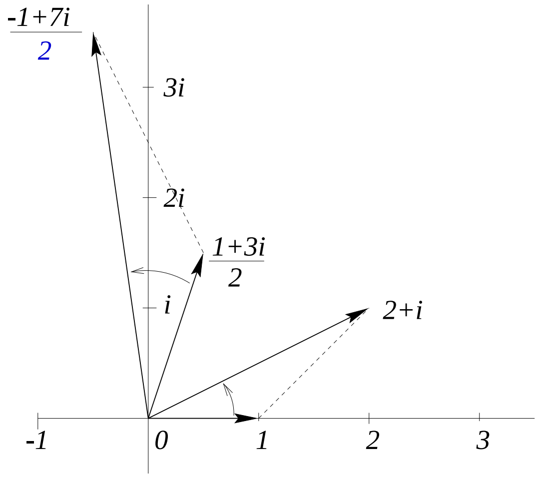
(iii) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$; $\quad z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$;

(iv) $|zu| = |z| \cdot |u|$;
Bewijs: $|zu|^2 = (zu)(\overline{zu}) = (z\overline{z})(u\overline{u}) = |z|^2 \cdot |u|^2$.

(v) $|z + u| \leq |z| + |u|$ (*driehoeksongelijkheid*).
Bewijs: $|z+u|^2 = (z+u)(\overline{z}+\overline{u}) = z\overline{z} + u\overline{u} + z\overline{u} + u\overline{z} = |z|^2 + |u|^2 + 2\operatorname{Re} z\overline{u} \leq |z|^2 + |u|^2 + 2|z| \cdot |u| = (|z| + |u|)^2$.

Vermenigvuldiging van complexe getallen: meetkundig.

De optelling in $\mathbb{C}$ komt overeen met de vectoroptelling in $\mathbb{R}^2$. Vermenigvuldiging van complexe getallen gaat als in (10). Dat is precies wat je zou verwachten op grond van de gewone rekenregels die je van getallen gewend bent plus het nieuwe regeltje $i^2 = -1$. Maar meetkundig zien we iets heel nieuws gebeuren: vermenigvuldigen heeft met *draaien* te maken! (Zie de figuur hiernaast.)



Vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$:$(2+i)(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i) = -\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$.

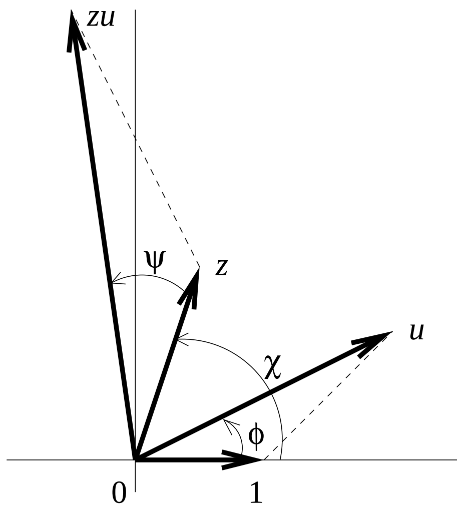
Definitie. Onder het *argument* van een complex getal z verstaat men de hoek tussen de positieve reële as en de vector wijzend naar het punt z, steeds gekozen in het interval $(-\pi, \pi]$. Dus als $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, en $-\pi < \varphi \leq \pi$, dan is φ het argument van z. Het paar $(|z|, \arg z)$ vormt de beschrijving in *poolcoördinaten* van het punt z in het complexe vlak.

De wet van argument en absolute waarde. *Bij vermenigvuldiging van complexe getallen worden de argumenten opgeteld (modulo 2π) en de absolute waarden vermenigvuldigd.*

Bewijs. De absolute waarden worden vermenigvuldigd op grond van regel (iv) hierboven. Daaruit volgt weer dat de driehoek met hoekpunten 0, z en zu gelijkvormig is met de driehoek met hoekpunten 0, 1 en u, want de lengten van corresponderende zijden schelen steeds een factor $|z|$. Dus zijn corresponderende hoeken gelijk, in het bijzonder is $\varphi = \psi$ (zie plaatje). Hieruit volgt:

$$\arg(zu) = \chi + \psi = \chi + \varphi = \arg(z) + \arg(u)\ .$$

$\square$



Vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$

De regel van De Moivre. Een direct gevolg van de wet van argument en absolute waarde is dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\varphi \in \mathbb{R}$ geldt:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Toepassing. We lossen de volgende vergelijking op in $\mathbb{C}$:

$$z^3 = 1.$$

Direct: Eén oplossing zien we meteen: $z = 1$. Deze is voor ons reden om een factor $z - 1$ uit $z^3 - 1$ af te splitsen. (Dat gaat zeker goed, zoals we in Hoofdstuk 5 zullen zien.) Als we de veelterm $z^3 - 1$ delen door $z-1$, dan houden we z^2+z+1 over:

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)\ .$$

De nulpunten van z^2+z+1 vinden we met de methode van 'kwadraat afsplitsen':

$$\begin{aligned} z^2+z+1=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (z+\tfrac{1}{2})^2=-\tfrac{3}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad z+\tfrac{1}{2}=\pm\tfrac{i}{2}\sqrt{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad z=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\ . \end{aligned}$$

Met de regel van DE MOIVRE*:* Omdat de oplossingen van $z^3=1$ zeker moeten voldoen aan $|z|^3=1$, dus aan $|z|=1$, kunnen we z alvast schrijven als $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Met de regel van DE MOIVRE kunnen we nu onze vergelijking schrijven als

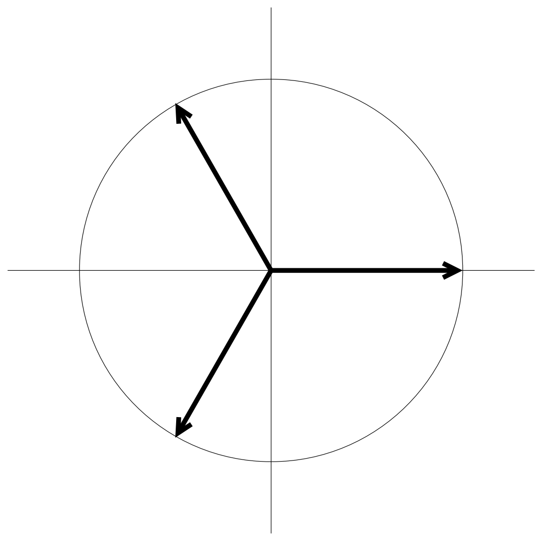
$$1=z^3=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi\ .$$

Dit is equivalent met

$$\cos 3\varphi=1 \qquad \text{en} \qquad \sin 3\varphi=0\ .$$

Dus 3φ moet een veelvoud zijn van 2π. Dat wil zeggen $\varphi=2k\pi$, $\varphi=2\pi/3+2k\pi$ of $\varphi=4\pi/3+2k\pi$. Kortom:

$$\begin{aligned} & z=1 \\ \text{of} \qquad & z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3} \\ \text{of} \qquad & z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\ . \end{aligned}$$



Opgaven bij Hoofdstuk 2

Opgave 14. Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $a + ib$ met a en b reëel.

(a) $(2+i)^3$;

(b) $(1-i)^7$;

(c) $\dfrac{1}{7-3i}$;

(d) $\dfrac{5+4i}{2+i}$;

(e) $\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$;

(f) $\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right)^{100}$.

Opgave 15. Druk $\cos 4\varphi$ uit in $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$ met behulp van de regel van De Moivre.

Opgave 16. Voor welke complexe getallen $z = x + iy$ is $\mathrm{Re}\,(z^2) > 0$?

Opgave 17. In welk deel van het complexe vlak ligt het getal $\dfrac{1}{1-z}$, wanneer z in de open eenheidsschijf ligt (d.i. de verzameling van getallen $z \in \mathbb{C}$ waarvoor $|z| < 1$)?

Opgave 18. Bekijk de vierkantsvergelijking

$$z^2 + \gamma z + \alpha = 0$$

met α en γ reëel. Laat zien dat, als deze vergelijking geen reële oplossingen heeft, er altijd twee complexe oplossingen van de vorm $a + ib$ en $a - ib$ bestaan. Druk a en b uit in α en γ.

3 Functies

Laten C en D willekeurige verzamelingen zijn. Met $f : D \to C$ bedoelen we: f is een voorschrift dat aan ieder element x uit D precies één element $f(x)$ uit C toevoegt. Met $f : x \mapsto y$ (let op de pijl!) bedoelen we dat $y = f(x)$, en we noemen y het *beeld* van x *onder* f. De verzameling D wordt het *domein* van f genoemd, en C het *codomein*. Onder het *bereik* van f verstaan we de verzameling $\{ \ f(x) \ \mid \ x \in D \ \}$ van elementen uit het codomein die echt als beeld optreden. Verder definiëren we voor een functie f van D naar C:

$$\begin{aligned}
f \text{ is } \textit{injectief} \quad &:= \quad \text{voor ieder tweetal } x, y \text{ uit } D \text{ met } x \neq y \text{ geldt } f(x) \neq f(y);\\
f \text{ is } \textit{surjectief} \text{ (op } C) \quad &:= \quad \text{voor iedere } y \in C \text{ bestaat er een } x \in D \text{ met } f(x) = y;\\
&\qquad\ \text{(bereik = codomein)}\\
f \text{ is } \textit{bijectief} \quad &:= \quad f \text{ is injectief en surjectief};\\
\text{de } \textit{inverse} \text{ van } f \quad &:= \quad \text{de functie } f^{-1} : C \to D \text{ met } f^{-1}\big(f(x)\big) = x \text{ voor alle } x \in D.\\
&\qquad\ \text{(Alleen gedefiniëerd als } f \text{ bijectief is.)}
\end{aligned}$$

Tenslotte definiëren we, als $f : D \to C$ en $g : C \to B$:

$$\begin{aligned}
\text{de } \textit{samenstelling} \text{ van } g \text{ met } f \quad := \quad &\text{de functie } g \circ f : D \to B \text{ die vastgelegd wordt door}\\
&\big(g \circ f\big)(x) \ = \ g\big(f(x)\big) \text{ voor alle } x \in D
\end{aligned}$$

In dit hoofdstuk beschouwen we bijzondere functies die als domein en codomein verzamelingen van reële of complexe getallen hebben.

De afgeleide van een functie (kort)

Zij f een functie van een gebied D in $\mathbb{R}$ (of $\mathbb{C}$) naar $\mathbb{R}$ (of $\mathbb{C}$). We noemen f *differentieerbaar* als in elk punt x van D de volgende limiet bestaat

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ .$$

Als dit het geval is, dan duiden we de limiet aan met $f'(x)$. Zo krijgen we een nieuwe functie $f' : D \to C$, die we ook wel schrijven als

$$\frac{df}{dx} \ .$$

De operatie die van f zijn *afgeleide* f' maakt heet *differentiatie*. Op het hierboven gebruikte begrip 'limiet' zullen we later uitgebreid ingaan, zie Hoofdstuk 7. In dit hoofdstuk leunen we op je schoolervaring met limieten en differentiatie.

Stijgen en dalen

Voor een gebied $D \subset \mathbb{R}$ en een functie $f : D \to \mathbb{R}$ definiëren we:

$$
\begin{array}{lcll}
f \text{ is stijgend} & := & \text{voor alle } x, y \in D \text{ geldt:} & x < y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y); \\
f \text{ is dalend} & := & \text{voor alle } x, y \in D \text{ geldt:} & x < y \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y); \\
f \text{ is strikt stijgend} & := & \text{voor alle } x, y \in D \text{ geldt:} & x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y); \\
f \text{ is strikt dalend} & := & \text{voor alle } x, y \in D \text{ geldt:} & x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y); \\
f \text{ is constant} & := & \text{voor alle } x, y \in D \text{ geldt:} & f(x) = f(y).
\end{array}
$$

Voor een differentiëerbare functie f op een interval geldt:

$$
\begin{array}{lcl}
f'(x) \geq 0 \text{ voor alle } x & \Longleftrightarrow & f \text{ is stijgend;} \\
f'(x) \leq 0 \text{ voor alle } x & \Longleftrightarrow & f \text{ is dalend;} \\
f'(x) > 0 \text{ voor alle } x & \Longrightarrow & f \text{ is strikt stijgend;} \\
f'(x) < 0 \text{ voor alle } x & \Longrightarrow & f \text{ is strikt dalend;} \\
f'(x) = 0 \text{ voor alle } x & \Longleftrightarrow & f \text{ is constant.}
\end{array}
$$

(Let op de richting van de pijlen!) Deze eigenschappen kunnen bewezen worden met de middelwaardestelling die we in Hoofdstuk 8 zullen bewijzen. Maar ze zien er zó geloofwaardig uit dat je ze hopelijk voorlopig wel wilt aannemen. Wel merken we hier op dat ze niet opgaan als het domein van f geen interval is.

De exponentiële functie

We beginnen met een heel bijzondere functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die onder differentiatie niet verandert. Om hem helemaal vast te leggen eisen we dat hij de waarde 1 aanneemt in het punt 0.

Zo komen we aan de **grondeigenschappen** van de zogenaamde *exponentiële functie*, kortweg exp genoemd:

$$
\boxed{\begin{array}{c} \exp' = \exp \\[1em] \exp(0) = 1 \end{array}} \tag{13}
$$

Bewering 4. *Er bestaat een functie* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *met de eigenschappen (13).*
Het bewijs hiervan stellen we uit tot Hoofdstuk 10.

Bewering 5. *Er bestaat niet meer dan één functie met de eigenschappen (13).*

Bewijs. Eerst bewijzen we dat exp de waarde 0 niet aanneemt: Zij h de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$. Dan is

$$h'(x) = \exp'(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp'(-x) = 0\ .$$

(We maken hierbij alvast gebruik van de productregel en de kettingregel voor differentiatie.) Dus is h een constante functie, en omdat $h(0) = 1$, is $h(x) = 1$ voor alle reële x, en daarom kan $\exp(x)$ niet 0 zijn.
Stel nu dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoet aan: $f' = f$ en $f(0) = 1$. We willen bewijzen dat dan $f = \exp$.
Zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zó dat voor alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = g(x)\exp(x)$. (Zo'n g bestaat omdat $\exp(x) \neq 0$.) Dan geldt, waarbij we weer gebruik maken van de productregel,

$$g(x)\exp(x) = f(x) = f'(x) = g'(x)\exp(x) + g(x)\exp'(x) = g'(x)\exp(x) + g(x)\exp(x)\ .$$

Dus is $g' = 0$ en g moet een constante functie zijn, zeg $g(x) = c$. We vinden dat $f(x) = c\exp(x)$: alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $f' = f$ zijn veelvouden van de exponentiële functie. En als we ook nog eisen dat $f(0) = 1$, dan moet $f = \exp$.

$\square$

Definitie. We definiëren het getal e door: $e := \exp(1)$.

Enkele eigenschappen van de exponentiële functie. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{array}{ll} (1) & \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\ ; \\ (2) & \exp(x) > 0\ ; \\ (3) & \exp(x) \geq 1 + x\ ; \\ (4) & \exp(x) \leq \dfrac{1}{1-x} \qquad \text{voor } x < 1; \\ (5) & \exp(x) = e^x\ . \end{array} \tag{14}$$

Bewijs. (1): Kies x en y uit $\mathbb{R}$. Zij h de functie $u \mapsto \exp(x+u)\exp(y-u)$. Dan is weer $h' = 0$ omdat $\exp' = \exp$, dus h is constant. In het bijzonder is $h(y) = h(0)$, dat wil zeggen $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
(2) volgt hieruit: $\exp(x) = \exp(x/2)^2 > 0$. (We hadden al gezien dat $\exp(x) \neq 0$.)
(3) kunnen we zó inzien: Omdat $\exp(x) > 0$ voor alle x, moet ook $\exp'(x) > 0$ voor alle x. Dus exp is een strikt stijgende functie. Omdat $\exp(0) = 1$, moet $\exp(x) < 1$ voor $x < 0$ en $\exp(x) > 1$ voor $x > 0$. Hetzelfde geldt ook voor de afgeleide. Omdat de functie $x \mapsto x + 1$ afgeleide 1 heeft, is het verschil $f(x) := \exp(x) - (1 + x)$ dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$. Dus neemt f in 0 zijn minimale waarde aan, en wel de waarde 0. Dus is $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) - (1 + x) \geq 0.$$

Hieruit volgt de ongelijkheid (3). De ongelijkheid (4) kun je hieruit afleiden door eerst x door $-x$ te vervangen:

$$\exp(-x) \geq 1 - x,$$

en dan te bedenken dat $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, zodat:

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Deze omkering is natuurlijk alleen juist zolang $1 - x$ positief is.
Nu bewijzen we (5): Uit (1) volgt dat voor $p \in \mathbb{N}$ en $q \in \mathbb{N}^*$ geldt:

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \exp\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right) = \exp(p) = \exp(1)^p = e^p\ ,$$

zodat we (5) bewezen hebben voor $x = \frac{p}{q}$. Bovendien is

$$\exp\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{1}{e^{p/q}} = e^{-p/q}\ .$$

Dus geldt (5) voor alle rationale x. Met behulp van de supremumstelling en de *continuïteit* van de exponentiële functie bewijst men de relatie (5) tenslotte voor alle reële x. Dit laatste argument laten we over aan het college Analyse.

$\square$

Toepassing 1. Benader het getal e in drie decimalen achter de komma, alleen met behulp van de bewerkingen $+$, $-$, $\times$ en $\div$ van je rekenmachine.

Oplossing. Uit eigenschappen (1) en (3) volgt dat voor $n \geq 1$:

$$e = \left(\sqrt[n]{e}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Uit eigenschappen (1) en (4) volgt dat voor $n \geq 2$:

$$e = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n .$$

We mogen in de tweede ongelijkheid n wel door $n+1$ vervangen. Samenvattend: voor $n \geq 1$ geldt dat

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Vul nu in: $n = 2^{13} = 8192$. Het berekenen van de n-de macht is dan hetzelfde als dertien maal kwadrateren. We vinden:

$$2{,}7181\ldots \leq e \leq 2{,}7184\ldots$$

Leonhard Euler

Het getal e is ontdekt door, en vernoemd naar de achttiende-eeuwse wiskundige Leonhard Euler.

De natuurlijke logaritme

De exponentiële functie is een strikt stijgende continue functie $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ die alle positieve waarden aanneemt.[2] Gezien als functie $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ is ze dus injectief en surjectief. We definiëren een functie $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ als de inverse van de exponentiële functie:

$$\log = \exp^{-1} .$$

Deze functie wordt de *natuurlijke logaritme* of *logaritme met grondtal* e genoemd. In tegenstelling tot wat je waarschijnlijk gewend bent, geven we de natuurlijke logaritme met 'log' aan, niet met 'ln'. Dit is in de wetenschappelijke literatuur gebruikelijk.

Eigenschappen. Voor alle positieve getallen a en b en reële getallen x geldt:

(1) $\log(ab) = \log a + \log b$

(2) $\dfrac{a-1}{a} \leq \log a \leq a - 1$

(3) $a^x = e^{x \log a}$

Deze eigenschappen volgen uit de eigenschappen (14) van de exponentiële functie.

Opgaafje 19. Ga dit na.

[2]Dit is niet zo vanzelfsprekend als het lijkt.

Voorbeeld 1. Onder ${}^a\log b$ verstaat men de macht (als deze bestaat) waartoe we het positieve grondtal a moeten verheffen om er het positieve getal b uit te krijgen. Druk ${}^a\log b$ uit in $\log a$ en $\log b$.

Oplossing. We zoeken een oplossing van de vergelijking

$$a^x = b.$$

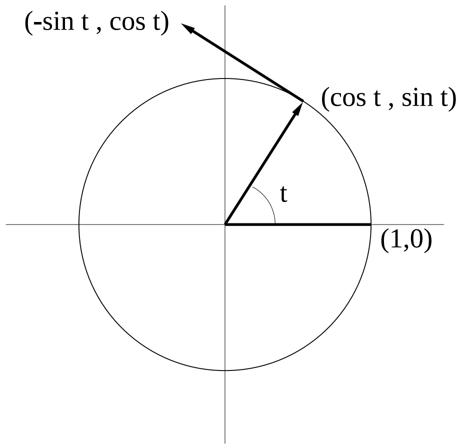
Wegens eigenschap (3) van de natuurlijke logaritme is dit equivalent met

$$e^{x\log a} = b, \qquad \text{dat wil zeggen} \qquad x\log a = \log b.$$

Dus het antwoord is:

$${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}\ .$$

De functies sinus en cosinus



De volgende eeuwigdurende draaibeweging dient als wiskundig model voor rotaties en harmonische trillingen in de natuur:
een punt beweegt zich langs de omtrek van de eenheidscirkel — de cirkel in $\mathbb{R}^2$ met middelpunt (0,0) en straal 1 — met constante snelheid 1 tegen de wijzers van de klok in. Op tijdstip 0 bevindt het zich in het punt (1,0). De componenten van deze beweging zijn twee functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dit zijn de *cosinus* en de *sinus*.

In een analytische beschrijving van deze functies gaat men te werk als bij de exponentiële functie: men *postuleert* (eist) eerst een paar eenvoudige eigenschappen, en leidt daar alle verdere kennis over de functies cosinus en sinus uit af. In dit college zijn we niet zo consequent: zo af en toe leiden we ook wel eens iets af uit het plaatje. Dus als we iets over de functies cos en sin willen bewijzen, dan kunnen we kiezen uit een meetkundig bewijs, gebaseerd op het plaatje van de eenheidscirkel, en een analytisch bewijs, dat we 'met de ogen dicht' kunnen baseren op de grondeigenschappen. Zulke bewijzen zien er meestal heel verschillend uit.

Grondeigenschappen.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos 0 = 1 & \sin 0 = 0 \\[2ex] \cos' = -\sin & \sin' = \cos \end{array}} \tag{15}$$

Bewering 6. *De grondeigenschappen (15) leggen de functies* cos *en* sin *helemaal vast.*

Bewijs. Stel dat twee functies C en $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ óók voldoen aan $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, $C' = -S$ en $S' = C$. Dan moet voor de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto (\cos(t) - C(t))^2 + (\sin(t) - S(t))^2 :$$

het volgende gelden op grond van de productregel voor differentatie:

$$f'(t) = 2(\cos(t) - C(t))(-\sin(t) + S(t)) + 2(\sin(t) - S(t))(\cos(t) - C(t)) = 0.$$

Dus $f(t) = f(0) = 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dat wil zeggen $C = \cos$ en $S = \sin$.

□

Stellinkje 7. *Voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt*

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 .$$

Bewijs. *Meetkundig:* Het punt $(\cos t, \sin t)$ ligt op de éénheidscirkel. Het stellinkje volgt daarom uit de stelling van Pythagoras.

Analytisch: Definieer $f(t) = \cos^2 t + \sin^2 t$. Uit de productregel voor differentiatie en uit de grondeigenschappen volgt dat

$$f'(t) = 2\cos t \cos' t + 2\sin t \sin' t = 2\cos t(-\sin t) + 2\sin t \cos t = 0 .$$

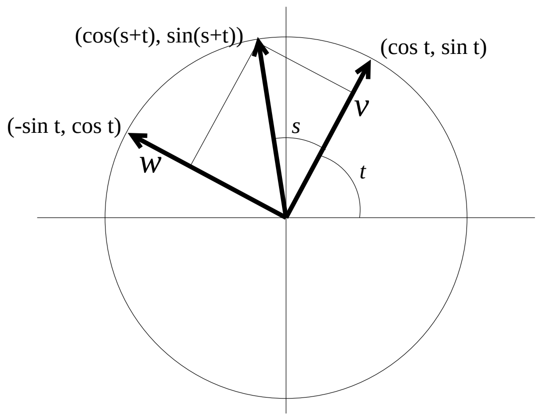
Dus f is een constante functie. Om de waarde van f te vinden, berekenen we haar voor $t = 0$:

$$f(0) = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1 + 0 = 1 .$$

□

Optelformules voor sin en cos. *Voor alle reële getallen s en t geldt:*

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t \\ \sin(s+t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t \end{aligned} \tag{16}$$



Bewijs. *Meetkundig:* De vector $\vec{v}$ in het plaatje heeft componenten $(\cos t, \sin t)$, en de vector $\vec{w}$ wordt verkregen door $\vec{v}$ over een rechte hoek linksom te draaien: $\vec{w} = (-\sin t, \cos t)$. Uit het plaatje lezen we nu af dat:

$$\begin{aligned} (\cos(s+t), \sin(s+t)) &= \cos s \cdot \vec{v} + \sin s \cdot \vec{w} = \cos s(\cos t, \sin t) + \sin s(-\sin t, \cos t) \\ &= (\cos s \cos t - \sin s \sin t, \cos s \sin t + \sin s \cos t) . \end{aligned}$$

□

Opgaafje 20. Geef zelf een analytisch bewijs. Aanwijzing: kies $s, t \in \mathbb{R}$ vast en definieer

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \mapsto \cos(s+u)\cos(t-u) - \sin(s+u)\sin(t-u)$,
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \mapsto \sin(s+u)\cos(t-u) + \cos(s+u)\sin(t-u)$.
Laat vervolgens zien dat $g' = h' = 0$, en concludeer hieruit dat $g(0) = g(t)$ en $h(0) = h(t)$.

Het getal π. De omtrek van de eenheidscirkel wordt 2π genoemd. De eeuwigdurende cirkelbeweging is telkens na een tijd 2π in zijn uitgangspunt terug: hij heeft *periode* 2π. Dus ook de cosinus- en de sinusfunctie hebben deze periode. Dat wil zeggen: voor alle $x \in \mathbb{R}$ en voor alle gehele getallen k:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \text{en} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

(Dit zouden we ook uit de grondeigenschappen van de sinus en de cosinus kunnen afleiden, maar dat doen we hier niet.) Het getal π is een *transcendent* getal. Dat wil zeggen: het is geen breuk, maar ook niet de oplossing van een vierkantsvergelijking, derdegraads-vergelijking, vierdegraads-vergelijking, of hoe hoog ook, met geheeltallige coëfficiënten. Er zijn vele miljarden decimalen van π berekend, maar in deze rij decimalen is geen regelmaat ontdekt. Men vermoedt dat ze alle statistische eigenschappen heeft van een toevalsrij.

Tangens. De functie tg, gedefiniëerd door $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ voor al die reële getallen x waarvoor $\cos x \neq 0$, voldoet aan:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}'x &= 1 + (\mathrm{tg}\, x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2} \\ \mathrm{tg}\,(x+y) &= \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}\, x\ \mathrm{tg}\, y} \end{aligned}$$

Hyperbolische functies

De functies sinh (spreek uit: sinus hyperbolicus) en cosh zijn gedefiniëerd door

$$\begin{aligned} \sinh(x) &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ; \\ \cosh(x) &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ . \end{aligned}$$

Ze zijn nauw verwant aan de sinus en de cosinus, zoals blijkt uit de volgende eigenschappen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cosh 0 = 1 & \sinh 0 = 0 \\ \cosh' = \sinh & \sinh' = \cosh \end{array}}$$

Verder geldt nog:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{17}$$

Net als bij de goniometrische functies definieert men:

$$\mathrm{tgh}\, x := \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

die ook weer voldoet aan

$$\begin{aligned} \mathrm{tgh}'x &= 1 - (\mathrm{tgh}\, x)^2 = \frac{1}{(\cosh x)^2}\ ; \\ \mathrm{tgh}\,(x+y) &= \frac{\mathrm{tgh}\, x + \mathrm{tgh}\, y}{1 + \mathrm{tgh}\, x\, \mathrm{tgh}\, y}\ . \end{aligned} \tag{18}$$

Wat de sinus en de cosinus zijn voor de draaiingen in het vlak, zijn de hyperbolische functies voor de Lorentz-transformaties uit de speciale relativiteitstheorie. De tangens hyperbolicus speelt hierbij de rol van v/c: de snelheid gemeten als fractie van de lichtsnelheid.

Arcsinus, arccosinus en arctangens

$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	is de inverse van	$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$	is de inverse van	$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$
$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	is de inverse van	$\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

Berekening van inverse functies

Soms kun je de inverse van een gegeven bijectieve functie f expliciet berekenen: begin met $y = f(x)$, en druk x uit in y. Helaas lukt dit niet altijd. Wel kun je altijd de grafiek van f^{-1} tekenen, want die ontstaat uit de grafiek van f door verwisseling van de rollen van x en y. Of, anders gezegd: de grafiek van f^{-1} is het spiegelbeeld van de grafiek van f om de lijn $x = y$.

Voorbeeld 2. Bereken de inverse van de functie $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Oplossing. Als $y = \sinh x$, dan is $e^x = \cosh x + \sinh x = \sqrt{y^2+1} + y$, dus

$$x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) .$$

Hiermee hebben we voor $\sinh^{-1}$ een functievoorschrift gevonden: $\sinh^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Opgaven bij Hoofdstuk 3

Opgave 21. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefiniëerd door $f(x) = 7 + \sqrt[5]{3x-2}$.
Bereken de inverse van f.

Opgave 22. Zij x een reëel getal met $\operatorname{tg} x = 7$. Bereken $\operatorname{tg} 3x$ exact.

Opgave 23. Zij $f : [0,3) \to [1,5]$ gedefiniëerd door $f(x) = 1 + 4x - x^2$.
a) Is f injectief?
b) Is f surjectief op $[1,5]$?

Opgave 24. Bereken $\sin \dfrac{\pi}{12}$ exact.

Opgave 25. Bewijs dat voor alle $x \in (0,\infty)$ geldt: $\log x \leq 2\sqrt{x} - 2$.

Opgave 26. We definiëren functies f en g van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ door $f(x) = \log\left(x^2+1\right)$ en $g(x) = e^{3x}$.
Bereken $g \circ f$ en $f \circ g$.

Opgave 27. Teken grafieken van de functies arcsin , arccos en arctg .

Opgave 28. Teken grafieken van de functies cosh en sinh.

Opgave 29. We definiëren $f : (5,\infty) \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \sqrt{x-5}$. Bepaal $(\log \circ f)^{-1}$

Opgave 30. Bepaal $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ en $\operatorname{arctg}(-1)$.

Opgave 31. Teken een grafiek van de functie $x \mapsto \arcsin x + \arccos x \quad (x \in [-1,1])$.
Verklaar het saaie karakter van deze grafiek.

Opgave 32. Teken een grafiek van de functie $x \mapsto \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq 0)$.
Verklaar het saaie karakter van deze grafiek.

Opgave 33. Bepaal de inverse van de functie $x \mapsto \operatorname{arctg} e^x \quad (x \in \mathbb{R})$

Opgave 34. Geef een formule voor de inverse van de functie $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$.

4 De complexe exponentiële functie

We hebben de reële exponentiële functie gedefinieerd door twee grondeigenschappen te eisen

(i) $\exp' = \exp$,

(ii) $\exp(0) = 1$.

Door inverteren werd vervolgens de logaritme gedefinieerd. Op dezelfde manier gaan we te werk om *complexe* functies exp en log te construeren: laten we eens kijken of we een functie $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kunnen vinden die aan de eisen (i) en (ii) voldoet.
In het reële geval kwamen we uit op een functie met de *vermenigvuldigingseigenschap*

(iii) $\exp(\alpha + \beta) = \exp(\alpha)\exp(\beta)$.

Dat zal ook nu weer het geval blijken te zijn.
Laten we voor het moment de 'oude' exponentiële functie aanduiden met e^x. We zijn op zoek naar een nieuwe functie $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ met de grondeigenschappen (i) en (ii). Voor $x \in \mathbb{R}$ vinden we natuurlijk direct weer:

$$\exp(x) = e^x \ . \tag{19}$$

Maar wat gebeurt er als het argument een imaginair deel krijgt? Laten we eens een $x \in \mathbb{R}$ vast kiezen en dan voor willekeurige $y \in \mathbb{R}$ het reële en imaginaire deel een naam geven:

$$\exp(x + iy) := f(y) + ig(y) \ . \tag{20}$$

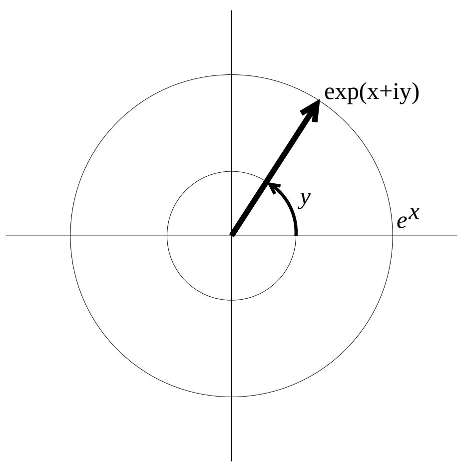
Vergelijking (19) levert dan: $f(0) = e^x$ en $g(0) = 0$. Door nu relatie (20) links en rechts te differentiëren vinden we dat

$$f'(y) + ig'(y) = \frac{d}{dy}\exp(x + iy) = i\exp'(x + iy) = i\exp(x + iy) = i(f(y) + ig(y)) = -g(y) + if(y) \ .$$

Hier hebben we de gewone differentiatieregels gebruikt, die voor complexwaardige functies net zo opgaan. We concluderen dat $f' = -g$ en $g' = f$. Afgezien van de factor e^x zijn dit precies de vergelijkingen waardoor we de cosinus- en de sinusfunctie gedefinieerd hebben! Dus moet $f(y) = e^x \cos y$ en $g(y) = e^x \sin y$. We hebben onze complexe exponentiële functie gevonden.

Definitie.

$$\boxed{\exp(x + iy) := e^x(\cos y + i\sin y)}$$



Stelling 8. *Deze functie* exp *voldoet aan (i), (ii) en (iii).*

Bewijs. Het bewijs van (i) stellen we uit tot Hoofdstuk 7. (ii) is duidelijk: $e^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1$. Eigenschap (iii) volgt uit de wet van absolute waarde en argument:

$$\begin{aligned}\exp(x+iy)\exp(s+it) &= e^x(\cos y + i\sin y)e^s(\cos t + i \sin t)\\ &= e^{x+s}\big(\cos(y+t) + i\sin(y+t)\big)\\ &= \exp\big((x+s)+i(y+t)\big)\ .\end{aligned}$$

□

Voortaan zullen we e^z schrijven voor $\exp(z)$, ook als z niet reëel is, ook al is het verband met machtsverheffen nu wel erg vaag geworden. Raadselachtig is in het begin vooral het 'ronddraaiende' karakter van de exponentiële functie in de imaginaire richting:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Zo brengt de vergelijking $e^{i\pi} = -1$ de drie bijzondere getallen e, i en π van de 'hogere wiskunde' op onverwachte wijze samen.

De complexe logaritme

Struikelblok bij het definiëren van een complexe logaritme, en daardoor ook bij complexe machten, is dat de complexe exponentiële functie helemaal niet inverteerbaar is! De functie e^z heeft immers periode $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi ik} = e^z\ , \qquad (k\in\mathbb{Z})\ .$$

Als nu $w = e^z = e^{z+2\pi i} = e^{z+4\pi i} = \ldots$, welk getal moeten we dan $\log w$ noemen: z of $z+2\pi i$ of $z+4\pi i$ of ...? Hier moet iets afgesproken worden, en zo'n afspraak heeft onvermijdelijk iets willekeurigs: Van alle kandidaten die in aanmerking komen om $\log w$ genoemd te worden, ligt er precies één in de strook

$$S := \{\ x+iy\ \mid\ -\pi < y \le \pi\ \}\ .$$

Deze noemen we: $\log w$.

Definitie. De functie $\log : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to S$ is de inverse van de bijectie $S \to \mathbb{C}\backslash\{0\} : z \mapsto e^z$.
Kortom, als $w \neq 0$, dan kunnen we w schrijven als $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, met $x+iy$ in de strook S, dat wil zeggen: $-\pi < y \le \pi$. Dit kunnen we doen door $|w| = e^x$ en $\arg w = y$ te nemen. In dat geval is $x+iy$ de logaritme van w.
In formule:

$$\boxed{\log w = \log|w| + i\arg w}$$

Waarschuwing. Met de kunstmatige conventie dat het imaginaire deel van een logaritme, of een argument, altijd tussen $-\pi$ en π in moet liggen, omzeilen we het niet-inverteerbaar zijn van de exponentiële functie. Hiervoor betalen we een prijs: *niet* voor alle complexe getallen v en w geldt

$$\log(vw) = \log v + \log w\ .$$

Linker- en rechterlid kunnen gelijk zijn, maar ook een verschil van $\pm 2\pi i$ vertonen.

Complexe wortels

Ook voor het bepalen van de *wortel* uit een complex getal z is een conventie nodig. Er zijn immers altijd *twee* complexe getallen waarvan het kwadraat z is (tenzij $z = 0$). We spreken af dat we het getal nemen waarvan het argument in het interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ligt. Anders gezegd:

$$\boxed{\sqrt{z} := \exp \tfrac{1}{2} \log z}$$

Meer in het algemeen definiëren we

$$\boxed{\sqrt[n]{z} := \exp \tfrac{1}{n} \log z}$$

Complexe machten

Dronken van het succes proberen we nu willekeurige complexe machten te definiëren:

$$z^\beta := \exp(\beta \log z) \qquad \text{voor} \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \beta \in \mathbb{C}\,!$$

Dit is echter een gevaarlijke bezigheid. Door de in de definitie van de logaritme binnengeslopen willekeur zijn bijna alle mooie eigenschappen van machten verloren gegaan. Zo gelden de volgende formules *niet* meer algemeen:

$$(uz)^\alpha = u^\alpha z^a \qquad \text{en} \qquad z^{\alpha\beta} = (z^\alpha)^\beta \; .$$

Bijvoorbeeld:

$$\big((-1)\cdot(-4)\big)^{\frac{1}{2}} \neq (-1)^{\frac{1}{2}}(-4)^{\frac{1}{2}}$$
$$i^{(4\cdot\frac{1}{2})} \neq (i^4)^{\frac{1}{2}} \; .$$

Lineaire differentiaalvergelijkingen

Een *differentiaalvergelijking* is een vergelijking waarin de onbekende een functie voorstelt, en waarin haar afgeleide of een afgeleide van hogere orde vóórkomt. (De afgeleide f' van een functie f heet de afgeleide van eerste orde, f'' de afgeleide van tweede orde, etcetera.) Een functie is een *oplossing* van zo'n differentiaalvergelijking als het invullen van *die hele functie* de vergelijking waar maakt. Zo is de functie exp een oplossing van de differentiaalvergelijking $f' = f$.

Exponentiële groei of verval. Deze treedt op in situaties waar de toe- of afname van een grootheid evenredig is met de waarde van die grootheid zelf. Voorbeelden:

- de toename van een ongeremd groeiende bacteriekolonie,
- de toename van kapitaal onder een vast rentepercentage,
- de afname van de radioactiviteit van een hoeveelheid materiaal onder radioactief verval.

Dit exponentiële verloop wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$f'(t) = \alpha f(t) \; .$$

Het is niet moeilijk hier een oplossing voor te vinden door een beetje aan de exponentiële functie te morrelen:

$$f(t) = \exp(\alpha t) = e^{\alpha t} \; .$$

Dit is niet de enige oplossing: ook de functie

$$f(t) = c \cdot e^{\alpha t}$$

voldoet. Meer zijn er niet. (Zie het bewijs van Bewering 5 in Hoofdstuk 3.)

Voorbeeld 3. Atomen van stof A vallen spontaan uiteen. Ieder atoom heeft per tijdseenheid dezelfde kans om uit elkaar te vallen. Het aantal dat het dan doet is evenredig met het totaal aantal dat er is, laten we zeggen $A'(t) = -\dfrac{1}{100}A(t)$. Bereken de halfwaardetijd T.

Oplossing. Uit de differentiaalvergelijking volgt $A(t) = A(0)e^{-\frac{1}{100}t}$.

Dus uit $A(T) = \dfrac{1}{2}A(0)$ volgt $T = 100 \log 2$.

Gedempte trillingen.

Laten we nu eens kijken naar de lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde

$$f''(t) + \gamma f'(t) + \alpha f(t) = 0$$

met complexe constanten α en γ. Omdat rechts een 0 staat, wordt ze *homogeen* genoemd.
Als α en γ beide positief zijn, is dit de bewegingsvergelijking voor een voorwerp met massa 1 dat door een veer met veerconstante α naar zijn nulpositie wordt getrokken, en waarvan de beweging gedempt wordt met een 'dempingscoëfficiënt' γ.

We proberen eerst weer eens een functie van het type $f(t) = e^{\lambda t}$. Zo'n functie is inderdaad een oplossing van onze differentiaalvergelijking als

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma\lambda e^{\lambda t} + \alpha e^{\lambda t} = 0 ,$$

dus als λ voldoet aan de vierkantsvergelijking

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \alpha = 0 .$$

In het algemeen zijn er voor λ twee oplossingen (met som $-\gamma$),

$$\lambda_\pm := \tfrac{1}{2}\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha}\right) .$$

Aan de differentiaalvergelijking voldoen niet alleen de functies $e^{\lambda_+ t}$ en $e^{\lambda_- t}$, maar ook alle lineaire combinaties

$$\boxed{f(t) = Ae^{\lambda_- t} + Be^{\lambda_+ t}}$$

Bewering. Als $\gamma^2 \neq 4\alpha$, dan zijn dit *alle* oplossingen. Als $\gamma^2 = 4\alpha$, dan is de meest algemene oplossing

$$\boxed{f(t) = (At + B)e^{-\frac{1}{2}\gamma t}}$$

Bewijs. We passen weer de methode toe uit het bewijs van Bewering 5 in Hoofdstuk 3: stel dat $f(t) = e^{\lambda_+ t}g(t)$ aan de differentiaalvergelijking voldoet. Dan geldt:

$$g''(t) + (\lambda_+ - \lambda_-)g'(t) = 0 . \qquad \text{(Reken na!)}$$

Als nu $\gamma^2 \neq 4\alpha$, dan is $\lambda_+ \neq \lambda_-$, zodat

$$g'(t) = Ce^{(\lambda_- - \lambda_+)t} , \quad \text{en dus} \quad g(t) = Ae^{(\lambda_- - \lambda_+)t} + B .$$

Hieruit volgt dat

$$f(t) = g(t)e^{\lambda_+ t} = Ae^{\lambda_- t} + Be^{\lambda_+ t} .$$

Anderzijds, als $\gamma^2 = 4\alpha$, dan moet g voldoen aan $g''(t) = 0$, zodat $g(t) = At + B$.

□

Reële oplossingen.

Laten we even apart kijken naar het geval dat $\alpha, \gamma \geq 0$, en alleen letten op reële f. Dit is de fysische situatie van een gedempte trilling.
We onderscheiden drie gevallen:

$>$ Superkritische demping: Als $\gamma^2 > 4\alpha$, dan zijn λ_+ en λ_- beide reëel, en we vinden alle reële oplossingen f door A en B reëel te kiezen.

$=$ Kritische demping: Als $\gamma^2 = 4\alpha$, dan vinden we alle reële oplossingen f door A en B reëel te kiezen.

$<$ Subkritische demping: Als $\gamma^2 < 4\alpha$, dan is

$$\lambda_\pm = -\tfrac{1}{2}\gamma \pm i\omega \ ,$$

waarbij $\omega := \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha - \gamma^2}$. In dat geval is f alleen reëel als $B = \overline{A}$. We kunnen de oplossing dan schrijven als

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\big(C\cos\omega t + D\sin\omega t\big) \ ,$$

waarbij $C = A + B = 2\mathrm{Re}\,A$ en $D = i(A - B) = -2\mathrm{Im}\,A$.

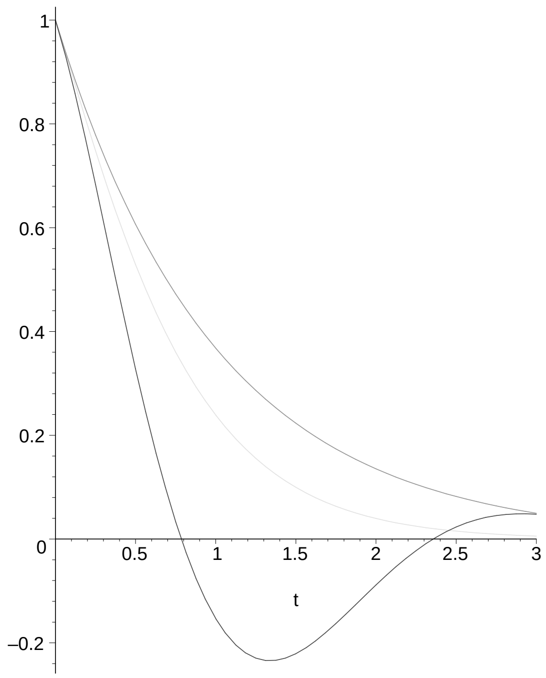
Voorbeelden.

1. De oplossing van $f''(t) + 5f'(t) + 6f(t) = 0$ is $f(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$.
2. De oplossing van $f''(t) + 4f'(t) + 5f(t) = 0$ is $f(t) = C_1 e^{-2t}\sin t + C_2 e^{-2t}\cos t$.
3. De oplossing van $f''(t) + 4f'(t) + 4f(t) = 0$ is $f(t) = C_1 t e^{-2t} + C_2 e^{-2t}$.

Door extra voorwaarden voor de oplossing kunnen C_1 en C_2 vast liggen. In het laatste voorbeeld: als voldaan moet zijn aan $f(0) = f'(0) = 1$, dan moeten C_1 en C_2 voldoen aan $1 = C_2$ en $1 = C_1 - 2C_2$. De oplossing is dan $f(t) = 3te^{-2t} + e^{-2t} = (3t + 1)e^{-2t}$.

Voorbeeld 4. Zoek de oplossing van $f''(t) + 9f(t) = 0$ die voldoet aan $f(0) = 5$ en $f'(0) = 3$.

Oplossing. Dit is het geval zonder demping. De algemene oplossing is $f(t) = C\cos 3t + D\sin 3t$. Invulling van de ‘randvoorwaarden’ leidt tot $C = 5$ en $D = 1$, en dus $f(t) = 5\cos 3t + \sin 3t$.



Oplossing van $f'' + \gamma f' + 5f = 0$ voor $\gamma = 2, 2\sqrt{5}$ en 6 met begincondities $f(0) = 1$ en $f'(0) = -1$

Opgaven bij Hoofdstuk 4

Opgave 35. Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $a + ib$.

(a) $\sqrt{i}$;

(b) $\sqrt[3]{-1}$;

(c) $(\sqrt[3]{i})^5$;

(d) $\sqrt[3]{i^5}$;

(e) $e^{-\pi i/2}$;

(f) $\log(1+i)$;

(g) $\log \dfrac{2+i}{2-i}$.

Opgave 36. Bepaal alle functies f die voldoen aan:

(a) $f''(t) = 3f(t) + 2f'(t)$

(b) $f''(t) = 2f'(t)$

(c) $f''(t) = -4f(t) + 2f'(t)$

Opgave 37.

(a) Zij ω een vast reëel getal. Voor welke (complexe) waarde van A is de functie $t \mapsto Ae^{i\omega t}$ een oplossing van de differentiaalvergelijking $f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = e^{i\omega t}$?

(b) Noem de in (a) gevonden waarde: $A(\omega)$. Voor welke waarde van ω is $|A(\omega)|^2$ maximaal?

(Dit wordt de *resonantiefrequentie* van de gedempte harmonisch oscillator met parameters 2 en 5 genoemd. $|A(\omega)|^2$ is de *resonantie-intensiteit* bij frequentie ω.)

5 Veeltermfuncties

De eenvoudigste functies zijn veeltermfuncties. Dit zijn de functies die je kunt berekenen met alleen de operaties $+$ en $\times$.

Definitie. Een *veeltermfunctie* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ van de *graad* n is een functie die er zó uitziet:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n, \qquad (a_n \neq 0). \tag{21}$$

Hierbij zijn $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reële respectievelijk complexe constanten. Een veeltermfunctie van de graad 0 is een constante functie, niet gelijk aan 0. Een veelterm van de graad 1 is een lineaire functie $z \mapsto az + b$, een veeltermfunctie van de graad 2 een kwadratische functie $z \mapsto az^2 + bz + c$, etcetera. De nulfunctie heeft geen graad, of als je wilt graad $-\infty$.

De hoofdstelling van de algebra

Het belangrijkste wat je moet weten over veeltermen is hoe je ze door het bepalen van hun nulpunten in factoren kunt ontbinden. We beginnen met een voorbeeld.

Voorbeeld 5. Zoek de nulpunten van de kwadratische veelterm $z^2 - 8z + 25$.

Oplossing.

$$\begin{aligned} z^2 - 8z + 25 = 0 &\iff z^2 - 8z + 16 = -9 \\ &\iff (z-4)^2 = -9 \\ &\iff \quad z - 4 = \pm 3i \\ &\iff \quad z = 4 \pm 3i. \end{aligned}$$

Als een veelterm p een nulpunt α heeft, (d.w.z. als $p(\alpha) = 0$), dan kun je een factor $z - \alpha$ uitdelen, en zo de graad van je veelterm verlagen. Dit is de eerste stelling van dit hoofdstuk.
In het voorbeeld kunnen we dit tweemaal doen, en krijgen we de ontbinding in factoren:

$$z^2 - 8z + 25 = \big(z - (4 + 3i)\big)\big(z - (4 - 3i)\big).$$

(Reken na dat dit inderdaad klopt.)

Nu is het mooie van het lichaam $\mathbb{C}$ van de complexe getallen, dat hierin *elke* veelterm van graad ≥ 1 minstens één nulpunt heeft. Dit resultaat, dat we al aangekondigd hebben in de aanhef van Hoofdstuk 2, vormt de tweede stelling van dit Hoofdstuk.

Door de beide bovengenoemde stellingen te combineren komen we tot de Hoofdstelling van de Algebra, die zegt dat je elke complexe veelterm helemaal in factoren van het type $z - \alpha$ kunt ontbinden.

Daar gaat-ie!

Definitie. Zij p een veeltermfunctie van de graad $n \geq 1$. We zeggen dat p *deelbaar is door* $z - \alpha$ als er een andere veelterm q bestaat (van de graad $n - 1$) zó dat voor alle z geldt:

$$p(z) = (z - \alpha)q(z)\ .$$

Stelling 9. *Als $\alpha \in \mathbb{C}$ een nulpunt is van een veeltermfunctie p, dan is p deelbaar door $z - \alpha$.*

Bewijs. Eerst merken we op dat voor $k \geq 1$ de veelterm $z^k - \alpha^k$ deelbaar is door $z - \alpha$. Immers:

$$z^k - \alpha^k = (z - \alpha)\big(z^{k-1} + \alpha z^{k-2} + \alpha^2 z^{k-3} + \ldots + \alpha^{k-2} z + \alpha^{k-1}\big) . \qquad (22)$$

Zij nu $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, en neem aan dat $p(\alpha) = 0$. Dan geldt voor alle z (bedenk dat $z^0 = \alpha^0 = 1$):

$$p(z) = p(z) - p(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k - \alpha^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (z^k - \alpha^k) .$$

Omdat $z^k - \alpha^k$ voor $k \geq 1$ deelbaar is door $z - \alpha$, is p het ook.

$\square$

Voorbeeld 6. Ontbind de volgende veelterm in factoren:

$$p(z) = z^3 - 4z^2 + 9z - 10 .$$

Oplossing. Een derdegraads veeltermfunctie met reële coëfficiënten moet minstens één reëel nulpunt hebben. Met een beetje zoeken ($p(0) = -10 < 0$, $p(1) = -4 < 0$, $p(3) = 8 > 0$, aha! $p(2) = 0$) vinden we zo'n nulpunt: 2. Dus moet p deelbaar zijn door $z - 2$. Door uitdelen vinden we dat

$$p(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 5) .$$

Maar voor die kwadratisch veelterm hebben we een methode:

$$z^2 - 2z + 5 = (z - 1)^2 + 4 = (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i) .$$

Dus

$$p(z) = (z - 2)(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i) .$$

Stelling 10. *Elke veelterm van graad ≥ 1 heeft in $\mathbb{C}$ minstens één nulpunt.*

Men zegt ook wel: de complexe getallen zijn algebraïsch volledig. Met de invoering van de complexe getallen hebben we in één klap een soort eindstadium bereikt: om veeltermvergelijkingen op te kunnen lossen hoeven we onze getallen niet verder meer uit te breiden. Deze algebraïsche volledigheid van de complexe getallen is een diepzinnige stelling uit de Analyse. Er zijn honderden jaren verlopen vanaf de eerste notie van complexe getallen bij Cardano tot het eerste bewijs van deze stelling door Gauss. Het bewijs vind je in boeken over complexe functietheorie. (Zie bijvoorbeeld [Kor] of [Rud2].)

Als gevolg van de voorgaande stellingen 9 en 10 weten we nu dat elke veeltermfunctie p met complexe coëfficiënten zo in factoren kan worden ontbonden:

Stelling 11: Hoofdstelling van de Algebra. *Zij p een complexe veelterm van de graad $n \geq 1$. Dan bestaan er complexe getallen $c, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ zó dat*

$$p(z) = c(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \cdots (z - \alpha_n).$$

Bewijs. Op grond van Stelling 10 heeft p een nulpunt, zeg α_1. Op grond van Stelling 9 kunnen we p delen door $z - \alpha_1$. Het quotiënt is een veelterm — zeg p_1 — van de graad $n - 1$. Als $n - 1 = 0$, dan is deze constant, en zijn we klaar. Als $n - 1 \geq 1$, dan heeft ook p_1 weer een nulpunt, zeg α_2. Deel $z - \alpha_2$ uit: $p_2(z) := p_1(z)/(z - \alpha_2)$. Etcetera. De procedure stopt na n stappen; dan stuiten we op een veelterm van de graad 0, een constante, die we c noemen. (Ga na dat feitelijk $c = a_n$.)

$\square$

Het is niet zo moeilijk in te zien dat p maar op één manier in factoren van de vorm $z - \alpha$ kan worden ontbonden, afgezien van de volgorde van deze factoren.

Gevolg. Een veelterm van de graad n kan nooit méér dan n nulpunten hebben. Wèl minder: het is mogelijk dat sommige van de getallen in het rijtje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ samenvallen. Het aantal keren dat een nulpunt in dit rijtje vóórkomt wordt zijn *multipliciteit* genoemd. De som van de multipliciteiten van alle nulpunten is n.

Waarschuwing. Dat de nulpunten er *zijn* betekent nog niet dat je ze kunt vinden! Expliciete formules voor de nulpunten van willekeurige veeltermen in termen van wortelfuncties bestaan alleen voor $n \leq 4$. Numerieke benaderingen zijn natuurlijk wèl mogelijk.

Toepassing 2. Ontbind de volgende veelterm in factoren: $z^8 - 16$.

Oplossing. We zoeken eerst de nulpunten van $z^8 - 16$. Als $z^8 = 16$, dan is $|z| = \sqrt{2}$ en mogen we schrijven: $z = \sqrt{2}e^{i\varphi}$. Volgens de regel van De Moivre wordt onze vergelijking

$$16e^{8i\varphi} = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 8\varphi = 2\pi k, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \pmod{2\pi} .$$

Dus de nulpunten zijn

$$\sqrt{2}, 1+i, i\sqrt{2}, -1+i, -\sqrt{2}, -1-i, -i\sqrt{2}, 1-i ,$$

en de ontbinding is

$$z^8 - 16 = (z-\sqrt{2})(z-1-i)(z-i\sqrt{2})(z+1-i)(z+\sqrt{2})(z+1+i)(z+i\sqrt{2})(z-1+i) .$$

Maar het kan natuurlijk ook zó:

$$\begin{aligned} z^8 - 16 &= (z^4-4)(z^4+4) = (z^2-2)(z^2+2)(z^2-2i)(z^2+2i) \\ &= (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})(z-(1+i))(z+(1+i))(z-(-1+i))(z+(-1+i)) . \end{aligned}$$

Reële veeltermfuncties

Als de coëfficiënten van een veelterm p reëel zijn, dan is voor alle $z \in \mathbb{C}$: $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$, en volgens de Hoofdstelling van de Algebra moet dus voor de ontbinding in factoren gelden

$$\begin{aligned} (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n) = p(z)/c = \overline{p(\overline{z})}/c &= \overline{(\overline{z}-\alpha_1)(\overline{z}-\alpha_2)(\overline{z}-\alpha_3)\cdots(\overline{z}-\alpha_n)} \\ &= (z-\overline{\alpha_1})(z-\overline{\alpha_2})(z-\overline{\alpha_3})\cdots(z-\overline{\alpha_n}) . \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

Lemma 12. *Als α een nulpunt is van een veelterm p met reële coëfficiënten, dan is $\overline{\alpha}$ ook een nulpunt van p, met dezelfde multipliciteit.*

Gevolg 13. *Als n oneven is, moet minstens één van de nulpunten op de reële as liggen.*

Dit wisten we natuurlijk al, maar nu zien we het nog eens op een andere manier.

Opgaven bij Hoofdstuk 5

Opgave 38. Los de volgende vierdegraads vergelijking op in de complexe getallen:

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z = 0 \; .$$

Opgave 39. Ontbind de volgende veelterm in factoren:

$$z^6 + 1.$$

Opgave 40. Zoek reële constanten a en b, zó dat

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{1+ix} + \frac{b}{1-ix} \; .$$

Opgave 41. Door bovenstaande vergelijking links en rechts te primitiveren krijg je een verband tussen de reële functie arctg en de complexe logaritme. Schrijf dit op. Kun je dit verband ook meetkundig begrijpen?

Opgave 42. Bepaal de som van de oplossingen van de vergelijking

$$z^5 + 13z^4 = 11z + 87 \; .$$

Aanwijzing: Deze vergelijking heeft vijf verschillende oplossingen; gebruik de Hoofdstelling.

6 Rijen en reeksen

In veel situaties krijg je te maken met oneindig voortlopende rijen van reële of complexe getallen. We geven een paar voorbeelden:

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

(b) $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

(c) $1,\ i, -1, -i,\ 1,\ i, -1, -i, \ldots$

(d) $\frac{1}{10}, \frac{14}{100}, \frac{142}{1000}, \frac{1428}{10000}, \frac{14285}{100000}, \frac{142857}{1000000}, \ldots$

(e) $1, \frac{5}{6}, \frac{25}{36}, \frac{125}{216}, \frac{625}{1296}, \ldots$

(f) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 54, 85, \ldots$

De notatie met '...' suggereert dat het gegeven beginstuk de hele rij vastlegt. Dat is natuurlijk niet zo. Maar wel kun je in de gevallen a, b, c, en e een formuletje gokken voor de n-de term, waarmee je zelf de rij kunt voortzetten. Ook in de gevallen (d) en (f) springt een regelmaat in het oog, al is een formule voor de n-de term aanzienlijk meer werk. Daarnaast bestaan er natuurlijk nog heel veel rijen zonder regelmaat.

Convergentie

Vaak is het nuttig van een rij te weten hoe zijn 'staart' zich gedraagt. Groeien de termen onbeperkt aan? Blijven ze in een bepaald gebied op en neer springen? Of komen de termen erg dicht in de buurt van een bepaalde constante? M.a.w.: heeft de rij een 'limiet'?

We gaan nu speciaal op de laatste vraag in. We zullen er een heel precieze interpretatie van maken.
Stel we hebben een rij getallen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$$

Onder een *staart* van deze rij verstaan we een rij van de vorm

$$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, a_{N+4}, \ldots$$

Zo'n staart wordt uit de oorspronkelijke rij verkregen door de eerste N termen te schrappen.
Stel nu, iemand legt ons een getal l voor en vraagt:

> Is er een staart van de rij te vinden waarin alle termen dicht bij l liggen?

Het antwoord zal er wel van afhangen, wat hij bedoelt met 'dicht bij l'. Nemen we de rij (c) hierboven, en $l = 1$, dan is het antwoord bevestigend als 'dicht bij l' betekent: 'binnen een cirkel met straal 100', maar ontkennend als het betekent 'binnen een cirkel met straal $\frac{1}{2}$'.
We zullen zeggen dat de rij $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ naar l *convergeert* als het antwoord op de vraag 'ja' is voor *elke* interpretatie van het begrip 'dicht bij'.
Anders geformuleerd: Als ik beweer dat de rij naar l convergeert, dan daag ik de hele wereld uit: 'Zeg mij maar wat je met 'dicht bij l' bedoelt; Dan zal ik een staart aanwijzen die louter bestaat uit getallen dicht bij l.' Iemand die op de uitdaging in wil gaan zegt bijvoorbeeld dat 'dicht bij l' moet betekenen: 'minder dan $\frac{1}{1000}$ van l af'. Ik heb me verplicht, dan een rangtelnummer N aan te wijzen, zó dat de getallen $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \cdots$ allemaal in het schijfje (in het complexe vlak) met middelpunt l en straal $\frac{1}{1000}$ liggen. Maar ik heb de verplichting aangegaan zonder te weten dat men met het getal $\frac{1}{1000}$ aan zou komen; ik was ook voorbereid op $\frac{1}{12345}$, 10^{-12} of 16. Kortom: als ε zó maar een positief getal

is, dan kan er iemand komen die 'dicht bij l' uitlegt als 'minder dan ε van l af'; en dan moet ik hem van repliek kunnen dienen door een geschikte N te noemen.
Zo komen we tot de volgende formele definitie.

Definitie. De rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *convergeert* naar het getal l als het volgende geldt:

Voor elk positief getal ε dat men ons voorlegt kunnen we een staart van de rij vinden waarvan de termen allemaal in het schijfje $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z - l\| < \varepsilon\}$ liggen.

Compact geformuleerd: De uitdrukking

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

betekent

$$\boxed{\text{Voor alle } \varepsilon > 0 \text{ is er een } A \in \mathbb{R} \text{ zó dat voor alle } n > A\text{: } |a_n - l| < \varepsilon.}$$

Deze definitie van het limietbegrip gaat over een complexe rij. Maar omdat de reële getallen op een lijn in het complexe vlak liggen, kan zij ongewijzigd op een rij reële getallen worden toegepast. Wie geen zin heeft om aan complexe getallen te denken, mag het schijfje $\{\ z \in \mathbb{C} \ \mid\ |z - l| < \varepsilon\ \}$ in de eerste definitie vervangen door het interval $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. De tweede definitie (met "$|a_n - l| < \varepsilon$") verandert niet.

Tot slot:

Een rij die ergens naar convergeert heet *convergent.*
Een rij die niet ergens naar convergeert heet *divergent.*

Calculus is een deel van de analyse, en de grondslag van de analyse is het limietbegrip. Dit is voor het eerst precies vastgelegd door A. Cauchy.

A. Cauchy (1789–1857)

Toepassing op de voorbeelden (a)–(f).

(a) Ik beweer dat de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ naar 0 convergeert. M.a.w.: ik durf te wedden: als je me een positief getal ε noemt, dan kan ik daar een N bij maken zó dat de getallen $\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+3}, \ldots$ minder dan ε van 0 af liggen. Waar haal ik de moed vandaan?
Wel, ik heb een recept:

$$\text{Neem } A := \frac{1}{\varepsilon}; \qquad \Big(N := \text{ de afronding van } A \text{ naar boven.}\Big)$$

Als je nu met je ε aankomt, en ik maak mijn A volgens mijn recept, dan geldt voor alle n met $n \geq A$ (dus vanaf $n = N$) dat $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{A} = \varepsilon$. Dus $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En dat is wat ik wilde.

(b) Dit is een divergente rij. Geen enkele staart ervan past in een cirkelschijf, hoe groot deze ook gekozen wordt.

(c) Ook deze rij divergeert. Immers, als ik beweer dat de rij convergeert en iemand geeft mij een ε kleiner dan 1, dan kom ik in moeilijkheden, want elke staart bevat steeds weer de punten 1, i, -1 en $-i$. Deze punten passen in geen enkele schijf met straal kleiner dan 1.

(d) Deze rij convergeert naar $\frac{1}{7}$, tevens het supremum van de rij. (Zie Hoofdstuk 1.) Voor stijgende rijen zijn de limiet en het supremum hetzelfde.

Limiet en supremum

We formuleren dit laatste nu iets preciezer. Eerst iets over het stijgen en dalen van rijen.
Het wiskundig gebruik van de woorden 'stijgend' en 'dalend' voor rijen is, net als voor functies in Hoofdstuk 3 een beetje ongewoon:

Definitie. We noemen een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$
stijgend als $a_{n+1} \geq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; en *strikt stijgend* als $a_{n+1} > a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;
dalend als $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; en *strikt dalend* als $a_{n+1} < a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 14. *Elke stijgende begrensde rij convergeert naar zijn supremum.*
Elke dalende begrensde rij convergeert naar zijn infimum.

Bewijs. Het is voldoende, alleen de eerste bewering te bewijzen. Zij $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$, en zij s het supremum. Geef mij maar een $\varepsilon > 0$. Omdat s de kleinste bovengrens is, is $s - \varepsilon$ geen bovengrens. Dus is er een term in de rij, zeg a_N, dat groter is dan $s - \varepsilon$. En omdat de rij stijgend is, en s een bovengrens, geldt voor alle $n \geq N$:

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s < s + \varepsilon\ .$$

□

Terug naar de voorbeeldrijen.

(e) Deze rij heeft als formule $e_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Hij is convergent.
Voor het bewijs hiervan hebben we hulp nodig:

Lemma 15: De ongelijkheid van Bernoulli. *Laat x een reëel getal zijn met $x > -1$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\ .$$

Bewijs. Er geldt

$$\begin{aligned}
&(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x \\
&(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x \\
&(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x \\
&(1 + x)^3 = (1 + x)^2(1 + x) \geq (1 + 2x)(1 + x) = 1 + 3x + 2x^2 \geq 1 + 3x \\
&(1 + x)^4 = (1 + x)^3(1 + x) \geq (1 + 3x)(1 + x) = 1 + 4x + 3x^2 \geq 1 + 4x \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}$$

□

Bewering. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0.$

Bewijs. Geef mij maar een $\varepsilon > 0$. Ik kies: $A := 5/\varepsilon$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$, vanwege de ongelijkheid van BERNOULLI:

$$n > A \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{6}{5}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{5} > \tfrac{1}{5}A = \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Dus

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon.$$

$\square$

Wiskundigen hebben de irritante gewoonte, alleen een bewering en een bewijs te geven. Ze vertellen er meestal niet bij, langs welke dwaalwegen ze op dat bewijs gekomen zijn. Ook in dit bewijs komt het recept voor A uit de lucht vallen. Het is eigenlijk op een kladpapiertje uitgerekend:

Ik wil: $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon.$

Wordt 6^n *veel groter dan* 5^n*? Ofwel: wordt* $\left(\frac{6}{5}\right)^n$ *heel groot?*
Er komt natuurlijk wel steeds minstens $\frac{1}{5}$ *bij.*
Wie zei dat ook weer? Oja, Bernoulli!
$(\frac{6}{5})^n = (1 + \frac{1}{5})^n > 1 + \frac{n}{5}$. *Ik ben klaar als*

$$1 + \frac{n}{5} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ook al goed:

$$\frac{n}{5} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dat wil zeggen:

$$n > \frac{5}{\varepsilon.}$$

Dit is mijn A.

Krijg deze truc onder de knie en verbaas je vrienden!

'Oneindige' limieten

Zij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een rij van reële getallen. We definiëren dan:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad :=$ bij ieder getal B kan ik een getal A bepalen zó dat geldt: $\quad n > A \Longrightarrow a_n > B$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad :=$ bij ieder getal B kan ik een getal A bepalen zó dat geldt: $\quad n > A \Longrightarrow a_n < B$

Standaard-limieten

Deze kun je bewijzen uit de definitie van 'limiet'.

(a)	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^c} = 0$	als $c > 0$	bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$
(b)	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$	als $c > 0$	bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 1$
(c)	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$		
(d)	$\lim_{n\to\infty} z^n = 0$	als $\lvert z\rvert < 1$	bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$
(e)	$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$	als $x \in \mathbb{R}$	bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{7}{n}\right)^n = e^7$
(f)	$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^c} = 0$	als $c > 0$	bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt[3]{n}} = 0$
(g)	$\lim_{n\to\infty} \frac{n^c}{d^n} = 0$	als $c > 0$ en $d > 1$	bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{e^n} = 0$
(h)	$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$	voor alle $z \in \mathbb{C}$	bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$

Rekenregels voor limieten

Met de standaard-limieten als bouwstenen kun je vele andere limieten berekenen. Hierbij kun je de volgende regels gebruiken.

(1) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dan is $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(2) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dan is $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

(3) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $c \in \mathbb{C}$, dan is $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$.

(4) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ en $b \neq 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

(5) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $c > 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} c^{a_n} = c^a$.

(6) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $a, c > 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} a_n^c = a^c$.

Bewijzen

Bij wijze van voorbeeld bewijzen we hieronder enkele van bovenstaande standaard-limieten en rekenregels.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$**.** als $c > 0$.

Bewijs. Het is voldoende om dit aan te tonen voor $c \geq 1$, want het geval $0 < c \leq 1$ volgt daaruit.
Daar gaat-ie. Kies $\varepsilon > 0$. Laat $A := \frac{c}{\varepsilon}$. Dan is volgens Bernoulli voor alle $n > A$:

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > n\varepsilon > A\varepsilon = c.$$

Dus $\sqrt[n]{c} < 1 + \varepsilon$. Omdat ook $\sqrt[n]{c} \geq 1$ is

$$\left|\sqrt[n]{c} - 1\right| < \varepsilon.$$

□

Bij voorbeeld (e) hebben we nog wat extra hulp nodig:

Stelling 16. Insluitstelling voor reële rijen. *Als van drie reële rijen* $a_0, a_1, a_2, \ldots$, $b_0, b_1, b_2, \ldots$, *en* $c_1, c_2, \ldots$ *gegeven is dat voor alle* n *geldt:* $a_n \le b_n \le c_n$, *terwijl*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l \ ,$$

dan convergeert ook de rij $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *naar* l.

Bewijs. Geef mij een $\varepsilon > 0$. Omdat $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, bestaat er een $A \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \ge A$: $a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Omdat $\lim_{n\to\infty} c_n = l$, bestaat er een $C \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \ge C$: $c_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Ik definieer nu B als het grootste van de twee getallen A en C. Dan geldt voor alle $n \ge B$ automatisch: $n \ge A$ én $n \ge C$. En dus geldt

$$l - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < l + \varepsilon.$$

Dus ook $b_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

□

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$**.**

Bewijs. Geef maar een $\varepsilon > 0$. Ik kies $A := \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2$. Dan geldt voor alle $n > A$, vanwege Bernoulli:

$$(1+\varepsilon)^{\frac{n}{2}} > 1 + n\frac{\varepsilon}{2} > \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}\right) > \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \ .$$

Dus is $(1+\varepsilon)^n > n$ en $1+\varepsilon > \sqrt[n]{n}$. Natuurlijk is ook $\sqrt[n]{n} > 1$, zodat we bereikt hebben:

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon \ .$$

□

Opgaafje 43. Natuurlijk is in dit bewijs A eerst op een kladpapiertje uitgerekend. Probeer deze berekening te reconstrueren!

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$**.**

Bewijs. Omdat $e^x = \exp(x/n)^n$, vinden we uit de eigenschappen (2) en (3) van de exponentiële functie heel snel (vergelijk ook Toepassing 1 in Hoofdstuk 3) dat voor $n > x$:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le e^x \le \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} .$$

Noem nu het linkerlid: a_n en het rechterlid: b_n. Dan is

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n .$$

Hieruit volgt, alweer met Bernoulli dat voor $n > x$:

$$\frac{a_n}{b_n} \ge 1 - \frac{x^2}{n}.$$

Omdat bovendien $a_n/b_n < 1$, zien we dat $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 1$ (insluitstelling). Bovendien is

$$0 \le e^x - a_n = e^x \left(1 - \frac{a_n}{e^x}\right) \le e^x \left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right) .$$

Uit de insluitstelling volgt nu dat $\lim_{n\to\infty} a_n = e^x$.

□

Toepassing 3. Zij x een positief reëel getal. Geef een benaderingsprocedure voor $\sqrt{x}$ die uitsluitend gebaseerd is op de bewerkingen optellen en delen.

Oplossing. Maak een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ als volgt:

$$a_0 := 1 \qquad \text{en} \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{23}$$

Dan is: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$. (Dit is feitelijk wat je rekenmachientje doet als je op de wortelknop drukt.)
Het idee is dit: als a_n groter is dan $\sqrt{x}$, dan is x/a_n juist kleiner, en omgekeerd. Dus zal a_{n+1}, het gemiddelde van de twee, wel een betere benadering van $\sqrt{x}$ zijn dan a_n.
Dat het inderdaad werkt kun je zó aantonen: Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$a_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) - \sqrt{x} = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 2a_n\sqrt{x} + x\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n - \sqrt{x}\right)^2.$$

Hieruit volgt dat de afwijking $a_n - \sqrt{x}$ positief is voor alle $n \geq 1$. Noem deze afwijking v_n. Dan volgt uit bovenstaande berekening dat voor $n \geq 1$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{v_n}{a_n} \cdot v_n < \frac{1}{2}v_n\ .$$

Dus de afwijking wordt bij elke stap met meer dan een factor 2 verkleind. Hieruit volgt dat voor $n \geq 1$:

$$0 \leq v_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1.$$

en dus (insluitstelling) $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, dat wil zeggen $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

□

Overigens: de benaderingsprocedure (23) voor $\sqrt{x}$ is nog veel beter dan dit bewijs suggereert. Er geldt nemelijk ook nog voor alle $n \geq 1$: $v_{n+1} < \frac{1}{2\sqrt{x}}v_n^2$. Dus zogauw v_n klein wordt, **verdubbelt** het aantal correcte decimalen in a_n bij iedere stap!

Opgaafje 44. Bedenk zelf een rechtvaardiging van bovenstaand algoritme voor worteltrekken met behulp van de 'webgrafiek'.

Reeksen

Lang voordat wiskundigen zich hadden bezig gehouden met rijen en hun convergentie, berekende men al oneindige sommen. Een paar voorbeelden: hoeveel is

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$?
(b) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$?
(c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$?
(d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \ldots$?
(e) $1 + 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \frac{10.000}{24} + \ldots$?

Een uitdrukking als $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ heet een *reeks* (Engels: "*series*"). Het uitrekenen van de som heet het *sommeren* van de reeks.

Convergentie van reeksen

Definitie 17. We zeggen dat de reeks

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$$

convergeert naar S (of som S heeft) als de rij van *partiële sommen*

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & , & \underbrace{a_1 + a_2} & , & \underbrace{a_1 + a_2 + a_3} & , & \dots \\ S_1 & , & S_2 & , & S_3 & , & \dots \end{array}$$

limiet S heeft. In dat geval schrijven we

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Een reeks die geen som heeft heet *divergent*.

Voorbeeld (a): De meetkundige reeks.

De reeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ uit voorbeeld (a) is een meetkundige reeks. We bewijzen nu een belangrijk resultaat over sommen van meetkundige reeksen.

Stelling. *Zij z een complex getal met $|z| < 1$. Dan is*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.}$$

De uitkomst van voorbeeld (a) is dus $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Bewijs. In het bewijs van Stelling 9 in Hoofdstuk 5 hebben we al eens gezien dat voor $z \neq 1$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Dus de som van de reeks is

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z + z^2 + \dots + z^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1-z}\left(1 - \lim_{n\to\infty} z^{n+1}\right) = \frac{1}{1-z} .$$

Immers z^{n+1} nadert tot 0 voor $n \to \infty$ omdat $|z| < 1$. (Standaardlimiet (d).)

$\square$

Voorbeeld (b): De reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$.

Deze is natuurlijk divergent: de partiële som S_n is gelijk aan n.

Voorbeeld (c): De reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ook in dit geval rijst de som elke grens te boven, zoals je inziet door de termen als volgt bij elkaar te nemen:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{>8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \cdots. \qquad (24)$$

Uit (24) zie je dat

$$S_{2^k} > \tfrac{1}{2}(k+2).$$

Dus $\lim_{k\to\infty} S_{2^k} = \infty$.

Voorbeeld (d) en de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

De reeks uit voorbeeld (d) is gemakkelijk te sommeren: je ziet direct dat er 1 uit komt. Ook met onze definitie via partiële sommen houdt dit resultaat stand, want steeds is $S_n = 1$ voor oneven n en $S_n = 1 - \frac{2}{n+2}$ voor even n (Ga na!).

Nu kunnen we uit de reeks (d) steeds twee termen bij elkaar pakken. We vinden dan een nieuwe reeks met dezelfde som:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \cdots = 1. \tag{25}$$

Anders geschreven:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \tag{25$'$}$$

Vergelijking van reeksen

Stelling 18. *Als $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ een convergente reeks is met positieve termen, terwijl $|a_n| \le b_n$ voor alle n, dan convergeert ook $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Bovendien is*

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots| \;\le\; b_1 + b_2 + b_3 + \cdots .$$

Bewijs. De stelling is geldig voor complexe a_j, maar we geven alleen een bewijs voor het reële geval. Laat $B := b_1+b_2+b_3+\ldots$, en bekijk de partiële sommen $A_n := a_1+a_2+\ldots+a_n$ en $B_n := b_1+b_2+\ldots+b_n$. Dan is somrij $A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3, \ldots$ positief en stijgend omdat $a_j+b_j \ge 0$, en naar boven begrensd door $2B$ omdat $a_j + b_j \le 2b_j$. Dus ze convergeert, en wel naar een getal L tussen 0 en $2B$. Maar dan is ook de rij $A_1, A_2, A_3, \ldots$ convergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) - \lim_{n\to\infty} B_n = L - B \in [-B, B]\ .$$

□

Toepassing 4. De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert.

Bewijs. Uit de ongelijkheid $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)}$ en de uitkomst (25$'$) hierboven volgt met Stelling 18 dat

$$0 \;<\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \;<\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \;=\; 1.$$

Tellen we overal 1 bij dan komt er

$$1 \;<\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;<\; 2.$$

Meer kunnen we er op het moment niet van zeggen. In het college over Fourier-theorie zal worden berekend dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6} \;=\; 1{,}644934\ldots \tag{26}$$

Alternerende reeksen

Stelling 19. *Als $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ een dalende rij is met limiet 0, dan convergeert de alternerende reeks*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

Bewijs. Laat $A_n := a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \pm a_n$. Je ziet gemakkelijk in dat

$$A_0 \geq A_2 \geq A_4 \geq \ldots \qquad \text{en} \qquad A_1 \leq A_3 \leq A_5 \leq \ldots .$$

Bovendien zijn alle even partiële sommen groter dan (of gelijk aan) alle oneven partiële sommen, dus beide rijen partiële sommen moeten convergeren, zeg naar S_{even} en S_{oneven}. Maar voor alle $n \geq 1$ geldt dat

$$0 \leq S_{even} - S_{oneven} \leq A_{2n} - A_{2n-1} = a_{2n} .$$

Uit de insluitstelling volgt nu dat $S_{even} = S_{oneven}$.

□

Absolute convergentie

Als de reeks $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$ convergeert, dan convergeert ook $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Dit volgt direct uit Stelling 18. In zo'n geval heet de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *absoluut convergent.*

Pas op!

Het omgekeerde is niet altijd juist. Als je een (reële) reeks hebt die wel convergeert, maar niet absoluut convergeert, dan zit je in een gevaarlijke situatie. Door de *volgorde* van de termen in de reeks te veranderen kun je er alles uitkrijgen wat je maar wilt!

Voorbeeld 7. Herschik de reeks (d) tot een reeks met som:

$$1 - \log 2 = 0,30685\ldots < 1 .$$

Oplossing. Ik neem van de reeks (d) steeds één positieve term en twee negatieve termen. Zo komen alle termen aan de beurt. Ik vind

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \cdots \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \frac{1}{72} + \cdots
\end{aligned}$$

Dit is de reeks (25), maar met alle termen met oneven rangnummer weggelaten! Er komt dus duidelijk minder dan 1 uit. In Hoofdstuk 9 zullen we zien dat dit precies de reeks is van $1 - \log(1 + x)$ voor het geval $x = 1$. Hij convergeert dus naar $1 - \log 2$.

Geruststelling. De som van reeks (d) volgens Definitie 17 is en blijft 1. Als je de termen verwisselt, veranderen de partiële sommen in Definitie 17, en daarmee mogelijkerwijs ook hun limiet. Je moet de verwisselde reeks dus als een andere reeks beschouwen.

Opgaven bij Hoofdstuk 6

Opgave 45. Bewijs rechtstreeks uit de definitie dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt[7]{n}} = 0$

Opgave 46. Bewijs rechtstreeks uit de definitie dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$

Opgave 47. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cosh n}$

Opgave 48. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\big)$

Opgave 49. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+1} - n\big)$

Opgave 50. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

Opgave 51. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Opgave 52. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 7n + 31}$

Opgave 53. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{\sqrt[23]{n}}$

Opgave 54. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n$

Opgave 55. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} n \log \dfrac{n-1}{n+1}$

Opgave 56. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + n^3}$

Opgave 57. Bewijs dat de rij $\sqrt{7}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{7}}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{7}}}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{7}}}}\ ,\ \ldots$ convergeert, en bereken de limiet.

Opgave 58. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e \cdot \sqrt{e} \cdot \sqrt[3]{e} \cdot \sqrt[4]{e} \cdot\ \cdots\ \cdot \sqrt[n]{e}}{n}$

Opgave 59. Bewijs dat de som $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ convergeert.

Opgave 60. Bereken de som $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

Hint: Gebruik dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Opgave 61. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Opgave 62. Bewijs dat de som $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ divergeert.

Opgave 63. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$

Opgave 64. Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-5}$ convergent is

Opgave 65. Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \sqrt{n^2-1}\right)$ convergeert

Opgave 66. Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ convergeert

Opgave 67. Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ convergeert

Opgave 68. Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ convergeert

Opgave 69. Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}\right)$ convergeert

Opgave 70. In elk van de punten $0, -1, -2, -3, -4, \ldots$ van de getallenlijn ligt een proton; in een punt $x > 0$ ligt een elektron. Is nu de totale elektrostatische aantrekkingskracht die de protonen op het elektron uitoefenen eindig?

7 Limieten en differentiatie

Het limietbegrip dat we voor rijen in Hoofdstuk 6 hebben geïntroduceerd moet nu een beetje worden opgerekt. Kon de index n alleen maar naar ∞ lopen, het argument van een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan tot elk reëel getal a naderen. Bij elke keuze van a kunnen we ons afvragen: wat doet $f(x)$ als x tot a nadert?
Zij D een gebied in $\mathbb{R}$ of in $\mathbb{C}$, bijvoorbeeld een interval of een schijf. Zij f een functie $D \to \mathbb{C}$. We kiezen een punt a op D of op de rand van D, en we vragen ons af wat het gedrag is van f *vlakbij* a. Het gaat ons daarbij *niet* om de waarde van f in het punt a zelf. (Misschien ligt a niet eens in het domein D!)

Definitie. We zeggen dat $f(x)$ *convergeert* naar l voor $x \to a$, ofwel dat

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

wanneer het volgende geldt:

> Voor elk positief getal ε dat men ons voorlegt kunnen wij een getalletje δ vinden zó dat voor alle $x \in D$ (behalve a zelf):
>
> $$|x-a| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Vertaald in hiëroglyphen ziet deze definitie er zó uit:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}: \quad 0 < |x-a| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

In het bovenstaande hebben we opengelaten of D uit reële of uit complexe getallen bestaat. De volgende definities zijn alleen op functies van een reële variabele van toepassing.

Definities.

$l = \lim_{x\uparrow a} f(x)$ (limiet van links) *betekent* $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}: \quad a-\delta < x < a \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-l| < \varepsilon.$

$l = \lim_{x\downarrow a} f(x)$ (limiet van rechts) *betekent* $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}: \quad a < x < a+\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-l| < \varepsilon.$

Rekenregels

Precies als voor rijen in Hoofdstuk 6 hebben we nu weer enige handige stellingen om onze kennis over limieten van simpele gevallen tot ingewikkelde gevallen uit te breiden. We geven hiervan geen bewijzen.

(1) Als $\lim_{x\to a} f(x) = l$ en $\lim_{x\to a} g(x) = m$, dan is $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l + m$.

(2) Als $\lim_{x\to a} f(x) = l$ en $\lim_{x\to a} g(x) = m$, dan is $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = lm$.

(3) Als $\lim_{x\to a} f(x) = l$ en $c \in \mathbb{C}$, dan is $\lim_{x\to a} cf(x) = cl$.

(4) Als $\lim_{x\to a} f(x) = l$ en $\lim_{x\to a} g(x) = m$ en $m \neq 0$, dan is $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$.

(5) Als $f(x) \le g(x) \le h(x)$ voor alle $x \in D$, en $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, dan ook $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$. (Insluitstelling.)

Voorbeeld 8. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\log(1+x^2)$

Oplossing. Uit $\dfrac{x^2}{1+x^2} \le \log(1+x^2) \le x^2$ volgt $\dfrac{1}{1+x^2} \le \dfrac{1}{x^2}\log(1+x^2) \le 1$

Dus (insluitstelling) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\log(1+x^2) \;=\; 1$

Voorbeeld 9. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} x\log x$

Oplossing. $\log x = 2\log\sqrt{x}$. Eigenschap (2) van de natuurlijke logaritme (Hoofdstuk 3) levert nu

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \;\le\; x\log x \;\le\; 2x(\sqrt{x}-1)\,,$$

dus (insluitstelling) $\lim\limits_{x\to 0} x\log x = 0$

Voorbeeld 10. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

Oplossing. $\lim\limits_{x\to 0} x^x \;=\; \lim\limits_{x\to 0} e^{x\log x} \;=\; e^0 \;=\; 1$

Voorbeeld 11. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{\sqrt[5]{n}}$

Oplossing. $\lim\limits_{x\to 0} x\log x = 0$, dus (vul $x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$ in) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\log\sqrt[5]{n} = 0$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{\sqrt[5]{n}} = 0$

(We hebben nu standaardlimiet (f) uit Hoofdstuk 6 bewezen met $c = \frac{1}{5}$.)

Voorbeeld 12. Laat zien dat $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ niet bestaat.

Bewijs. Stel $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x} \;=\; p\,.$

$$\text{Dan}\ \left\{\begin{array}{lllll} (\text{vul } x = \dfrac{1}{n\pi} \text{ in}) & \lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi = p\,, & \text{dus } \lim\limits_{n\to\infty} 0 = p\,, & \text{dus } p = 0 \\ (\text{vul } x = \dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \text{ in}) & \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi = p\,, & \text{dus } \lim\limits_{n\to\infty} 1 = p\,, & \text{dus } p = 1 \end{array}\right\}\ \text{paniek!}$$

Voorbeeld 13. Bepaal $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x$.

Oplossing. De uitkomst is $\frac{\pi}{2}$. Bewijs uit de definitie: Stel $\varepsilon > 0$. Kies $A = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$.

Als $x > A$, dan $\operatorname{arctg} x \;>\; \operatorname{arctg} A \;=\; \dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$ en dus $\operatorname{arctg} x \in \left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Continuïteit

Een fysicus wil met grote nauwkeurigheid de diamagnetische polariteit y weten van een stukje kristal in zijn laboratorium, maar daar heeft hij geen directe toegang toe. Wel kan hij een meetopstelling bouwen waarmee de diëlektrische elasticiteitsmodulus x kan worden bepaald, inderdaad met een grote nauwkeurigheid die hij praktisch zelf kan kiezen. Nu heeft hij een formule geleerd:

$$y = f(x).$$

Wij stellen ons hier de vraag: zal hij slagen?
Dit wil zeggen: kan hij, welke waarde x ook heeft, de grootheid y binnen de gewenste foutenmarge bepalen, hoe klein hij deze ook kiest?
Het antwoordt luidt: ja, mits f **continu** is.

Dit illustreert het belang van continue functies voor de fysica.

Het antwoord is niet zo diepzinnig als het lijkt. Het is eigenlijk een tautologie: we *noemen* f een continue functie precies dan als onze fysicus zeker in zijn opzet slaagt:
De functie f heet *continu* in het punt x als voor elke **gewenste** nauwkeurigheid $\varepsilon > 0$ een **vereiste** nauwkeurigheid $\delta > 0$ te bepalen is, zó dat een meting van x met nauwkeurigheid δ — zeg met meetuitslag ξ — een berekende waarde $f(\xi)$ van de grootheid $y := f(x)$ met nauwkeurigheid ε oplevert.
Nog eens heel precies:

Definitie. Een functie $f : D \to \mathbb{C}$ heet *continu in* $x \in D$ als

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{\xi\in D} : |\xi - x| < \delta \Longrightarrow |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon.$$

Korter: f heet *continu in* $x \in D$ als

$$\boxed{\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).} \tag{27}$$

Een functie $f : D \to \mathbb{C}$ heet *continu* zonder meer als hij continu is in elk punt van D.

We zien dat het begrip 'continu' nauw verband houdt met het begrip 'limiet'. Omdat we al zoveel over limieten weten, kunnen we nu meteen een paar dingen over continue functies concluderen:

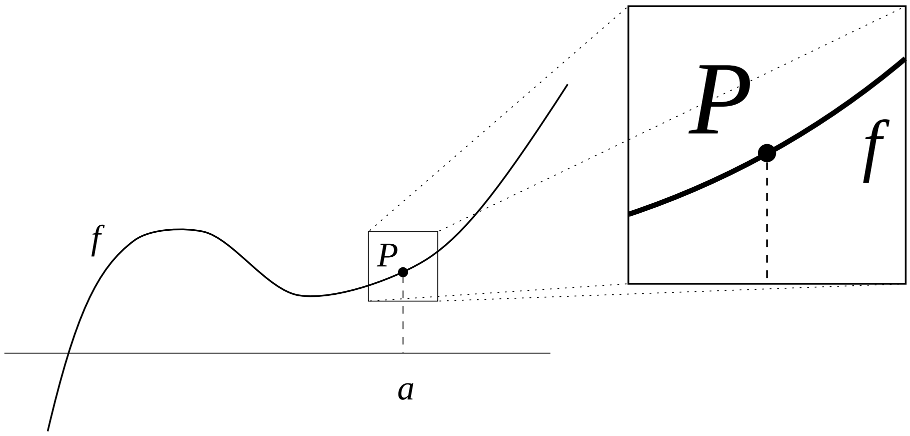
Eigenschappen van continue functies. *Als f en g continue functies $D \to \mathbb{C}$ zijn, dan zijn ook cf, $f + g$ en $f \cdot g$ continu. Als bovendien g nergens de waarde 0 aanneemt, is ook f/g continu.*

We bestuderen in dit vak (bijna) uitsluitend continue functies. Alle veeltermfuncties zijn continu, net als de functies exp, log, sin , cos , tg (op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), cosh , sinh, arcsin, arccos, ...

Differentiatie

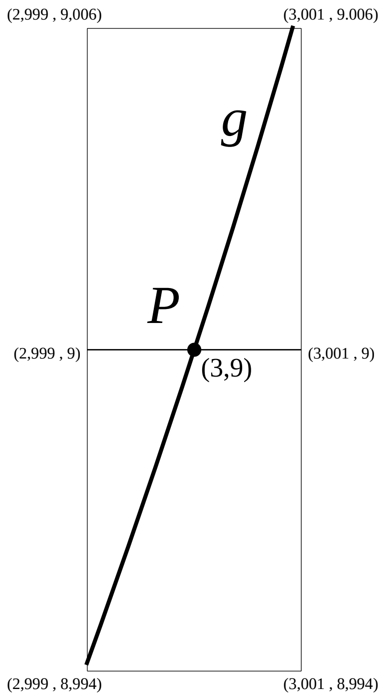
Lineaire benaderingen en raaklijnen.

Zij f een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We pakken een punt $P = (a, f(a))$ op de grafiek van f, en we gaan de grafiek eens uitvergroten in een omgeving van het punt P. Bij sommige functies gaat de grafiek bij sterkere vergroting steeds meer op een rechte lijn lijken.



f is dan lokaal goed te benaderen met een lineaire functie. In zo'n geval heet f *glad* of *differentieerbaar* in a. De richtingscoëfficiënt van de lijn wordt de *afgeleide* $f'(a)$ van f in het punt a genoemd.

Voorbeeld 14. Het punt $P = (3, 9)$ op de grafiek van $g : x \mapsto x^2$.



Vlakbij het punt P gedraagt g zich als volgt:

$$g(3 + \varepsilon) = (3 + \varepsilon)^2 = 9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Als we g nu eens beperken tot het domeintje $D = (2,999\ ,\ 3,001)$ (onze "loupe"), dan wordt zijn grafiek de verzameling

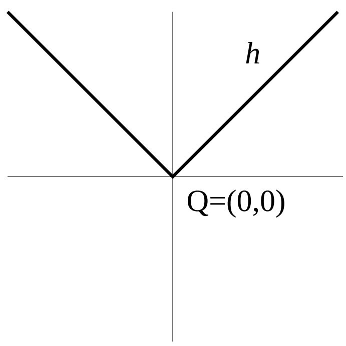
$$\{\ \ (3 + \varepsilon, 9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2)\ \mid\ |\varepsilon| < 0,001\ \ \}.$$

Omdat nu $\varepsilon^2 < 0,000.001$, is deze grafiek (ondanks de vergroting!) haast niet meer te onderscheiden van het lijnstukje

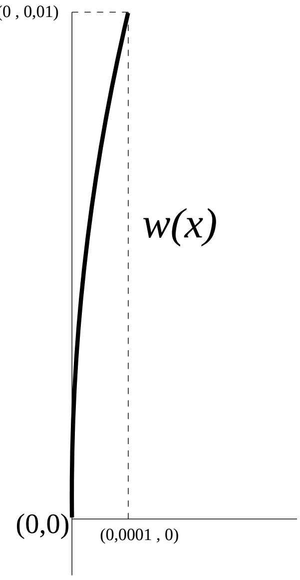
$$\{(3 + \varepsilon, 9 + 6\varepsilon)\ \mid\ |\varepsilon| < 0,001\}.$$

Dit lijnstukje heeft richtingscoëfficiënt 6. We zeggen daarom dat $f'(3) = 6$.

Voorbeeld 15. Het punt $Q = (0, 0)$ op de grafiek van $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$. Bij *elke* uitvergroting rond Q ziet de grafiek van h er zo uit als in het plaatje. Er is dus geen sprake van dat hij steeds meer op een rechte lijn zou gaan lijken. De functie h is *niet differentieerbaar* in 0.

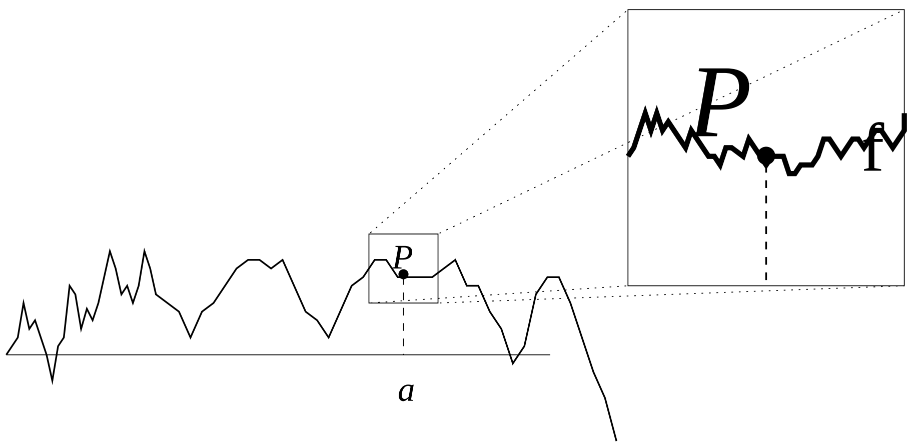


Voorbeeld 16. Het punt $Q = (0,0)$ op de grafiek van $w : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$. Op het domein $D = [0, 10^{-4})$ ziet w er uit als in het plaatje. De grafiek gaat dus wel steeds meer op een lijn lijken, maar deze lijn staat verticaal, en is dus niet de grafiek van een lineaire functie. In zo'n geval noemen we w toch maar *niet* differentieerbaar in 0 (al zou er wat voor te zeggen zijn, te definiëren: $w'(0) = \infty$).



Voorbeeld 17. In de kanstheorie bestudeert men bepaalde toevalsfuncties $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, die 'brownse beweging' worden genoemd, omdat zij oorspronkelijk zijn bedoeld als wiskundig model voor de — door de botanicus Brown als eerste beschreven — chaotische thermische beweging van kleine stofdeeltjes in een vloeistof. Zo'n toevalsfunctie is wel continu, maar zijn grafiek ziet er grillig uit, en blijft grillig hoe men hem ook uitvergroot. Hij gaat dus *niet* steeds meer op een lijn lijken.

De brownse beweging is overal continu, maar nergens differentieerbaar.



Definitie van 'afgeleide'

We willen nu precies vastleggen wat we bedoelen met 'op een rechte lijn lijken' in de buurt van een vast punt $x \in \mathbb{R}$. Een eindje Δx van x af neemt f de volgende waarde aan:

$$f(x + \Delta x).$$

Deze waarde willen we vergelijken met die van een **lineaire** functie van Δx die voor $\Delta x = 0$ de waarde $f(x)$ aanneemt. De enige mogelijkheid is

$$f(x) + r \cdot \Delta x,$$

voor een of ander reëel getal r, de richtingscoëfficiënt. Van het verschil tussen f en de lineaire functie

$$\eta(\Delta x) := f(x + \Delta x) - \big(f(x) + r \cdot \Delta x\big) \tag{28}$$

willen we graag dat het in de buurt van x klein blijft, en wel **ten opzichte van Δx.**
We noemen daarom een functie $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *verwaarloosbaar* als

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\eta(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; 0. \tag{29}$$

Definitie 1. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet *differentieerbaar* in $x \in \mathbb{R}$ als er een reëel getal r en een verwaarloosbare functie $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaan zó dat

$$\boxed{f(x + \Delta x) = f(x) + r\Delta x + \eta(\Delta x).} \tag{30}$$

We noemen het getal r de *afgeleide* van f in x, en duiden het aan met $f'(x)$.

Als we (28) delen door Δx, en dan (29) toepassen, dan komt er

$$\boxed{r = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.} \tag{31}$$

Dit leidt tot de meer vertrouwde, equivalente definitie:

Definitie 2. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet *differentieerbaar* in $x \in \mathbb{R}$ als de limiet in (31) bestaat. We noemen de limiet de *afgeleide* van f in x, en schrijven haar als $f'(x)$.

Tot slot geven we nog even de definities van de linker- en rechterafgeleide van een functie.

Definitie. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet *links-differentieerbaar* in $x \in \mathbb{R}$ als de volgende limiet bestaat:

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

In dat geval heet de limiet de *linkerafgeleide* $f_l'(x)$ van f in x. De begrippen rechts-differentieerbaar en rechterafgeleide f_r' zijn net zo gedefinieerd.

Regels voor het differentiëren.

(1) $(cf)' = cf'$ en $(f + g)' = f' + g'$.
(lineariteit van de differentiatie).

(2) $(fg)' = f \cdot g' + f' \cdot g$.
(productregel of regel van Leibniz.)

(3) $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.
(kettingregel.)

(4) $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
(differentiatieregel voor de inverse)

(5) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
(quotiëntregel)

Standaard-afgeleiden.

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x \qquad \arcsin'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = \tfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \sinh'(x) = \cosh x \qquad \cosh'(x) = \sinh x$$

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}x^c = cx^{c-1} \qquad \frac{d}{dx}c = 0$$

Enkele bewijzen

Bewijs. (2)(de regel van LEIBNIZ)
Er zijn twee verwaarloosbare functies η en $\vartheta : D \to \mathbb{C}$ zó dat (voor $x + \Delta x \in D$):

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + \eta(\Delta x); \\ g(x+\Delta x) &= g(x) + g'(x)\Delta x + \vartheta(\Delta x). \end{aligned}$$

Dus geldt:

$$\begin{aligned} (f\cdot g)(x+\Delta x) &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) \\ &= \big(f(x) + f'(x)\Delta x + \eta(\Delta x)\big)\big(g(x) + g'(x)\Delta x + \vartheta(\Delta x)\big) \\ &= f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\Delta x \\ &\quad + \Big[f(x)\vartheta(\Delta x) + g(x)\eta(\Delta x) + f'(x)\Delta x\vartheta(\Delta x) \\ &\qquad + g'(x)\Delta x\eta(\Delta x) + f'(x)g'(x)(\Delta x)^2 + \eta(\Delta x)\vartheta(\Delta x)\Big]. \end{aligned}$$

De termen tussen vierkante haken vormen een verwaarloosbare functie. Hieruit volgt de regel van LEIBNIZ. □

Bewijs. (4) Pas de kettingregel toe op de gelijkheid $f \circ f^{-1}(x) = x$. □

Bewijs. (5) Pas Leibniz toe op de gelijkheid $\left(\dfrac{f}{g}\right) \cdot g = f$. □

De standaard-afgeleiden kunnen allemaal met behulp van de rekenregels worden afgeleid.

Voorbeeld 18. Bepaal de afgeleide van x^x .

Oplossing. $x^x = e^{x\log x} = (g \circ f)(x)$ waarbij $g(x) = e^x$ en $f(x) = x\log x$. Volgens de productregel is $f'(x) = 1 + \log x$, dus volgens de kettingregel is $\dfrac{d}{dx}x^x = (g\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) = e^{f(x)}\cdot(1+\log x) = x^x(1+\log x)$.

Voorbeeld 19. Bepaal de tweede afgeleide van $f(x) = 7^x$ in het punt 1.

Oplossing. $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\big(e^{x\log 7}\big) = e^{x\log 7}\cdot\log 7 = 7^x\cdot\log 7$, dus $f''(x) = \dfrac{d}{dx}(7^x\cdot\log 7) = 7^x\cdot(\log 7)^2$, dus $f''(1) = 7\cdot(\log 7)^2$.

Voorbeeld 20. Bereken $\big(f^{-1}\big)'(3)$ als $f(x) = x^3 + x + 5$.

Oplossing. $f'(x) = 3x^2 + 1$, dus $f'(-1) = 4$, dus $\big(f^{-1}\big)'(3) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(3)\big)} = \dfrac{1}{f'(-1)} = \dfrac{1}{4}$.

Voorbeeld 21. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}$

Oplossing. $\operatorname{arctg}'(0) \;=\; \dfrac{1}{1+0^2} \;=\; 1$, dus $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(0+\Delta x) - \operatorname{arctg} 0}{\Delta x} \;=\; 1$

dus $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} \Delta x}{\Delta x} \;=\; 1$, dus (vul $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ in) $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n} \;=\; 1.$

Voorbeeld 22. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$.

Oplossing. Zij $f(x) = \sqrt{1+x}$.

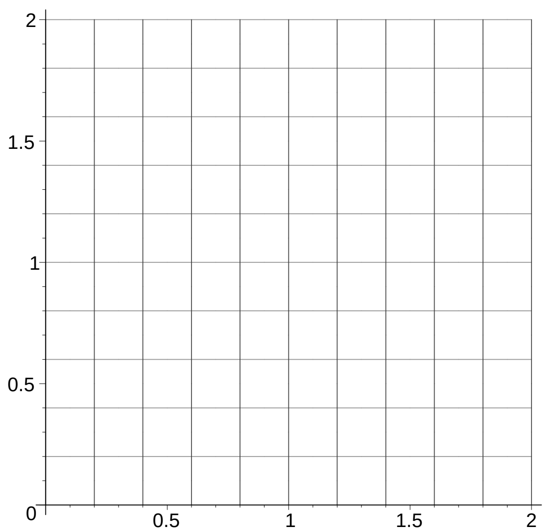
Dan $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, dus $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, dus $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$, dus $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

Dus $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} \;=\; \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right) \;=\; \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right) \;= \sin'(0)\cdot 2 = \;2.$

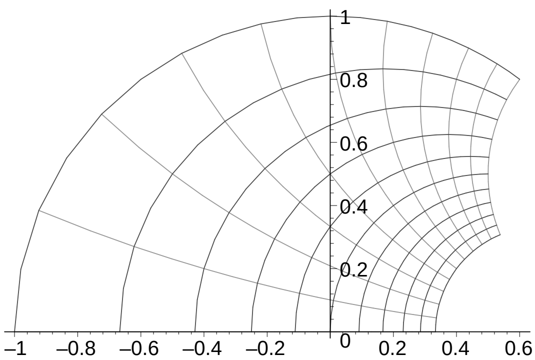
Analytische functies

Voor een functie $D \to \mathbb{C}$, waarbij D een gebied is in het complexe vlak, is Definitie 1 van differentieerbaarheid en afgeleide net zo goed bruikbaar als voor een functie van een reële variabele. Ook de regel van Leibniz, de kettingregel en de overige regels voor differentiatie veranderen niet.
Toch is het differentieerbaar zijn van een functie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een veel sterkere eigenschap dan voor een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Een differentieerbare functie $D \to \mathbb{C}$, waarbij D een 'echt' gebied in $\mathbb{C}$ is, zoals een schijf of een rechthoek, wordt *analytisch* genoemd. We zullen het verschil hieronder uiteen zetten.

De grafiek van een complexe functie is een deelverzameling van $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Meetkundig gesproken is hij een oppervlak in een vierdimensionale ruimte. We kunnen ons zulke grafieken niet goed voorstellen. Om toch een beeld van een complexe functie te vormen, kun je bijvoorbeeld denken aan een vervorming van het vlak, een afbeelding van het vlak naar het vlak.
Is zo'n afbeelding $f : D \to \mathbb{C}$ differentieerbaar in z met $f'(z) \neq 0$, dan is f in z *lokaal* een complexe vermenigvuldiging met een factor $f'(z)$: voor kleine $|\Delta z|$ (dus voor $z + \Delta z$ in een klein cirkelschijfje rond z) is $f(z+\Delta z) - f(z)$ bij benadering gelijk aan $f'(z)\Delta z$.



z



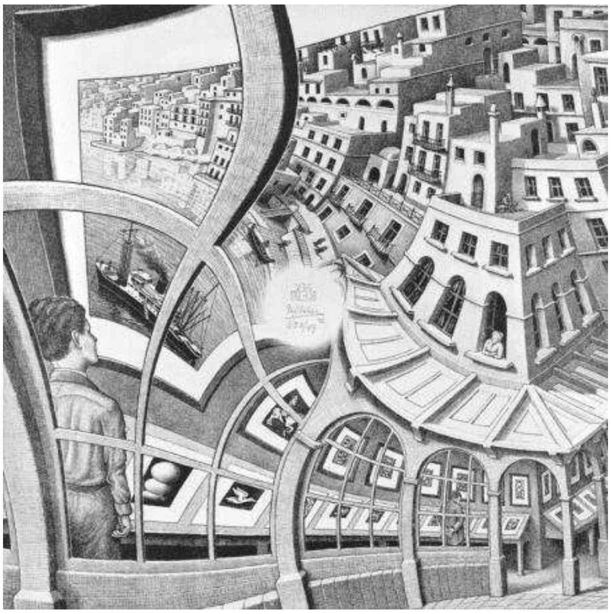
$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

Dus het lijstukje van z naar $z + \Delta z$ wordt door f, volgens de wet van argument en absolute waarde, over een hoek $\arg f'(z)$ gedraaid en $|f'(z)|$ keer zo groot gemaakt. In het bijzonder worden de *hoeken* ertussen niet veranderd, en worden kleine figuurtjes afgebeeld op gelijkvormige kleine figuurtjes. Een afbeelding met deze eigenschappen wordt *conform* genoemd (lokaal vormbewarend).

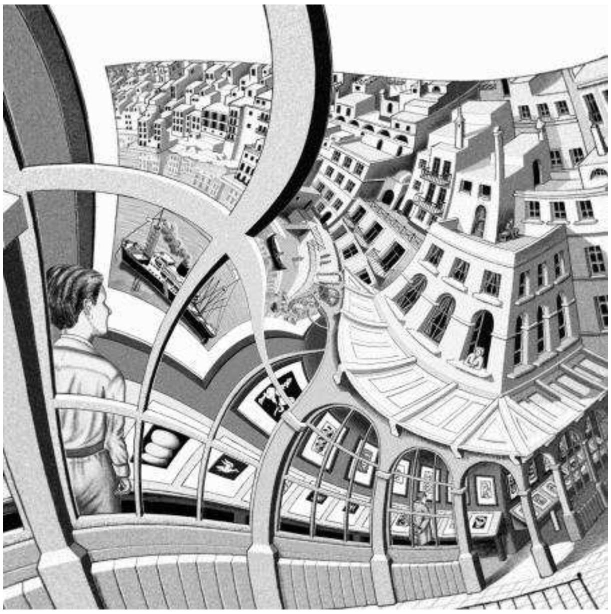
Voor een complexe functie is het dus veel ongewoner dat hij differentieerbaar is dan voor een functie op $\mathbb{R}$: hij moet daarvoor niet alleen voldoende glad zijn, maar ook nog conform.

Opgaafje 71. Ga na dat de complexe functie exp inderdaad conform is.

Een mooi voorbeeld van een conforme afbeelding uit de beeldende kunst is de litho 'Prentententoonstelling' van M.C. Escher uit 1956. Met behulp van de complexe exponentiële functie heeft prof. H. Lenstra het gat in het midden van de litho zinvol weten op te vullen [Len].



Escher: 'Prentententoonstelling', 1956.



Lenstra: Een conforme afbeelding gecompleteerd.

Opgaven bij Hoofdstuk 7

Opgave 72. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log(1+x)$

Opgave 73. Bereken $\lim_{x\to 0} \sqrt[5]{x} \log x$

Opgave 74. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ en $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Opgave 75. Bereken $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{73}-x^{73}}{h}$

Opgave 76. Bewijs dat $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \;=\; 0$

Opgave 77. Bewijs dat $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ niet bestaat

Opgave 78. Ga na of $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sqrt{\sin(x^2)}$ bestaat

Opgave 79. Verzin geschikte definities voor $\lim_{x\uparrow a} f(x) = \infty$ en $\lim_{x\to -\infty} f(x) = p$

Opgave 80. Bewijs rechtstreeks uit de definitie dat $\lim_{x\to\infty} \log(\log x) = \infty$

Opgave 81. Bereken $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} x$ en $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \sqrt[n]{n}$

Opgave 82. Verzin een functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die niet continu is in 5

Opgave 83. We definiëren $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

Is f continu?

Opgave 84. We definiëren $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\ \sin\frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

Is f continu?

Opgave 85. Verzin een functie die wel continu maar niet differentiëerbaar is

Opgave 86. Verzin een differentiëerbare functie die niet tweemaal differentiëerbaar is

Opgave 87. Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefiniëerd door $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{als } x \leq 1 \\ 2\sqrt{x} & \text{als } x > 1 \end{cases}$

a) Is f continu in 1?
b) Is f differentiëerbaar in 1?
c) Bereken $f'(1)$ (indien deze bestaat)
d) Bereken $f''(1)$ (indien deze bestaat)

Opgave 88. Zij $f(x) = \sqrt{1+x}$. Bereken $f'(0)$ en $f^{(5)}(0)$

Opgave 89. Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefiniëerd door $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 7x}$. Bereken $f'(3)$ en $\left(f^{-1}\right)'(2)$

Opgave 90. Zij $f(x) = 5^{\left(x^3\right)}$. Bereken f' en $\left(f^{-1}\right)'$

Opgave 91. Bereken de afgeleide van $\log|x|$ (definitiegebied: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$).

Opgave 92. Bereken $\dfrac{d}{dx}\sqrt[5]{1+x}$, en bereken met behulp hiervan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Opgave 93. Bereken $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^x - 25}{3^x - 25}$ en $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^x - 27}{3^x - 27}$.

Opgave 94. Bereken $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+x^2\right)}{1-\cos x}$.

Opgave 95. Bereken $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\right)$ en $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\log n}\left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\right)$.

Opgave 96. Bereken $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n\right)$.

8 Maxima en minima

Vaak is men erin geïnteresseerd te weten welke de grootste of de kleinste waarde is die een gegeven functie aanneemt. Soms is zo'n waarde er niet. Bijvoorbeeld de functie $x \mapsto 1/x$ heeft op het interval $(0, 3]$ geen grootste waarde; wel een kleinste. We beginnen daarom met een stelling die onder zekere voorwaarden het bestaan van zo'n maximum of minimum garandeert.

Een gebied (in $\mathbb{R}$ of in $\mathbb{C}$) heet *gesloten* als het zijn eigen rand bevat. Intervallen als $[a, b]$ en $[a, \infty)$ zijn gesloten gebieden in $\mathbb{R}$.
Punten van een gebied die niet op de rand liggen worden *inwendige punten* genoemd.
Een gebied D heet *begrensd* als er een $A > 0$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ geldt: $|x| \leq A$.

Stelling 20(WEIERSTRASS) *Een continue functie neemt op een niet-leeg, gesloten en begrensd gebied altijd een maximum en een minimum aan.*

We bewijzen deze stelling hier niet, maar verwijzen naar het Analysecollege en de literatuur (bijvoorbeeld [Fri], Stelling 3.6.2).
Weten we eenmaal dat het gezochte maximum of minimum bestaat, dan kunnen we het soms ook vinden, en wel op de volgende manier.

Voorschrift. *Stel je hebt een continue functie $f : D \to \mathbb{R}$. Maak een lijst waar de volgende punten op staan:*

1. *de randpunten van D (als $D = [a, b]$, dan zijn dit de punten a en b);*
2. *de punten waar f niet differentieerbaar is;*
3. *de nulpunten van f'.*

Dan is de grootste (kleinste) waarde die f aanneemt op de punten in de lijst tevens de grootste (kleinste) waarde van f op het hele gebied D.

Bewijs. Volgens de stelling van WEIERSTRASS bestaat er een punt $u \in D$ waarin f zijn maximale waarde aanneemt. We willen aantonen dat u op onze lijst voorkomt. Als u een randpunt is, of als f niet differentieerbaar is in u, dan zijn we klaar, want zulke punten hebben we op de lijst gezet. Als u geen randpunt van D is, dan is er een interval $(u - \delta, u + \delta)$ dat helemaal in D ligt, en als f wèl differentieerbaar is in u, dan geldt:

$$\lim_{x \downarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = f'(u) = \lim_{x \uparrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \ .$$

Omdat $f(u) \geq f(x)$ voor alle x, staat er links een limiet van getallen in $(-\infty, 0]$ en rechts een limiet van getallen in $[0, \infty)$. Deze limieten kunnen alleen gelijk zijn als ze beide 0 zijn. Dus $f'(u) = 0$ en u staat inderdaad op de lijst vanwege punt 3. Voor de minimale waarde loopt het bewijs net zo.

□

Voorbeeld 23. In welke $x \in [-1,1]$ heeft $f(x) = (\arcsin x) - \frac{3}{2}x$ een maximum?

Oplossing. We onderzoeken hiervoor:

(1) de randpunten van $[-1,1]$. Dit zijn -1 en 1.
Functiewaarden: $f(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \approx 0,0708$ en $f(-1) = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \approx -0,0708$.

(2) de punten waarin f niet differentiëerbaar is. Dit zijn ook weer -1 en 1.

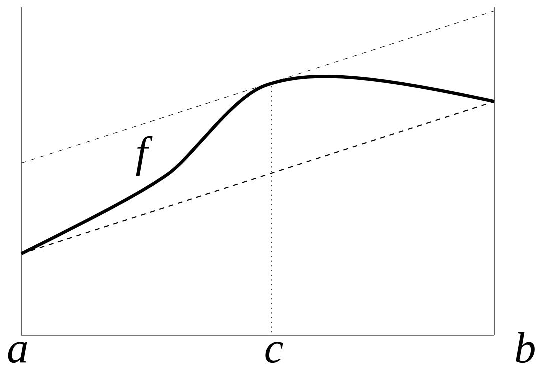
(3) de nulpunten van f'. Dit zijn $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ en $-\frac{1}{3}\sqrt{5}$.
Functiewaarden: $f(\frac{1}{3}\sqrt{5}) \approx -0{,}277$ en $f(-\frac{1}{3}\sqrt{5}) \approx 0{,}277$.

We vinden een maximum in $-\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

De middelwaardestelling

Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Dan is er een $c \in (a,b)$ waarvoor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Bewijs. Noem het quotiënt $(f(b) - f(a))/(b - a)$ eens even: r. Zij $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) := f(x) - f(a) - r(x - a).$$

Dan is $g(a) = g(b) = 0$. Volgens Weierstrass neemt g ergens een maximum M en ergens een minimum m aan. Als $M = m$, dan is $g = 0$, dus $f(x) = f(a) + r(x - a)$ en $f'(x) = r$ voor *alle* x.

Als $m < M$, dan is één van de twee ongelijk aan 0, en wordt dus aangenomen in een inwendig punt c van het interval. Maar dan moet $g'(c) = 0$, zoals we gezien hebben bij het voorschrift. Dus is $f'(c) = \frac{d}{dx}(f(a) + r(x - a))\big|_{x=c} = r$.

$\square$

Voorbeeld 24. Bereken zonder rekenmachine $\operatorname{arctg} 16 - \operatorname{arctg} 15$ in drie decimalen nauwkeurig.

Oplossing. De middelwaardestelling zegt: er bestaat een getal $c \in (15,16)$ met $\dfrac{\operatorname{arctg} 16 - \operatorname{arctg} 15}{16 - 15} = \operatorname{arctg}'(c) = \dfrac{1}{1 + c^2}$.

Dus $\dfrac{1}{1+16^2} \leq \operatorname{arctg} 16 - \operatorname{arctg} 15 \leq \dfrac{1}{1+15^2}$, en dus $\operatorname{arctg} 16 - \operatorname{arctg} 15 \approx 0,004$ in drie decimalen.

Voorbeeld 25. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}\right)$

Oplossing.

Pas de middelwaardestelling toe op de functie $f : \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \to \mathbf{R}$, gedefiniëerd door $f(x) = 3^x$.

Conclusie: er bestaat een getal c tussen $\dfrac{1}{n+1}$ en $\dfrac{1}{n}$ waarvoor geldt:

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = f'(c) \quad \text{, dus} \quad \frac{3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = 3^c \log 3 \text{, dus } \sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3} = \frac{3^c \log 3}{n(n+1)} .$$

Dus $\dfrac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{3} \log 3 \leq n^2\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}\right) \leq \dfrac{n}{n+1} \sqrt[n]{3} \log 3.$

Toepassing van de insluitstelling levert nu: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}\right) = \log 3.$

Stijgen en dalen

Met behulp van de middelwaardestelling kunnen we de beweringen over stijgende en dalende functies uit Hoofdstuk 3 netjes bewijzen. Bijvoorbeeld:

Stellinkje 21. *Als een functie f op een interval $[a, b]$ afgeleide 0 heeft, dan is hij constant.*

Bewijs. Voor elke $p \in (a, b]$ is er een $c_p \in (a, p)$ zó dat

$$f(p) = f(a) + (p - a)f'(c_p) = f(a) .$$

□

Opgaafje 97. Bewijs de bewering uit Hoofdstuk 3 dat voor elke differentieerbare f op $[a, b]$ geldt:

$$f'(x) > 0 \quad \text{voor alle } x \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ is strikt stijgend ,}$$

en geef een tegenvoorbeeld voor het omgekeerde.

Voorbeeld 26. Voor welke $x \in (-1, 1)$ geldt: $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$?

Oplossing. Definiëer $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$ door $f(x) = \arcsin x - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Dan is $f'(x) = 0$ (reken dit zelf even na), en dus is f volgens bovenstaande stelling een constante functie. Uit $f(0) = 0$ volgt nu dat f de nulfunctie is, en dus $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ voor alle $x \in (-1, 1)$.

Stelling van de l'Hôpital

Als f en g continue reële functies zijn op een interval $[a, b]$, overal differentiëerbaar behalve eventueel in a, als g' nergens 0 is, en als $f(a) = g(a) = 0$, dan geldt:

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(als deze laatste limiet bestaat).}$$

Bewijs. Voor elk punt p in het interval $(a,b]$ definiëren we een functie

$$h_p : [a,p] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(p)g(x) - g(p)f(x) \ .$$

Omdat $h_p(a) = h_p(p) = 0$, bestaat er volgens de middelwaardestelling een getal $c_p \in (a,p)$ zó dat

$$f(p)g'(c_p) - g(p)f'(c_p) = 0 \ .$$

We hebben aangenomen dat $g'(c_p) \neq 0$. Op grond van de middelwaardestelling voor g op $[a,p]$ kunnen we bovendien zeggen dat $g(p) \neq 0$. Dus is

$$\frac{f(p)}{g(p)} = \frac{f'(c_p)}{g'(c_p)} \ .$$

Nu zijn we klaar voor het bewijs. We veronderstellen dat $\lim\limits_{x\downarrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, en proberen te bewijzen dat ook $\lim\limits_{x\downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$. Geef maar een $\varepsilon > 0$. Wij kiezen $\delta > 0$ zó dat

$$a < x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon \ .$$

Dan is ook

$$a < p < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f(p)}{g(p)} - l \right| = \left| \frac{f'(c_p)}{g'(c_p)} - l \right| < \varepsilon$$

omdat $a < c_p < p < a + \delta$.

$\square$

Voorbeeld 27. Bereken $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$

Oplossing. Pas de stelling van de l'Hôpital toe met $a = 1$, $f = \arccos$ en $g(x) = \sqrt{1-x}$:

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \quad = \quad \lim_{x\uparrow 1} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} \quad = \quad \lim_{x\uparrow 1} \frac{2}{\sqrt{1+x}} \quad = \quad \sqrt{2} \ .$$

Opgaven bij Hoofdstuk 8

Opgave 98. Bepaal de grootste waarde van de functie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ met $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Opgave 99. Zij $a > 0$ en $f : (-a, a) \to \mathbb{R} : x \mapsto xe^{-x^2}$. Voor welke waarden van a neemt f ergens op zijn domein zijn maximum aan?

Opgave 100. Wat is de minimale oppervlakte van een blikje waarvan de inhoud 330 cm^3 is?

Opgave 101. Welk punt van de ellips $y^2 = 3 - 2x^2$ ligt het dichtst bij $(1, 0)$?

Opgave 102. Laat zien dat $\sin x < x$ voor alle $x > 0$.

Aanwijzing: Het is voldoende om dit aan te tonen voor alle $x \in (0, 1]$. (Waarom?)

Opgave 103. Gebruik het resultaat van opgave 102 om aan te tonen dat voor alle $x > 0$ geldt: $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$. Hoe zit het met $x < 0$?

Opgave 104. Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is en n nulpunten heeft, dan heeft f' minstens $n - 1$ nulpunten. Toon dit aan.

Opgave 105. Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tweemaal differentieerbaar is en drie nulpunten heeft, dan moet f een buigpunt hebben. Toon dit aan. (Een buigpunt van f is een nulpunt van f''.)

Opgave 106. Zij $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tweemaal differentieerbaar, en laat $f(0) = f(1) = 0$; $f(2) = 1$.

(a) Laat zien dat $f'(a) \geq \frac{1}{2}$ voor zekere $a \in [0, 2]$.

(b) Laat zien dat, als bovendien $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [0, 2]$, er een punt $a \in [0, 2]$ moet zijn waar $f'(a) > 1$.

Opgave 107. Bereken $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x^2 - 1}$.

Opgave 108. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\log(1 + x^2)}$.

Opgave 109. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Opgave 110. Bereken $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x^2 - 1}$.

Opgave 111. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$.

9 De Taylor-reeks

De driehoek van Pascal

Onder $k!$ (spreek uit: 'k-faculteit') verstaan we: $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dus $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ en $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Verder definiëren we nog: $0! := 1$.

De *binomiaalcoëfficiënten* $\binom{n}{k}$ met $n, k \in \mathbb{N}$ zijn als volgt gedefinieerd:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}. \tag{32}$$

Als $k \leq n$ komt deze definitie neer op: $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Als $k > n$ staat er 0.

Bewering 22. *Voor alle $n, k \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bewijs.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1}.$$

En omdat

$$1 + \frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1},$$

komt er

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

We bekijken nu de deelverzameling van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, bestaande uit alle paren (n, k) waarvoor $k \leq n$. Deze verzameling van roosterpunten tekenen we zó, dat het punt $(0, 0)$ de top wordt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & (0,0) & & & & & & \\
 & & & & & (1,0) & & (1,1) & & & & & \\
 & & & & (2,0) & & (2,1) & & (2,2) & & & & \\
 & & & (3,0) & & (3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & & \\
 & & (4,0) & & (4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & & \\
 & (5,0) & & (5,1) & & (5,2) & & (5,3) & & (5,4) & & (5,5) & \\
(6,0) & & (6,1) & & (6,2) & & (6,3) & & (6,4) & & (6,5) & & (6,6) \\
. & . & & . & & . & & . & & . & & . & .
\end{array}$$

We gaan nu ieder van deze roosterpunten voorzien van een getal:

Blaise Pascal (1623–1662)

Eerste Driehoek van Pascal. Zet aan de rand eentjes, en vul de rest in door 'schuin optellen'. Anders gezegd: Voorzie de roosterpunten $(n, 0)$ en (n, n) van het getal 1, en schrijf dan, voor toenemende n en voor alle k met $k \leq n$, bij het roosterpunt $(n+1, k+1)$ de som van de getallen die je bij de roosterpunten (n, k) en $(n, k+1)$ hebt geschreven. De Eerste Driehoek van Pascal (1e $\triangle$vP) is dus het volgende schema van getallen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & & & & & & & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & & & & & & &
\end{array}$$

Tweede Driehoek van Pascal. Zet op plaats (n, k) het getal $\binom{n}{k}$.

Omdat $0! = 1$, staan ook in de 2e $\triangle$vP aan de rand allemaal eentjes. Uit Bewering 22 volgt dat ook in de 2e $\triangle$vP het principe van 'schuin optellen' geldt: ieder inwendig getal is de som van de schuin erboven staande getallen. Conclusie: de 2e $\triangle$vP is precies gelijk aan de 1e $\triangle$vP.
(Blijkbaar is $\binom{n}{k}$ altijd een natuurlijk getal, ondanks het feit dat deze binomiaalcoëfficiënt als een breuk is gedefinieerd.)

Derde Driehoek van Pascal. Zet op plaats (n, k) het aantal kortste wegen via roosterpunten van $(0, 0)$ naar (n, k).

Je kunt nu eenvoudig inzien: $\begin{cases} \text{in de 3e } \triangle\text{vP staan aan de rand allemaal eentjes} \\ \text{in de 3e } \triangle\text{vP geldt ook het principe van 'schuin optellen'} \end{cases}$

Gevolg: de 3e $\triangle$vP is precies gelijk aan de 1e $\triangle$vP.

Vierde Driehoek van Pascal. Zet op plaats (n, k) het aantal k-grepen uit een zak met n verschillende knikkers. (Onder een k-greep uit een verzameling V verstaan we een uit k elementen bestaande deelverzameling van V)

Je kunt nu eenvoudig inzien: $\begin{cases} \text{in de 4e } \triangle\text{vP staan aan de rand allemaal eentjes} \\ \text{in de 4e } \triangle\text{vP geldt ook het principe van 'schuin optellen'} \end{cases}$

Gevolg: de 4e $\triangle$vP is precies gelijk aan de 1e $\triangle$vP.

Vijfde Driehoek van Pascal. Zet op plaats (n, k) de coëfficiënt van x^k in de veelterm $(1 + x)^n$.

Je kunt nu eenvoudig inzien: $\begin{cases} \text{in de 5e } \triangle\text{vP staan aan de rand allemaal eentjes} \\ \text{in de 5e } \triangle\text{vP geldt ook het principe van 'schuin optellen'} \end{cases}$

Gevolg: de 5e $\triangle$vP is precies gelijk aan de 1e $\triangle$vP.

Het binomium van Newton

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Bewijs. Dit is niets anders dan de stelling: 2e $\triangle$vP = 5e $\triangle$vP. $\square$

We kunnen de binomiumformule ook zó schrijven (schrijf $x := h/a$, vermenigvuldig met a^n en schrijf de binomiaalcoëfficiënten uit):

$$(a+h)^n = a^n + na^{n-1} \cdot h + n(n-1)a^{n-2} \cdot \frac{h^2}{2} + n(n-1)(n-2)a^{n-3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots + (n!)a^0 \cdot \frac{h^n}{n!} \; .$$

Als f de functie $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ voorstelt, dan kunnen we het bovenstaande weer lezen als

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + f''(a) \cdot \frac{h^2}{2} + f'''(a) \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(a) \cdot \frac{h^n}{n!} \; . \tag{33}$$

Deze laatste formule is ook waar als $f(z) = z^m$ met $m < n$, omdat hogere afgeleiden dan de m-de toch 0 opleveren. En omdat linker- en rechterlid lineair zijn in f vinden we:

Bewering 23. *De formule (33) is geldig voor elke veeltermfunctie f van graad $\leq n$.*

Formule (33) drukt de waarde van een veeltermfunctie f in een willekeurig punt $x := a + h$ uit in zijn waarde en die van zijn afgeleiden in het punt a. We gaan deze methode nu verder ontwikkelen voor willekeurige functies.

Taylor-veeltermen

Definities. De *n-de orde* Taylor*-benadering van f rond a* is de veeltermfunctie p, gedefiniëerd door

$$p(a+h) \;=\; f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n \; .$$

De lineaire Taylor-benadering wordt de *raaklijn* aan f in a genoemd, en in plaats van 'tweedegraads Taylor-benadering' zegt men soms 'raakparabool'.

Eigenschappen. De n-de graads Taylor-benadering p van f in a voldoet aan

$$\begin{aligned} &p(a) = f(a) \\ &p'(a) = f'(a) \\ &p''(a) = f''(a) \\ &\vdots \\ &p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \\ &\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - p(a+h)}{h^n} = 0 \; . \end{aligned}$$

Brook Taylor (1685–1731)

Deze laatste regel is een consequentie van de nu volgende stelling.

Stelling van Taylor. *Als op het interval* $[a, b]$ *de* $(n+1)^e$ *afgeleide van* f *in absolute waarde nergens groter is dan een bepaalde constante* M_{n+1}*, dan geldt voor* $h \in [0, b-a]$*:*

$$|f(a+h) - p(a+h)| \le \frac{M_{n+1}|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Bewijs. Noem M_{n+1} even: M. Uit de middelwaardestelling volgt dat voor differentieerbare functies F, G, H: $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ geldt: als $F(0) = G(0) = H(0) = 0$, en $F'(h) \le G'(h) \le H'(h)$ voor alle $h \ge 0$, dan is ook $F(h) \le G(h) \le H(h)$ voor $h \ge 0$. Met dit idee toon je aan dat

$$-Mh \le f^{(n)}(a+h) - p^{(n)}(a+h) \le Mh\ .$$

(Ga na dat aan de voorwaarden is voldaan omdat $p^{(n+1)} = 0$, $p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ en $|f^{(n+1)}(a+h)| \le M$.) Herhaling van het trucje leidt tot

$$-\tfrac{1}{2}Mh^2 \le f^{(n-1)}(a+h) - p^{(n-1)}(a+h) \le \tfrac{1}{2}Mh^2\ .$$

Na $n+1$ stappen staat er

$$-\frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!} \le f(a+h) - p(a+h) \le \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}\ , \qquad (h \ge 0)\ .$$

Het geval $h \le 0$ gaat net zo.

□

Voorbeeld 28. Bepaal de raaklijn aan de grafiek van $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ in $x = 1$

Oplossing. $l(x) \ = \ \operatorname{arctg} 1 \ + \ \operatorname{arctg}'(1) \cdot (x-1) \ = \ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2}$

Voorbeeld 29. Bepaal een formule en eigenschappen voor de raakparabool p aan f in a

Oplossing. $p(x) \ = \ f(a) \ + \ f'(a) \cdot (x-a) \ + \ \dfrac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2$, met de eigenschappen:

(1)	$p(a) = f(a)$	(in a hebben l en p dezelfde waarde)
(2)	$p'(a) = f'(a)$	(in a hebben p en f dezelfde richting)
(3)	$p''(a) = f''(a)$	(in a hebben p en f dezelfde kromming)
(4)	$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^2} = 0$	(voor $x \approx a$ is $f(x) - p(x)$ verwaarloosbaar ten opzichte van $(x-a)^2$)

Voorbeeld 30. Bepaal de raakparabool p aan $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in 1, en bereken met behulp hiervan de limiet

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^6 + n^5} - n^2 - \frac{n}{3} \right)\ .$$

Oplossing.

$$p(1+h) \ = \ f(1) + f'(1) \cdot h + \frac{1}{2} f''(1) \cdot h^2 \ = \ 1 + \frac{1}{3}h - \frac{1}{9}h^2\ .$$

Uit de eigenschap $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - p(1+h)}{h^2} = 0$ volgt nu $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h} - 1 - \frac{1}{3}h}{h^2} = -\frac{1}{9}$.

Dus (substitueer $h = \dfrac{1}{n}$) $\qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^6 + n^5} - n^2 - \frac{n}{3} \right) = -\frac{1}{9}$.

Voorbeeld 31. Bepaal de derdegraads TAYLOR-benadering p van arctg rond 1.

Oplossing. In de definitie van de Taylorveelterm substitueren we $n = 3$, $a = 1$ en $h = x - 1$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}'(1) \cdot (x-1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}''(1) \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}'''(1) \cdot (x-1)^3 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 \end{aligned}.$$

Toepassing 5. We krijgen zo een prachtige benaderingsformule voor het getal e: de n-de graads Taylorbenadering van exp rond 0 is:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Dus

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \tag{34}$$

De fout in de benadering is kleiner dan $e/(n+1)!$. Deze rij benaderingen convergeert veel sneller dan de insluitprocedure uit Toepassing 1 in Hoofdstuk 3.

Voorbeeld 32. Bereken $\cos \frac{1}{10}$ in vijf decimalen nauwkeurig, zonder je rekenapparaat te gebruiken.

Oplossing. De fout in de tweedegraads TAYLOR-veelterm $1 - \frac{1}{2}x^2$ voor $\cos x$ is minder dan $x^4/4!$ (omdat in dit geval $p_2 = p_3$). Dus $1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$
Door hierin $x = \frac{1}{10}$ in te vullen zie je: $0,9949958 \leq \cos \frac{1}{10} \leq 0,9950042$. Dus $\cos \frac{1}{10} = 0,99500$ in vijf decimalen.

Opgaven bij Hoofdstuk 9

Opgave 112. Bepaal $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Opgave 113. Bepaal $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Opgave 114. Laat zien dat $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
Aanwijzing: denk aan paden.

Opgave 115. Bepaal de raaklijn aan de ellips $x^2 + 2y^2 = 3$ in het punt $(1, 1)$

Opgave 116. Bepaal de raaklijn aan $x \mapsto 2^x$ in 0, en raad eens wat het kleinste positieve natuurlijke getal n is waarvoor $\sqrt[n]{2} \leq 1,01$

Opgave 117. Probeer $\sqrt[3]{126}$ in zes decimalen te berekenen via de raakparabool aan $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ in 125

Opgave 118. Bepaal de raakparabool aan arcsin in $\frac{1}{2}$, en bereken met behulp hiervan

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Opgave 119. Bereken $\sqrt{e}$ in drie decimalen nauwkeurig zonder een beroep te doen op je rekenapparaat.

10 Machtreeksen

Als we de graad van de TAYLOR-veelterm van een functie f naar oneindig laten gaan, krijgen we de TAYLOR-*reeks* van f. Dit is een voorbeeld van een *machtreeks* in de variabele $h = x - a$. In tegenstelling tot de situatie bij veeltermen is bij machtreeksen de convergentie van belang.

Definitie. Een *machtreeks* is een functie van het type

$$F(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots \tag{35}$$

Onder het *convergentiegebied* van een machtreeks verstaan we de verzameling van complexe getallen z waarvoor de reeks convergeert.

Stelling 24. *Het convergentiegebied van een machtreeks is altijd*

- *òfwel alleen* $\{0\}$,
- *òfwel het hele complexe vlak* $\mathbb{C}$,
- *òfwel een cirkelschijf rond 0. (Op de rand van de cirkel kan het convergentiegedrag grillig zijn.)*

De straal van de cirkelschijf heet de *convergentiestraal* R van de machtreeks. Als het convergentiegebied $\{0\}$ is, zeggen we dat $R = 0$. Is het $\mathbb{C}$, dan zeggen we dat $R = \infty$.

Bewijs. Laten we R definiëren als:

$$R := \sup\{\ r \geq 0 \ \mid \ \text{de rij } a_0, a_1 r, a_2 r^2, \ldots \ \text{is begrensd}\ \}\ . \tag{36}$$

(In het ergste geval is $R = 0$; als de rij $a_0, a_1 r, a_2 r^2, \ldots$ voor alle r begrensd is, dan schrijven we: $R = \infty$.)
Stel nu dat $|z| < R$. Dan kun je in de verzameling bij (36) een getal vinden tussen $|z|$ en R in. Als r zo'n getal is, dan is er dus een $C > 0$ zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $|a_n r^n| \leq C$. En dus is

$$|a_n z^n| = |a_n r^n| \cdot \left|\frac{z}{r}\right|^n \leq C \left|\frac{z}{r}\right|^n \ .$$

Rechts staan termen van een meetkundige reeks met reden $|z/r| < 1$, die dus convergent is. Uit stelling 18 in Hoofdstuk 6 volgt nu dat ook onze reeks $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ convergeert.
Anderzijds is voor $|z| > R$ onze reeks niet eens begrensd, dus zeker niet convergent.

□

Voorbeelden

1. $a_n = 1$ voor alle n. Onze machtreeks is nu $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$. Convergentiestraal: 1.
   Gedrag op de rand: divergent. Functie: $F(z) = \dfrac{1}{1-z}$ voor $|z| < 1$.
2. $a_n = \frac{1}{n!}$.
   $R = \infty$ en $F(z) = \exp(z)$ (zie hieronder).
3. $a_n = n!$
   $R = 0$ en $F(0) = 1$.
4. $a_n = n^p$, $p \in \mathbb{N}$.
   $R = 1$. Dit volgt uit het feit dat voor $r < 1$ geldt: $\lim_{n\to\infty} n^p r^n = 0$.

Opgaafje 120. Bewijs dit zelf.

Het differentiëren van machtreeksen

Stelling 25. *In het inwendige van het convergentiegebied van de machtreeks (36), dus voor $|z| < R$, geldt:*

$$F'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots \tag{37}$$

Op de rand $|z| = R$ kan het voorkomen dat F wel bestaat, maar niet differentieerbaar is.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [Rud2].

Toepassingen

De complexe e-macht. De machtreeks

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \tag{38}$$

definieert een functie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Volgens de stelling hierboven voldoet deze overal aan de differentiaalvergelijking

$$\exp'(z) = \exp(z).$$

Natuurlijk geldt ook nog steeds: $\exp(0) = 1$. We zien dus dat deze functie inderdaad voldoet aan de definiërende eigenschappen van de *exponentiële functie* uit Hoofdstuk 4.

Rekenen met machtreeksen. Door bekende machtreeksen te differentiëren of te primitiveren krijg je nieuwe machtreeksen.

Voorbeeld 33. Ontwikkel de natuurlijke logaritme in een machtreeks rond 1.

Oplossing. We kunnen dit doen met een TAYLOR-ontwikkeling (een limiet van TAYLOR-veeltermen). Maar het kan gemakkelijker: de afgeleide van $\log(1 + z)$ is

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - \cdots \qquad \text{als } |z| < 1.$$

We zoeken een reeks die deze als afgeleide heeft (een primitieve). Dat is niet moeilijk: de reeks

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \cdots$$

voldoet, en heeft convergentiestraal 1. Bovendien levert deze laatste reeks 0 op voor $z = 0$, net als de functie $\log(1 + z)$. Dus

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \cdots \qquad (|z| < 1). \tag{39}$$

Voorbeeld 34. Bepaal de TAYLOR-reeks van de functie arctg.

Oplossing. De berekening gaat net zó: Schrijf eerst de machtreeks op voor de functie $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \cdots, \qquad \text{als } |z| < 1$$

en neem daarvan de primitieve die 0 oplevert in 0:

$$\operatorname{arctg} z \quad = \quad z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \cdots$$

Voorbeeld 35. Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ voor $x \in (-1,1)$.

Oplossing. Door links en rechts differentiëren van $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$ ontstaat

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{en dus} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}\ .$$

De convergentiestraal

In de laatste twee voorbeelden was de convergentiestraal steeds gelijk aan 1, dezelfde als die van $1/(1+z^2)$ respectievelijk $1/(1-x)$. Meer algemeen stellen we, ditmaal zonder bewijs:

Bewering 26. *De convergentiestraal van de machtreeks van een functie f die analytisch is op een deel van $\mathbb{C}$ is gelijk aan de afstand van 0 tot het dichtstbijzijnde punt waar f niet meer analytisch voortzetbaar is.*

Deze stelling geeft ook informatie over reële functies. Neem bijvoorbeeld de functie arctg . De convergentiestraal van de machtreeks van deze functie bedraagt 1, de afstand van 0 tot i. In i is immers de functie arctg niet analytisch, omdat $\operatorname{arctg}'(i) = 1/(1+i^2)$ niet bestaat. Zonder kennis van complexe getallen zou je dit veel moeilijker kunnen inzien!

Voorbeelden

Voorbeeld 36. Bereken $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$

Oplossing. De machtreeks voor $\operatorname{arctg} x$ leidt voor $x = 1$ tot $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \;=\; \frac{\pi}{4}$.

Rotopmerking. Helaas ligt $x = 1$ net buiten het bewezen convergentiegebied van deze machtreeks!

Geruststelling. Toch is de uitkomst goed: uit stelling 19 over alternerende reeksen in Hoofdstuk 6 over rijen volgt dat onze reeks convergeert. Heeft hij dan ook nog de juiste som? Dat is niet vanzelfsprekend, maar een stelling uit de analyse (bewezen door Abel) zegt dat dit inderdaad altijd het geval is. We gaan daar niet verder op in.

Voorbeeld 37. Ontwikkel $\dfrac{1}{1+5x}$ in een machtreeks.

Oplossing. Uit de stelling over meetkundige reeksen in Hoofstuk 3 volgt:

$$\frac{1}{1+5x} \;=\; 1 - 5x + 25x^2 - 125x^3 + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^n x^n \;\; \text{als } |x| < \frac{1}{5}\ .$$

Voorbeeld 38. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

Oplossing. Uit de log-machtreeks volgt:

$$n^2\left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{5n^3} + \cdots$$

Dus

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3n} \;\leq\; n^2\left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \;\leq\; \frac{1}{2}$$

en dus (insluitstelling)

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Voorbeeld 39. Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Oplossing.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{en} \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

Optelling van deze twee formules levert

$$e^x + e^{-x} \;=\; 2 + 2\cdot\frac{x^2}{2!} + 2\cdot\frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \text{en dus} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \;=\; \cosh x\,.$$

Voorbeeld 40. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ waarbij $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{als } x > 0 \\ \cos x & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Oplossing.

(1) Voor $x \in (0,1]$ is $f(x) \;=\; 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \cdots$, dus $1 - \frac{x}{3} \leq f(x) \leq 1$, dus $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = 1$

(2) $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\uparrow 0} \cos x \;=\; \cos 0 \;=\; 1$

Uit (1) en (2) volgt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Voorbeeld 41. Ontwikkel $f(x) = \dfrac{1}{x}$ rond 1 in een TAYLOR-reeks.

Oplossing. $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f'''(x) = \dfrac{-6}{x^4}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

De TAYLOR-reeks van f bij 1 is dus $f(1) + f'(1)h + \dfrac{f''(1)}{2!}h^2 + \cdots \;=\; 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots$
Dit hadden we ook gemakkelijker kunnen zien: Zoals je weet uit de stelling over meetkundige reeksen in Hoofdstuk 6 is inderdaad $f(1+h) = \dfrac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots$ voor alle h met $|h| < 1$.

Toepassing 6. De binomiumformule uit Hoofdstuk 9 is ook waar voor niet-gehele (zelfs complexe) machten n als we ook de definitie (32) laten gelden voor niet-gehele n (noem dit getal dan ook maar: u):

$$(1+h)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} h^k \;, \qquad (|h| < 1, u \in \mathbb{C}). \tag{40}$$

Deze verrassend elegante formule is niets anders dan de Taylorreeks van de functie $f(z) := z^u$ rond 1. Immers

$$f^{(n)}(z) =: \frac{d^n}{dz^n}(z)^u = u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)z^{u-n} \;.$$

zodat volgens definitie (32)

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)}{n!} = \binom{u}{n} \;.$$

en als we dit invullen in de Taylorrreeks

$$(1+h)^u = f(1+h) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(1)\frac{h^n}{n!} \;,$$

dan vinden we (40). De convergentiestraal vinden we uit Bewering 26.

OPGAVEN BIJ HOOFDSTUK 10

Opgave 121. Bereken $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 8}+\dfrac{1}{4\cdot 16}+\dfrac{1}{5\cdot 32}+\cdots$

Opgave 122. Bewijs dat $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$ divergeert

Opgave 123. Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$

Opgave 124. Bereken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

Opgave 125. Bepaal de TAYLOR-ontwikkeling van cos rond $\dfrac{\pi}{4}$

Opgave 126. Ontwikkel log bij e in een TAYLOR-reeks

Opgave 127. Ontwikkel $f(x)=\dfrac{x}{3+x}$ bij 0 in een TAYLOR-reeks, en ga na in welk gebied de gevonden reeks naar f convergeert

Opgave 128. Ontwikkel de functie $x\mapsto\cosh 3x$ rond 0 in een TAYLOR-reeks

Opgave 129. Bereken de som $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ uit opgave 113 door differentiatie van de som $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

11 Integratie

In veel situaties hebben we de behoefte om alle waarden van een functie 'bij elkaar te tellen'. Omdat dit niet letterlijk mogelijk is, zoals bij reeksen, gaan we eens even op een rijtje zetten wat we precies zouden willen.
We hebben een functie f op een gesloten interval $[a, b]$. We willen hier een getal bij vinden, de *integraal* van f over $[a, b]$, dat we zullen aanduiden met

$$\int_a^b f(x)dx \ .$$

Dit willen we doen op zo'n manier dat aan de volgende eigenschappen voldaan is.

A. **De ondergrens-bovengrens-eigenschap.** Als $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$, dan geldt:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \ .$$

B. **De opteleigenschap.** Als $a \leq b \leq c$, dan geldt:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \ .$$

Later in dit hoofdstuk zullen we zien dat het inderdaad mogelijk is om op deze manier aan alle intervallen $[a, b]$ en alle continue functies $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een getal toe te kennen.
Maar eerst gaan we uit deze eigenschappen van alles afleiden.

Gevolg 27. *Als $f(x) = c$ voor alle $x \in [a, b]$, dan is $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.*

Dit volgt direct uit A. Kies maar $m = M = c$.

Gevolg 28. $\displaystyle\int_0^b xdx = \tfrac{1}{2}b^2$.

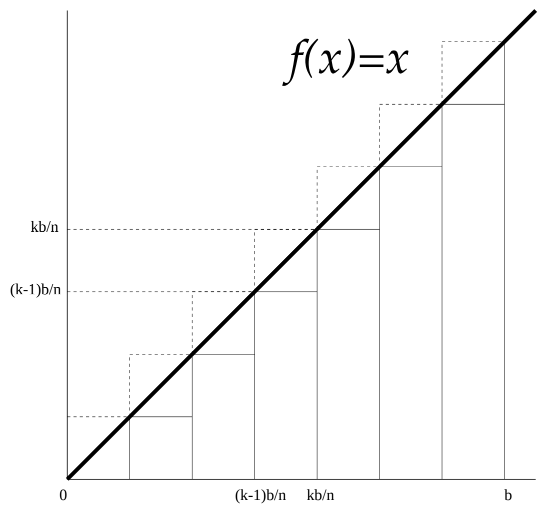
Bewijs. Eigenschap A leert ons dat

$$0 \leq \int_0^b xdx \leq b^2 \ .$$

Hier hebben we nog niet veel aan. We roepen de opteleigenschap B te hulp: eerst hakken we het interval $[0, b]$ in n gelijke stukjes: de intervallen $[(k-1)\frac{b}{n}, k\frac{b}{n}]$, met $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Op het k-de interval geldt:

$$(k-1)\frac{b}{n} \leq x \leq k\frac{b}{n} \ .$$

Eigenschap A levert dus voor dit k-de interval:



$$(k-1)\left(\frac{b}{n}\right)^2 \leq \int_{(k-1)b/n}^{kb/n} xdx \leq k\left(\frac{b}{n}\right)^2 \ .$$

En wegens eigenschap B is daarom

$$\left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1) \leq \int_0^b x dx \leq \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k \; .$$

Omdat $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$ en $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$, staat hier:

$$\tfrac{1}{2}b^2\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^b x dx \leq \tfrac{1}{2}b^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \; .$$

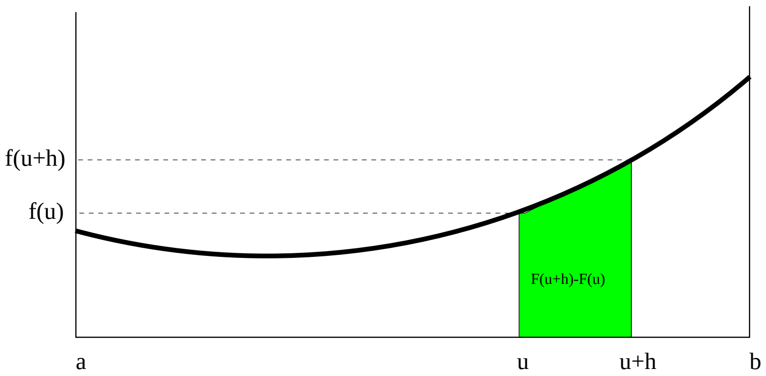
Dit kan alleen waar zijn voor alle $n \in \mathbb{N}$ als

$$\int_0^b x dx = \tfrac{1}{2}b^2 \; .$$

□

We zouden nu via de boven gebruikte verdeeltechniek nog veel meer integralen kunnen gaan berekenen, maar dat zullen we niet doen. Er is een veel handigere methode, gebaseerd op de volgende constatering. Als we bovenstaande integraal $\int_0^b f(x)dx = \frac{1}{2}b^2$ eens opvatten als een functie van b, dan is de afgeleide van die functie weer onze oorspronkelijke $f : x \mapsto x$! Dat dit geen toeval is, zullen we nu gaan aantonen.

Hulpstelling 29. *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu. Dan is de functie $F : [a,b] \to \mathbb{R} : u \mapsto \int_a^u f(x)dx$ differentieerbaar en heeft f als afgeleide.*



Bewijs. We beweren dat voor alle $u \in [a,b)$:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{F(u+h)-F(u)}{h} = f(u) \; . \tag{41}$$

Geef maar een $\varepsilon > 0$. Omdat f continu is, is er een $\delta > 0$ zó dat voor $h \in (0,\delta)$ geldt: $|f(u+h)-f(u)| < \varepsilon$. Daaruit volgt dat voor $x \in (u, u+h)$:

$$f(u) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(u) + \varepsilon \; .$$

Uit de eigenschappen A en B volgt nu:

$$h \cdot (f(u)-\varepsilon) \leq \int_u^{u+h} f(x)dx = F(u+h) - F(u) \leq h \cdot (f(u)+\varepsilon) \; .$$

Dus geldt (nog steeds voor $h \in (0,\delta)$):

$$f(u) - \varepsilon \leq \frac{F(u+h)-F(u)}{h} \leq f(u) + \varepsilon \; ,$$

zodat (41) is aangetoond. Op dezelfde manier toon je aan dat de linkerafgeleide van F in u gelijk is aan $f(u)$.

$\square$

Gevolg 30. *Er bestaat maar één manier om aan continue functies op gesloten intervallen een integraal toe te kennen die aan de eisen A en B voldoet.*

Bewijs. Stel we hebben twee voorschriften $\int$ en $\int'$ die aan A en B voldoen. Laten een interval $[a, b]$ en een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeven zijn. Definieer dan functies F en G op $[a, b]$ door:

$$F(u) := \int_a^u f(x)dx \qquad \text{en} \qquad G(u) := \int'_a{}^u f(x)dx\ .$$

Op grond van Hulpstelling 29 geldt dan dat $F'(u) = G'(u) = f(u)$, en omdat $F(a) = G(a) = 0$ volgt hieruit dat $F(b) = G(b)$, dat wil zeggen:

$$\int_a^b f(x)dx = \int'_a{}^b f(x)dx\ .$$

$\square$

Gevolg 31. *(Lineariteit van de integratie)*

(i) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ *voor alle* $c \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Bewijs. van (i): Laat $F(u) := \int_a^u f(x)dx$ en $G(u) := \int_a^u cf(x)dx$. Dan is $G'(u) = cF'(u)$, en omdat $F(0) = G(0) = 0$, is $G(u) = cF(u)$ voor alle $u \in [a, b]$, dus ook voor $u = b$. Dit bewijst (i). $\square$

Opgaafje 130. Bewijs (ii) zelf.

De hoofdstelling van de Calculus

Een functie F waarvoor geldt dat $F' = f$ noemen we een *primitieve* van f. Als ons integraalvoorschrift inderdaad bestaat, wat we gauw zullen aantonen, dan weten we nu ook dat elke continue functie een primitieve heeft (al zal het niet steeds gemakkelijk zijn deze te vinden). De volgende stelling reduceert het berekenen van integralen over intervallen tot het vinden van primitieven.

Stelling 32 (hoofdstelling van de Calculus). *Als F een primitieve is van de continue functie f op $[a, b]$, dan is*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ .$$

Notatie. $F(b) - F(a)$ schrijft men ook wel als

$$F(x)\Big/_a^b \quad \text{of} \quad F(x)\Big/_{x=a}^{x=b}.$$

Bewijs. De functies op $[a, b]$ gegeven door $u \mapsto F(u)$ en $u \mapsto \int_a^u f(x)dx$ hebben dezelfde afgeleide f. Op grond van Stellinkje 21 in Hoofdstuk 8 schelen ze dus een constante: $F(a)$. (Vul $u = a$ in.) Dus geldt voor alle $u \in [a, b]$: $F(u) = F(a) + \int_a^u f(x)dx$, in het bijzonder voor $u = b$. $\square$

De volgende twee hoofdstukken zullen geheel worden gewijd aan de kunst van het primitiveren.

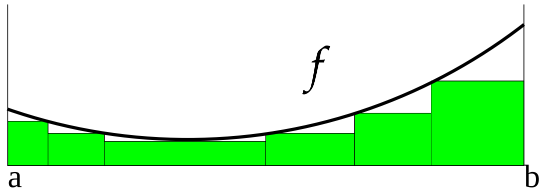
Het bestaan van integralen

Eerst moeten we nog één resultaat zeker stellen: het bestaan van de integraal $\int_a^b f(x)dx$ voor continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Stelling 33. *Het is mogelijk om aan elke continue functie f op een gesloten interval $[a,b]$ een getal $\int_a^b f(x)dx$ toe te kennen zó dat aan de ondergrens-bovengrens-eigenschap A en de opteleigenschap B voldaan is.*

Bewijs. We kunnen het interval $[a,b]$ in n stukken verdelen door $n-1$ punten $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ in (a,b) te tekenen. Als we dan nog $t_0 := a$ en $t_n := b$ kiezen dan krijgen we een rijtje $\underline{t} := (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ met $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Laten we zo'n rijtje een *verdeling* van $[a,b]$ noemen in n stukken. Bij zo'n verdeling maken we een *ondersom*

$$S(\underline{t}) := \sum_{j=1}^{n} \left(\min_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x) \right) (t_j - t_{j-1}) \ .$$



Het minimum bestaat steeds op grond van de Stelling van Weierstrass.

Zij nu $\mathcal{V}(f,a,b)$ de verzameling bestaande uit *alle* ondersommen

$$\mathcal{V}(f,a,b) := \{ \ S(\underline{t}) \ | \ \underline{t} \text{ verdeling van } [a,b] \ \} \ .$$

Zij $M := \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Omdat elke ondersom kleiner is dan $M(b-a)$, is $\mathcal{V}(f,a,b)$ van boven begrensd. Definieer

$$\int_a^b f(x)dx := \sup\big(\mathcal{V}(f,a,b)\big) \ .$$

We zullen laten zien dat deze definitie aan de eisen A en B voldoet.

A. Als $m \leq f(x) \leq M$, dan ligt *elke* ondersom in het interval $[m(b-a), M(b-a)]$, en dus ook hun supremum.

B. Een verdeling $\underline{t}$ van $[a,b]$ in n stukken en een verdeling $\underline{s}$ van $[b,c]$ in m stukken levert een verdeling $\underline{u}$ van $[a,c]$ in $n+m$ stukken op zó dat $S(\underline{t}) + S(\underline{s}) = S(\underline{u})$. Hieruit volgt dat

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx \ .$$

Omgekeerd kun je elke verdeling $\underline{u}$ van $[a,c]$ verfijnen tot verdelingen $\underline{t}$ en $\underline{s}$ van $[a,b]$ en $[b,c]$ door een verdeelstreepje in b toe te voegen. Omdat verfijning de ondersom alleen groter kan maken, geldt dat $S(\underline{t}) + S(\underline{s}) \geq S(\underline{u})$. Hieruit volgt dat

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \geq \int_a^c f(x)dx \ .$$

Bovenstaande twee ongelijkheden leveren een gelijkheid op: de opteleigenschap B.

□

Riemann-sommen

Als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is, dan kan de integraal $\int_a^b f(x)dx$ worden benaderd met *Riemann-sommen*:

$$R(\underline{t}) := \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(t_j - t_{j-1}) \ ,$$

waarbij $\underline{t}$ een verdeling van het interval $[a,b]$ is, en waarbij steeds x_j moet worden gekozen in het interval $[t_{j-1},t_j]$. De Riemann-som $R(\underline{t})$ ligt natuurlijk tussen de ondersom en de bovensom behorende bij de verdeling $\underline{t}$van $[a,b]$. Men kan bewijzen dat, wanneer de *maas*

$$\max\left\{\ |t_j - t_{j-1}|\ \middle|\ j = 1,\ldots,n\ \right\}$$

van een rij verdelingen naar 0 nadert, alle Riemann-sommen die op die verdelingen gebaseerd zijn, inderdaad naderen tot de integraal. (Zie bijvoorbeeld [Rud1].)

Oneigenlijke integralen

In het bovenstaande hebben we het alleen nog maar gehad over integralen van continue functies op gesloten intervallen. In de praktijk zullen we vaak integralen willen uitrekenen van continue functies op onbegrensde domeinen zoals $[0,\infty)$ of $\mathbb{R}$, of op domeinen die niet gesloten zijn, zoals $(0,1]$. In deze gevallen is de integraal gedefinieerd als een limiet, wanneer deze bestaat, van integralen over gesloten intervallen.
Als een domein bestaat uit enkele intervallen, dan definieren we de integraal van een continue functie f over dit domein als de som van de integralen over de intervallen.

Voorbeeld 42. Onder $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}dx$ verstaan we: $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx$. Dit is gelijk aan

$$\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big/_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ .$$

In dit voorbeeld is het integratie-interval $[0,\infty)$ niet begrensd.

Voorbeeld 43. Onder $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ verstaan we: $\displaystyle\lim_{a\downarrow 0}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Dit is gelijk aan:

$$\lim_{a\downarrow 0}\left(2\sqrt{x}\Big/_a^1\right) = \lim_{a\downarrow 0}\left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2\ .$$

In dit voorbeeld is het integratie-interval $(0,1]$ niet gesloten.

Voorbeeld 44. Onder $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{|x-1|}}dx$ verstaan we: $\displaystyle\lim_{b\uparrow 1}\int_0^b \sqrt{\frac{x}{|x-1|}}\,dx + \lim_{c\downarrow 1}\int_c^3 \sqrt{\frac{x}{|x-1|}}\,dx$. Dit is gelijk aan

$$\lim_{b\uparrow 1}\int_0^b \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx + \lim_{c\downarrow 1}\int_c^3 \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx\ .$$

In het berekenen van dit soort integralen zul je in de volgende hoofdstukken een ware virtuositeit ontwikkelen. Het domein in voorbeeld (44) is $(0,3)\setminus\{1\}$, de vereniging van de niet-gesloten intervallen $[0,1)$ en $(1,3]$.

Opgaven bij Hoofdstuk 11

Opgave 131. Zij sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie die aan een getal zijn teken (1 of -1) toevoegt, en die 0 oplevert in 0. Bepaal de integraal

$$\int_{-2}^{5} \operatorname{sgn}(x)dx$$

direct uit de gegeven definities (dus zonder primitiveren).

Aanwijzing: bepaal eerst een voldoende groot domein waarop de functie sgn continu is.

Opgave 132.

(a) Laat zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \tfrac{1}{4}n^2(n-1)^2 = n^3$$

en geef met behulp hiervan een korte uitdrukking voor de som $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$.

(b) Bepaal nu $\displaystyle\int_0^u x^3 dx$ direct uit de eigenschappen A en B van het begrip 'integraal'.

Opgave 133. Bepaal $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Opgave 134. Bepaal $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{n}{n^2+j^2}$.

12 Primitiveren

Onder een *primitieve functie* of *primitieve* van een functie f verstaan we een functie F waarvoor geldt $F' = f$.

Het vinden van primitieven

Elke continue functie heeft primitieven, maar het is niet altijd gemakkelijk, soms zelfs onmogelijk, deze in een formule op te schrijven.
In tegenstelling tot differentiatie bestaat er voor het primitiveren geen systematische methode. Alles is geoorloofd wat niet door het strafrecht is verboden. De test komt aan het eind: is de afgeleide van ons bedenksel F inderdaad de oorspronkelijk gegeven functie f? Algebraïsche programmapakketten, zoals MAPLE vinden in de meeste gevallen een primitieve, maar lopen op sommige functies vast.
Hieronder staat een lijst van trucs die nog wel eens willen werken.

Notatie. Met de uitdrukking $\int f(x)dx = F(x)$ of $\int f dx = F$ bedoelen we dat F een primitieve is van f.
Het is dus een moeilijke manier om te zeggen dat $F' = f$. Soms schrijven we $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ om onszelf eraan te herinneren dat F niet de enige primitieve is. Deze wat merkwaardige notatie is ervoor bedoeld om toepassing van de hoofdstelling van de analyse tot een mechanische bezigheid te maken:

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big/_a^b.$$

De allereerste methode voor het vinden van primitieven is natuurlijk het graven in je geheugen: ‘Heb ik deze functie ooit wel eens gevonden als afgeleide ergens van?’

Voorbeeld 45. $\displaystyle\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}.$
Dit volgt direct uit de bijpassende differentiatieregel. Een uitzondering is het geval $r = -1$:

Voorbeeld 46. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C + D\,\mathrm{sgn}\,(x)$ op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Misschien had je hier verwacht: $\log x + C$. Dit is natuurlijk goed, maar alleen op het domein $(0, \infty)$, de (reële) logaritme is immers alleen voor positieve argumenten gedefinieerd. Door het schrijven van absoluuttekens krijg je het gebied $(-\infty, 0)$ er gratis bij. (Ga na dat op dit gebied de afgeleide inderdaad $1/x$ is.)

Partiële integratie

Een andere methode voor het vinden van primitieven is de zogenaamde partiële integratie. Dit is een omkering van de productregel bij het differentiëren. Omdat $(fg)' = f'g + fg'$, levert een primitieve van fg' ook een primitieve van $f'g$ op:

$$\int f'g dx = fg - \int fg' dx.$$

Als we nog afspreken dat “*df*” betekent: $f'(x)dx$, dan kunnen we dit schrijven als:

$$\boxed{\int g df = fg - \int f dg.}$$

Voorbeeld 47. Zoek een primitieve van de natuurlijke logaritme.

Oplossing.

$$\int \log x dx = x\log x - \int x d(\log x) = x\log x - \int dx = x\log x - x.$$

TEST: Inderdaad is

$$\frac{d}{dx}(x\log x - x) = \log x + \frac{x}{x} - 1 = \log x \qquad (x > 0).$$

Voorbeeld 48. Bereken de oppervlakte van een cirkel met straal 1. Is er een verband met het getal π (de halve omtrek)?

Oplossing. De oppervlakte van de éénheidscirkel is tweemaal de oppervlakte onder de grafiek van de functie $[-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Laten we hiervan eens een primitieve zoeken met behulp van partiële integratie:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Die tweede term kunnen we wel aan, want:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\int \sqrt{1-x^2}\, dx + \arcsin x.$$

Rechts staat onze oorspronkelijke integraal met een minteken. Als we deze term naar de andere kant halen, dan vinden we:

$$2\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

De oppervlakte van een (*hele!*) cirkel met straal 1 is daarom

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2}\Big/_{-1}^{1} + \arcsin x\Big/_{-1}^{1} = 0 + \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Substitutie van variabelen

Dit is een toepassing van de kettingregel voor het vinden van primitieven. Er zijn twee varianten. De directe variant ziet er zo uit:

$$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)).$$

Hier moet je even oog voor krijgen:

Voorbeeld 49.

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \frac{1}{4}\sin^4 x.$$

(je "ziet" $g(x) = \sin x$ en $f'(y) = y^3$ staan.)

Voorbeeld 50.
$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log|\cos x|.$$

De andere variant is de 'echte' substitutieregel:
Vervang de integratievariabele x door een functie $f(u)$ van een nieuwe variabele u.

Voorbeeld 51. Zoek een primitieve van de functie
$$[0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Oplossing. Schrijf $x = u^2$ om de wortel kwijt te raken, primitiveer en substitueer aan het eind weer terug: $u = \sqrt{x}$.
$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \int \frac{u}{u^2+1} 2udu = 2\int \frac{u^2}{u^2+1} du = 2\int \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du =$$
$$= 2(u - \operatorname{arctg} u) = 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}).$$

TEST: Inderdaad is
$$\frac{d}{dx} 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

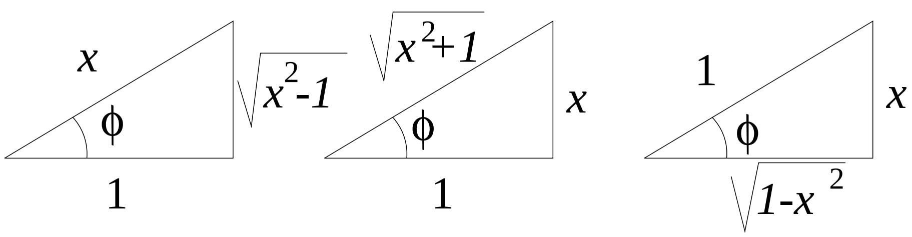
Substitutie-adviezen

Wortels van lineaire functies.
Kom je in een integraal de wortel $\sqrt[n]{ax+b}$ tegen, dan is de substitutie $t = \sqrt[n]{ax+b}$ vaak verstandig.

Voorbeeld 52.
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x+1}} &= \quad < t = \sqrt{1+x} \Longrightarrow x = t^2 - 1 > \\ &= \int \frac{2tdt}{(t^2+3)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{3}}. \end{aligned}$$

Wortels van kwadratische functies.
Een wortel als $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kan door verschuiving (substitueer $u = x - b/2a$) altijd worden teruggebracht tot één van de types
$$\sqrt{x^2-1} \quad , \quad \sqrt{x^2+1} \quad , \quad \sqrt{1-x^2}.$$

Handige goniometrische substituties kunnen in deze gevallen zijn:
$$x = \frac{1}{\cos\varphi} \quad , \quad x = \operatorname{tg}\varphi \quad , \quad x = \sin\varphi.$$



Voorbeeld 53. Opnieuw de oppervlakte van de cirkel. (Zie Voorbeeld 48.) Substitueer $x = \sin\varphi$:

$$
\begin{aligned}
2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi d\sin\varphi = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 2\varphi + 1)d\varphi = (\frac{1}{2}\sin 2\varphi + \varphi)\Big/_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi.
\end{aligned}
$$

Het gebruik van hyperbolische functies

Voorbeeld 54. Net als voor de functie arcsin kunnen we voor de inverse van de functie sinh de afgeleide bepalen:

$$(\sinh^{-1})' = \frac{1}{\sinh'\circ\sinh^{-1}} = \frac{1}{\cosh\circ\sinh^{-1}} \quad : \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

want als $\sinh u = x$, dan is $\cosh u = \sqrt{1+x^2}$. Van de functie rechts kennen we nu dus een primitieve: $\sinh^{-1}$. In tegenstelling tot de arcsin kunnen we deze expliciet in x uitdrukken (zie Voorbeeld 2 uit Hoofdstuk 3):

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Toepassingen van de hyperbolische functie voor het vinden van primitieven zijn talrijk. Evenals bij de goniometrische functies komen we tot enkele “substitutieadviezen”: in de uitdrukkingen

$$\sqrt{x^2-1} \quad , \quad \sqrt{x^2+1} \quad , \quad \sqrt{1-x^2}$$

komen de volgende substituties in aanmerking:

$$x = \cosh y \quad ; \quad x = \sinh y \quad ; \quad x = \text{tgh } y.$$

Voorbeeld 55.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cosh x} &= \int \frac{d\ \sinh x}{\cosh^2 x} = [t = \sinh x \Longrightarrow dt = \cosh x\ dx] = \int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \text{arctg } t = \text{arctg } \sinh x.
\end{aligned}
$$

Voorbeeld 56.

$$\int x\sqrt{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}d(x^2) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Volg nooit blind substitutie-adviezen op!

Voorbeeld 57.

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\ dx = [x = \sinh y] &= \int \cosh^2 y dy = \\
&= \frac{1}{2}\int(\cosh 2y + 1)dy = \frac{1}{4}\sinh 2y + \frac{1}{2}y = \\
&= \frac{1}{2}(\sinh y\cosh y + y) = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})\big).
\end{aligned}
$$

Hierbij gebruiken we dat $\cosh^2 y = \frac{1}{4}(e^y + e^{-y})^2 = \frac{1}{4}(e^{2y} + e^{-2y} + 2) = \frac{1}{2}(\cosh 2y + 1)$ en dat $\sinh 2y = \frac{1}{2}(e^{2y} - e^{-2y}) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})(e^y - e^{-y}) = 2\cosh y \sinh y$.

Opgaven bij Hoofdstuk 12

Opgave 135. Bepaal een primitieve van de functie

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : \qquad x \mapsto \frac{2}{3 + e^{-x}} .$$

Opgave 136. Bepaal een primitieve van de functie

$$(0, 2) \to \mathbb{R} : \qquad x \mapsto \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} .$$

Opgave 137. Bepaal een primitieve van de functie

$$(-\tfrac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R} : \qquad x \mapsto \frac{\sqrt{2x + 1}}{x + 4}.$$

Opgave 138. Bereken de integraal

$$\int_0^1 \arcsin x \; dx .$$

Opgave 139. Bereken de integraal

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{(5 - x^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Opgave 140. Bereken de integraal

$$\int_{-1}^3 \operatorname{arctg}\left((x - 1)^3\right) \, dx .$$

Opgave 141. Bereken de integraal

$$\int_{3/2}^{8/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}} .$$

Opgave 142. Bereken de integraal

$$\int_0^{\log 3} \operatorname{tgh} y dy .$$

Opgave 143. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_1^{\frac{17}{8}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} .$$

Opgave 144. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}} .$$

Opgave 145. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x \; dx .$$

Opgave 146. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^1 (\log x)^2 \; dx .$$

13 Breuksplitsen

Er is een algemene methode voor het primitiveren van rationale functies. Een rationale functie is het quotiënt van twee veeltermfuncties. Vereist is alleen dat je de nulpunten van de noemer kunt vinden.

Recept

p en q zijn veeltermfuncties. Gezocht: een primitieve van $\dfrac{p(x)}{q(x)}$. Stel dat q van de graad n is, en dat we zijn nulpunten kennen. Dan weten we dus dat

$$q(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n).$$

(Eventueel gebruiken we één nulpunt een paar keer.)

I. Als graad$(p) \geq n$, deel dan uit. Dat wil zeggen: bepaal door middel van een staartdeling een quotiëntveelterm s en een restveelterm r van graad lager dan n, zó dat:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Het primitiveren van s is niet moeilijk, en zo geraken we in geval II:

II. Als graad$(p) < n$, pas dan *breuksplitsing* toe. Dat wil zeggen: Zoek getallen $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ zó dat

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x - x_n}.$$

Dit lukt als de nulpunten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ allemaal verschillend zijn. Als er samenvallende nulpunten zijn, dan zijn er hogere machten nodig van $1/(x - x_j)$. Zie Voorbeeld 63.

III. Je vindt nu een primitieve door te gebruiken:

$$\int \frac{dx}{x - c} = \log|x - c| \qquad \text{en} \qquad \int \frac{dx}{(x - c)^k} = \frac{-1}{(k-1)(x - c)^{k-1}} \quad (k \geq 2).$$

Voorbeelden

Voorbeeld 58. Bepaal $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}\, dx$.

Oplossing. De teller heeft graad 3 en de noemer heeft graad 2, dus we moeten uitdelen. Een staartdeling leert dat

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = x + 3 - \frac{x + 3}{x^2 + 1}\ .$$

We hoeven nu geen breuksplitsing toe te passen, want we zien dat

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}\, dx &= \int (x + 3) dx - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx - 3 \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + 3x - \tfrac{1}{2}\log(x^2 + 1) - 3\operatorname{arctg} x + C\ . \end{aligned}$$

Voorbeeld 59. Zoek een primitieve van de functie $g : (-2,2) \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$.

Oplossing. We ontbinden de noemer in factoren: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, en zoeken constanten a en b zó dat

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{1}{x^2-4} \ .$$

We zien dat de keuze $a := \frac{1}{4}$ en $b := -\frac{1}{4}$ voldoet, en berekenen dan de primitieve:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{2-x}{2+x} \right| = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2-x}{2+x} \right) \ .$$

Voorbeeld 60. Bepaal $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\, dx$.

Oplossing. We zoeken a en b zó dat

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

Na vermenigvuldiging met $(x-2)(x-3)$ staat hier:

$$x + 4 = a(x-3) + b(x-2) \ .$$

Door links en rechts de coëfficiënten van de machten van x gelijk te stellen vinden we het tweetal vergelijkingen

$$a + b = 1 \qquad \text{en} \qquad -3a - 2b = 4 \ .$$

Oplossing: $a = -6$ en $b = 7$. Zo vinden we:

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\, dx = -6 \int \frac{dx}{x-2} + 7 \int \frac{dx}{x-3} = -6 \log|x-2| + 7 \log|x-3| + C \ .$$

Trucje. In het bovenstaande hadden we a en b ook zó kunnen vinden:

$$a = \lim_{x\to 2} (x-2) \left(\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} \right) = \lim_{x \to 2} (x-2) \left(\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \right) = \frac{2+4}{2-3} = -6 \ ,$$

en evenzo

$$b = \frac{3+4}{3-2} = 7 \ .$$

Voorbeeld 61. Zoek een primitieve van $\dfrac{1}{\cos\varphi}$ op het interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Oplossing.

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} &= \int \frac{d\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\
&= \tfrac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x)) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \log\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \\
&= \log\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 62.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [x = \text{tg } \varphi \Longrightarrow dx = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos\varphi}] =$$
$$= \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \log\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \text{tg}\,\varphi\right) = \log(\sqrt{1+x^2}+x).$$

(Zie Voorbeeld 61.)

Voorbeeld 63.

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \int \frac{\cos\varphi d\varphi}{\cos^4\varphi} = [x = \sin\varphi] = \int \frac{dx}{(1-x^2)^2}.$$

Pas hierop breukspliting toe:

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

Dus

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right) + \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}.$$

Voorbeeld 64. Je weet dat $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x$, omdat $\text{tg}\,' = 1 + \text{tg}^2$, zodat $\text{arctg}' = 1/\text{tg}' \circ \text{arctg} = 1/(1+\text{tg}^2 \circ \text{arctg}) = 1/(1+x^2)$. Maar je kunt het ook zó uitrekenen:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right).$$

Dus

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{2}\arg\frac{1+ix}{1-ix} = \arg(1+ix) = \text{arctg } x.$$

Voorbeeld 65. Bepaal een primitieve van de functie $\mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$.

Oplossing. Eerst ontbinden we de noemer:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) \qquad \text{met} \qquad \alpha := \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\,.$$

Hierbij is α nulpunt van de veelterm $x^2 - x + 1$. De nulpunten α en $\overline{\alpha}$ van deze veelterm hebben som en product 1; dat wil zeggen: $\alpha\overline{\alpha} = \alpha + \overline{\alpha} = 1$, zodat $(1+\alpha)(1+\overline{\alpha}) = 1 + \alpha\overline{\alpha} + (\alpha+\overline{\alpha}) = 3$. Bovendien is $\alpha^3 = -1$, zodat $\overline{\alpha} = 1/\alpha = -\alpha^2$. Het trucje bij Voorbeeld 60 helpt ons om constanten a, b en c te vinden zó dat

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\overline{\alpha}}\,,$$

namelijk:

$$a = \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{1}{3}\,;$$

$$b = \lim_{x\to\alpha}\frac{x-\alpha}{x^3+1} = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-\overline{\alpha})} = \frac{\overline{\alpha}+1}{3(\alpha+\alpha^2)} = \frac{1-\alpha^2}{3\alpha(1+\alpha)} = \frac{1-\alpha}{3\alpha} = \frac{-\alpha^2}{3\alpha} = -\tfrac{1}{3}\alpha\,;$$

$$c = \lim_{x\to\overline{\alpha}}\frac{x-\overline{\alpha}}{x^3+1} = \overline{b} = -\tfrac{1}{3}\overline{\alpha}\,.$$

Nu kunnen we de primitieve berekenen:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\overline{\alpha}}{x-\overline{\alpha}} \right) \, dx \\
&= \frac{1}{3} \left(\log(x+1) - \alpha \log(x-\alpha) - \overline{\alpha} \log(x-\overline{\alpha}) \right) \\
&= \tfrac{1}{3} \log(x+1) - \tfrac{1}{6} \log\big((x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) \big) - \frac{i}{\sqrt{3}} \log\left(\frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}} \right) \\
&= \tfrac{1}{3} \log(x+1) - \tfrac{1}{6} \log(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x-1} \, .
\end{aligned}
$$

Opgaven bij Hoofdstuk 13

Opgave 147. Bereken de integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{3-x^2}$$

Opgave 148. Bereken de integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} \ .$$

Opgave 149. Bereken de integraal

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{\cosh x}\ dx \ .$$

Opgave 150. Bepaal een primitieve van de functie $(1,\infty) \to \mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+x-2}$.

Opgave 151. Bepaal een primitieve van de functie $(0,4) \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-4}$.

Opgave 152. Bepaal een primitieve van de functie $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} : \qquad \varphi \mapsto \dfrac{1}{\cos^4 \varphi}$.

Opgave 153. Bepaal $\displaystyle\int \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta(1+\sin\vartheta)}$.

Opgave 154. Bepaal $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

14 Differentiaalvergelijkingen

Een differentiaalvergelijking is een verband tussen een functie en zijn afgeleiden. Differentiaalvergelijkingen vinden toepassing in bijna alle wetenschappen. In de fysica nemen ze een centrale positie in: alle fundamentele natuurwetten, zoals die van Newton en Maxwell, en ook de vergelijking van Schrödinger voor de quantummechanica, zijn in deze vorm geformuleerd.
In Hoofdstuk 4 hebben we enkele eenvoudige types differentiaalvergelijkingen bekeken. We breiden in dit hoofdstuk ons arsenaal verder uit.

Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 1

Een differentiaalvergelijking wordt *lineair* genoemd als hij van de graad 1 is in de functie en zijn afgeleiden. De *orde* van een differentiaalvergelijking is de hoogste afgeleide die erin vóórkomt. In Hoofdstuk 4 zijn we enkele lineaire differentiaalvergelijkingen tegengekomen van orde 1 en 2. Deze waren alle *homogeen*, dat wil zeggen dat zij een lineaire combinatie van de functie en zijn afgeleiden gelijkstelden aan 0. Bovendien waren de coëfficiënten in deze vergelijkingen steeds constanten.
Laten we deze twee beperkingen eens loslaten en kijken naar differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$f'(t) + a(t)f(t) = b(t)\ .$$

Algemene oplossingsmethode.
Zoek eerst een primitieve $A(t)$ van $a(t)$, en vermenigvuldig de vergelijking links en rechts met $e^{A(t)}$:

$$\Big(f'(t) + a(t)f(t)\Big)e^{A(t)} = b(t)e^{A(t)}\ .$$

We herkennen in het linkerlid de afgeleide van $f(t)e^{A(t)}$; onze vergelijking is dus equivalent met

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{A(t)}\right) = b(t)e^{A(t)}\ ,$$

oftewel:

$$f(t)e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)}\,dt\ .$$

Het hangt helemaal van de keus van de functies a en b af of we de betrokken integralen $A(t) = \int a(t)\,dt$ en vooral $\int b(t)e^{A(t)}\,dt$ inderdaad kunnen vinden.

Voorbeeld 66. Bepaal de functie f waarvoor $f'(t) = -2f(t)$ en $f(0) = 5$.

Oplossing. De hierboven beschreven methode levert hier dat $\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{2t}\right) = 0$, dus $f(t) = Ce^{-2t}$, (maar dat hadden we in Hoofdstuk 4 ook al gezien). Uit $f(0) = 5$ volgt $C = 5$, dus $f(t) = 5e^{-2t}$.

Voorbeeld 67. In de keuken staat een kopje koffie af te koelen. De afkoeling per tijdseenheid is evenredig met het verschil in temperatuur tussen de koffie en de keuken. We meten de temperatuur $f(t)$ van de koffie (in graden Celsius) na 0, 3 en 4 uur wachten. De resultaten zijn: $f(0) = 100$, $f(3) = 30$, $f(4) = 25$. Is het koud in de keuken?

Oplossing. Noem de keukentemperatuur K. Dan is $f'(t) = -c\big(f(t) - K\big)$. We maken hiervan $f'(t) + cf(t) = cK$, en passen de methode toe: $\frac{d}{dt}(f(t)e^{ct}) = cKe^{ct}$. De oplossing hiervan is $f(t)e^{ct} = Ke^{ct} + D$, dus $f(t) = K + De^{-ct}$.
Invulling van onze meetresultaten in deze formule levert nu: $c = \log 2$ en $K = 20$. Lekker warm dus.

Voorbeeld 68. Welke functies f voldoen aan $f'(t) = -2tf(t)$?

Oplossing. De oplossingsmethode levert, met $a(t) = 2t$, dat $\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{t^2}\right) = 0$. Dus $f(t) = Ce^{-t^2}$.

Voorbeeld 69. Bepaal de functie f waarvoor $f'(t) + (\sin t) \cdot f(t) = 0$ en $f(0) = 7$.

Oplossing. $\dfrac{d}{dt}\left(f(t)e^{-\cos t}\right) = 0$, dus $f(t) = Be^{\cos t}$.
Wegens $f(0) = 7$ is $B = \dfrac{7}{e}$ en dus $f(t) = 7e^{-1+\cos t}$.

Voorbeeld 70. Los op: $f'(t) + 2f(t) = t$.

Oplossing. We schrijven deze vergelijking eerst als $\frac{d}{dt}(f(t)e^{2t}) = te^{2t}$, en berekenen daaruit dat

$$f(t)e^{2t} = \int te^{2t}\,dt = \tfrac{1}{2}te^{2t} - \tfrac{1}{2}\int e^{2t}\,dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2t} + C\ .$$

We vinden de volgende algemene oplossing:

$$f(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2t}\ .$$

Voorbeeld 71. $f'(t) + 2tf(t) = 6e^{-t^2}\cos 3t$

Oplossing. We vinden:

$$f(t)e^{t^2} = \int 6\cos 3t\,dt = 2\sin 3t + C\ , \qquad \text{dus} \qquad f(t) = (2\sin 3t + C)e^{-t^2}\ .$$

Voorbeeld 72. Een man gaat naar zijn tandarts, die 5 km bij hem vandaan woont. Hij verlaat welgemoed zijn huis, lopend met een snelheid van 10 km per uur. Maar naarmate hij dichter bij zijn gevreesde bestemming komt, gaat hij langzamer lopen: als hij nog x km van zijn tandarts verwijderd is, is zijn snelheid $2x$ km per uur. Komt hij ooit aan?

Oplossing. Zij $f(t)$ de afstand tussen de man en zijn tandarts (in km), t uur na zijn vertrek. We zijn deze functie f toevallig al in voorbeeld 66 tegengekomen. De man komt dus nooit aan.

Voorbeeld 73. Stel de man uit voorbeeld 72 wordt niet alleen geremd door de vrees die toeneemt naarmate hij zijn doel nadert, maar tevens aangespoord door een fluctuerende kiespijn: $f'(t) = -\big(2f(t) + (\sin t)^2\big)$. Hoe zit het dan?

Oplossing. We schrijven de vergelijking als $\frac{d}{dt}(f(t)e^{2t}) = -\sin^2 t\, e^{2t}$ en integreren:

$$\begin{aligned} f(t)e^{2t} &= -\int \sin^2 t\, e^{2t}\,dt = -\tfrac{1}{2}\int (1-\cos 2t)e^{2t}\,dt \\ &= -\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\int e^{2t(1+i)}\,dt = -\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2(1+i)}\right)e^{2t}(\cos 2t + i\sin 2t) + A \end{aligned}$$

Dus, omdat $\frac{1}{2(1+i)} = \frac{1-i}{4}$,

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t + Ae^{-2t}\ .$$

Uit $f(0) = 5$ volgt $A = \dfrac{41}{8}$. Ditmaal lukt het dus wel, de tandarts te bereiken, want $f\big(\frac{9}{8}\pi\big)$ is negatief.

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

Oplossing door scheiding van variabelen.

Deze methode kunnen we toepassen in al die gevallen die te herleiden zijn tot

$$\big(\text{een of andere uitdrukking in } f(t)\big) \qquad = \qquad \big(\text{een of andere uitdrukking in } t\big)$$

Voorbeeld 74. $f'(t) = \dfrac{t^2}{\big(f(t)\big)^2}$

Oplossing. $\big(f(t)\big)^2 \cdot f'(t) = t^2$, dus $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{3}\big(f(t)\big)^3\right) = t^2$, dus $\dfrac{1}{3}\big(f(t)\big)^3 = \dfrac{1}{3}t^3 + A$, dus $f(t) = \sqrt[3]{t^3 + B}$.

Voorbeeld 75. Zoek de functie f die voldoet aan $\begin{cases} f'(t) = 1 + \big(f(t)\big)^2 \\ \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Oplossing. $\dfrac{f'(t)}{1 + \big(f(t)\big)^2} = 1$, dus $\dfrac{d}{dt}\big(\operatorname{arctg} f(t)\big) = 1$, dus $\operatorname{arctg} f(t) = t + A$, dus $f(t) = \operatorname{tg}(t + A)$, dus (wegens $f(0) = 1$): $f(t) = \operatorname{tg}\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Voorbeeld 76. $f'(t) = 6\sqrt{f(t)}\ \cos 3t$.

Oplossing. $\dfrac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}} = 3\cos 3t$, dus $\dfrac{d}{dt}\sqrt{f(t)} = 3\cos 3t$, dus $\sqrt{f(t)} = A + \sin 3t$, dus $f(t) = (A + \sin 3t)^2$.

Opgaven bij Hoofdstuk 14

Bepaal alle functies f die voldoen aan:

Opgave 155. $f'(t) + f(t)\cos t = 0$

Opgave 156. $f'(t) + f(t) = te^t$

Opgave 157. $f'(t) + \dfrac{2t}{1+t^2} f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

Opgave 158. $f'(t) + t^2 f(t) = t^2$

Opgave 159. $(1+t^2)f'(t) + tf(t) = \left(1+t^2\right)^{\frac{5}{2}}$

Opgave 160. $3f'(t) + 7f(t) = \cos 2t$

Opgave 161. $tf'(t) + f(t) + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0$

Opgave 162. $\begin{cases} f'(t) + \sqrt{t} \cdot f(t) = 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$

Opgave 163. $\begin{cases} f'(t) - 2tf(t) = t \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Opgave 164. $\begin{cases} \dfrac{1}{t} f'(t) + 1 + f(t) = 0 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

Opgave 165. $\begin{cases} (1+t)^2 f'(t) + 4tf(t) = t \\ f(1) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Opgave 166. $f''(t) = 3f(t) + 2f'(t)$

Opgave 167. $f''(t) = 2f'(t)$

Opgave 168. $f''(t) = -4f(t) + 2f'(t)$

Opgave 169. $3f''(t) = f(t) + 7$

Opgave 170. $\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + 4f(t) = t^2 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

Opgave 171. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$.

Opgave 172. $\dfrac{dy}{dt} = y(1-y)$.

Opgave 173. $\begin{cases} t^2\Big(1 + \big(f(t)\big)^2\Big) + 2f(t)f'(t) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Opgave 174. $\begin{cases} \big(\cos f(t)\big) \cdot f'(t) + \dfrac{t \sin f(t)}{1+t^2} = 0 \\ f(1) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$