# Inleiding Kansrekening

voor het 1e jaar wiskunde, 2e jaar natuurkunde en informatica

docent: Hans Maassen

November 2007

Onderwijsinstituut voor Wiskunde, Natuurkunde en Sterrenkunde
Radboud Universiteit Nijmegen

# Inhoudsopgave

# Hoofdstuk 1

# Het vaasmodel

**1.1** Dobbelstenen zijn een belangrijke inspiratiebron geweest voor de kansrekening. In de 17$^{\mathrm{e}}$ eeuw verschenen de eerste wiskundige verhandelingen over kansspelen, o.a. van Pascal en Huijgens. Kanstheorie gebaseerd op axioma's werd ingevoerd door Kolmogorov in 1933.
We geven enige historische probleempjes, waarvan het oplossen voor je nu wellicht nog wat lastig is; het benodigde gereedschap zal in het komende hoofdstuk aangedragen worden.

Een vraag die aan Galileï (17$^{\mathrm{e}}$ eeuw) gesteld werd: Als je 3 dobbelstenen gooit, dan kan het totaal 10 op zes manieren verkregen worden, nl. 631, 622, 541, 532, 442, 433; het totaal 9 kan eveneens op zes manieren verkregen worden (controleer!). Toch blijkt in de praktijk het totaal 10 vaker voor te komen dan 9. Verklaring?

Pascal en De Méré (17$^{\mathrm{e}}$ eeuw): Is het even "moeilijk" om minstens één zes te gooien in 4 worpen met één dobbelsteen als om minstens één dubbelzes te gooien in 24 worpen met twee dobbelstenen? (Redenering: het is zes maal zo "moeilijk" om dubbelzes met twee dobbelstenen te gooien, als om zes te gooien met één dobbelsteen; vandaar dat er zesmaal zo veel worpen gedaan mogen worden).

**1.2** Bekijk een vaas met $n$ ballen ($n$ is een of ander natuurlijk getal), die gemerkt zijn, bv. door nummering of kleuring. We willen één bal uit de vaas nemen, maar de vaas heeft een nauwe hals, zodat we niet kunnen zien welke bal we pakken. Als we aannemen dat de ballen goed geschud zijn, dan ligt het voor de hand aan alle ballen dezelfde kans toe te kennen om gepakt te worden, nl. $\frac{1}{n}$.
Als we de ballen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ noemen, dan kunnen we (vooruitlopend op de formele definitie) spreken van een *eindige uitkomstenruimte*

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$

met *gelijkwaardige uitkomsten* (namelijk voor elke $\omega \in \Omega$ is de kans op die $\omega$: $\frac{1}{n}$). Voorlopig noemen we dit model gemakshalve: het *vaasmodel*.

**1.3** Kansen op bepaalde resultaten zijn in het vaasmodel i.h.a. vrij eenvoudig te berekenen. Stel bijvoorbeeld dat de vaas 15 ballen bevat, waarvan er 5 rood zijn en 10 wit. Neem één bal uit de vaas. De kans dat deze rood is, is $\frac{5}{15}$, immers: het totaal aantal uitkomsten is 15, het aantal voor "rood" gunstige uitkomsten is 5.

**1.4** Er zijn natuurlijk talloze voorbeelden die je in het vaasmodel kunt vertalen. Ga zelf na dat hieronder ook vallen:

1. Het werpen van een dobbelsteen. Hoe groot is de kans op een aantal ogen van minstens 5?
2. Het werpen van twee dobbelstenen. Bereken de kans op hetzelfde aantal ogen bij beide stenen.
3. Het werpen van $m$ munten, waarbij je kijkt welke zijden boven komen. Hoe groot is $n$, het aantal mogelijke uitkomsten?
4. Het trekken van een kaart uit een kaartspel. Wat is de kans op $\heartsuit$?
5. Het trekken van achtereenvolgens twee kaarten uit een kaartspel (de eerste kaart wordt niet teruggestoken). Wat is de kans op twee $\heartsuit$?
6. Idem, als de eerste kaart wèl wordt teruggelegd.
7. Het nemen van vijf ballen uit een vaas die tien rode en twintig witte ballen bevat. De kans dat er hiervan precies drie rood zijn, zullen we in paragraaf 1.8 berekenen.

Om aan te geven dat inderdaad alle uitkomsten voor het toeval gelijkwaardig zijn, gebruikt men vaak uitdrukkingen als: de dobbelsteen is eerlijk (of zuiver), de kaarten zijn goed geschud, men kiest blindelings, enz..

**1.5 Gebeurtenissen.** We voeren enige namen en notaties in. In een vaasmodel, dus in een eindige uitkomstenruimte $\Omega$ met $n$ gelijkwaardige uitkomsten $\omega_1, \ldots, \omega_n$, is een *gebeurtenis* een uitspraak over de uitkomst, en dus te identificeren met een deelverzameling van $\Omega$: namelijk met de verzameling van die uitkomsten die de betreffende eigenschap hebben.

Zo is de gebeurtenis in 1.4.2 precies de verzameling

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

een deelverzameling van

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,\dots,6\}\times\{1,\dots,6\}\\ &= \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,6)\}.\end{aligned}$$

Gebeurtenissen geven we bij voorkeur aan met hoofdletters uit het begin van het alfabet: $A$, $B$, $C$, ..., of, als er veel nodig zijn, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ....

**Notatie.** Wanneer we bijvoorbeeld met 2 dobbelstenen gooien, zullen we de gebeurtenis "er wordt minstens 9 gegooid" (de verzameling $\{(x,y)\in\Omega | x+y\geq 9\}$) ook wel noteren als [minstens 9 ogen].

**1.6** Het aantal elementen van een verzameling (gebeurtenis) $A$ geven we aan met $\#A$.
De *kans* dat $A$ optreedt noteren we met $\mathbb{P}(A)$.
We hebben in het vaasmodel de volgende formule (**kansdefinitie van Laplace**):

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

(Laten we maar aannemen dat $\Omega \neq \emptyset$).

**1.7** Vaak is flink wat rekenwerk nodig om $\#A$ vast te kunnen stellen. Probeer maar eens de in 1.4.7 gevraagde kans te bepalen.
Om dergelijk rekenwerk te vergemakkelijken, hebben we een aantal *combinatorische rekenregels* nodig:

**(a) Vermenigvuldigingsregel.** Als er $m$ mogelijkheden zijn voor de variabele $x$ en voor elke mogelijkheid van $x$ er $n$ mogelijkheden zijn voor de variabele $y$, dan zijn er $m \times n$ mogelijkheden voor het paar $(x,y)$.
**Voorbeeld:** bij het werpen van twee dobbelstenen hebben we $6 \times 6$ mogelijkheden.

**(b) Rangschikking (Permutaties).** Een toepassing van (a): $n$ elementen kunnen op $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1$ manieren gerangschikt worden. Verkorte schrijfwijze:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Afspraak: $0! = 1$.

**Voorbeeld.** Het aantal manieren waarop we 5 mensen op 5 stoelen kunnen zetten (ieder op 1 stoel) is $5! = 120$.

**Intermezzo.** In het boek "Our Man in Havanna" van Graham Greene (blz. 114), is de geheime agent in Havanna het sleutelgetal van de safe, waarin zijn geheime zender bewaard wordt, kwijt, net nu hij dringend een bericht moet verzenden. Hij praat dan met zijn assistente:

– I'll remember it in a moment, it's something like 77539.

– We could try all the combinations of 77539. Do you know how many there are?

– Somewhere around six hundred I'd guess.

– I hope your cable is not urgent.

Hoe goed is de gok van de geheime agent?

**(c) Geordende grepen.** Nog een toepassing van (a). Uit $n$ elementen worden er achtereenvolgens $k$ gekozen ($k \leq n$), waarbij we afspreken dat we op de volgorde letten. Zo'n geordende $k$-greep kan genoteerd worden als $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Het aantal mogelijkheden is

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(dit wordt wel afgekort tot $(n)_k$ in sommige boeken).

**Voorbeelden.** Een woord van drie verschillende letters kan op $26 \times 25 \times 24$ manieren gevormd worden.

Uit een vereniging van 100 mensen kan een bestuur van voorzitter, secretaris, penningmeester en vice-voorzitter gekozen worden op $\frac{100!}{96!}$ manieren (dus $100 \times 99 \times 98 \times 97$).

**(d) Ongeordende grepen.** Als (c), maar nu letten we niet op de volgorde. Zo'n "ongeordende $k$-greep" kan genoteerd worden als $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Het aantal mogelijkheden is nu $k!$ keer zo klein als in (c) (ga na!), dus gelijk aan

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ ofwel } \binom{n}{k}$$

(spreek uit: $n$-boven-$k$). Uitgeschreven:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Deze laatste formule gebruiken we als definitie van $\binom{n}{k}$; met het oog op latere toepassingen definiëren we $\binom{n}{k}$ aldus voor alle $n \in \mathbb{R}$ en alle $k \in \mathbb{N}$.

**Voorbeeld.** Het aantal manieren waarop we een groepje van drie verschillende letters uit het alfabet kunnen kiezen is $\binom{26}{3} = \frac{26\times25\times24}{3\times2\times1}$.
Uit onze vereniging in (c) kan een afvaardiging van 4 mensen gekozen worden op $\binom{100}{4} = \frac{100\times99\times98\times97}{4\times3\times2\times1}$ manieren.

**(e) In vakjes verdelen.** Het getal $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ heeft nog een tweede interpretatie, nl. het aantal manieren om $n$ elementen over 2 vakjes te verdelen, waarbij er $k$ in vakje 1 en $n-k$ in vakje 2 geplaatst moeten worden.
In het verenigingsvoorbeeld: $k$ $(=4)$ mensen die wèl afgevaardigd worden, $n-k$ $(=96)$ mensen die niet afgevaardigd worden.
Dit kunnen we veralgemenen tot het verdelen van $n$ elementen over $r$ vakjes, waarbij er $k_1$ in vakje 1, $k_2$ in vakje 2 , ..., en $k_r$ in vakje $r$ geplaatst dienen te worden (met $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$). Het aantal mogelijkheden hiervoor is

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{k_r}{k_r}.$$

Reken zelf na dat dit hetzelfde is als

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

**Voorbeeld.** In onze vereniging moet een bestuur gekozen worden, bestaande uit voorzitter, secretaris, penningmeester en drie overige bestuursleden. Dit kan op $\frac{100!}{1!1!1!3!94!}$ manieren.

## Trekken met en zonder terugleggen

### 1.8 Trekken zonder terugleggen

We keren terug naar voorbeeld 1.4.7 en beschouwen nu, algemener, een vaas met $N$ ballen, waarvan er $r$ rood en $w$ wit zijn ($r, w \in \mathbb{N}$; $r + w = N$). We nemen $n$ ballen ($n \leq N$) uit de vaas (zonder teruglegging). Er zijn, wegens 1.7(d), $\binom{N}{n}$ manieren om dit te doen; we nemen aan dat deze alle gelijkwaardig zijn ("de vaas is goed geschud"). We herleiden aldus ons model tot een elementairder "supervaasmodel", waarbij we nu als uitkomsten opvatten alle ongeordende $n$-tallen ballen: $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ met $\omega_i \neq \omega_j$ als $i \neq j$.
Zij $X$ het aantal rode onder de $n$ uit de vaas gehaalde ballen. We willen de kans bepalen dat $X = k$ (Ga na dat dit alleen zin heeft als $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $k \leq r$ en $n - k \leq w$). Er zijn $\binom{r}{k}$ manieren om $k$ rode uit het geheel van $r$ rode te halen. Er moeten ook $n-k$ witte ballen gepakt worden; dit kan op $\binom{w}{n-k}$ manieren. Zo leiden

we, m.b.v. 1.7(a), (d) en de definitie van Laplace, af:

$$\mathbb{P}[X{=}k] = \frac{\binom{r}{k}\binom{w}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(we schrijven, voor de overzichtelijkheid, $\mathbb{P}[\ldots]$ in plaats van $\mathbb{P}([\ldots])$). Men noemt $X$ *hypergeometrisch verdeeld*, met parameters $N$, $r$ en $n$.

**Voorbeeld:** $N = 5$, $r = 2$, $n = 2$. Nummer de ballen 1 t/m 5; de ballen 1 en 2 zijn rood en de overige ballen zijn wit. $\Omega$ bestaat uit ongeordende paren getallen uit $\{1, \ldots, 5\}$, zoals $\{3, 5\}$, $\{2, 4\}$ enzovoorts. Dan is $\#\Omega = \binom{5}{2} = 10$.
Ga na dat $[X{=}2] = \{\{1, 2\}\}$ en $[X{=}0] = \{\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$. Bepaal zelf de elementen van $[X{=}1]$. Controleer nu de antwoorden die bovenstaande formule oplevert.

### 1.9 Toepassing.

Een bedrijf schaft 10 nieuwe machines aan, 4 van merk $A$ en 6 van merk $B$. Na 2 jaar blijken 1 $A$-machine en 4 $B$-machines versleten. Alle machines zijn even intensief gebruikt. Kunnen we concluderen dat $A$-machines gemiddeld langer meegaan dan $B$-machines?

| | Versleten | Intact | Totaal |
|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 3 | 4 |
| $B$ | 4 | 2 | 6 |
| Totaal | 5 | 5 | 10 |

We vertalen dit probleem in een $2 \times 2$-tabel, dat is het volgende vaasmodel: Een vaas bevat 10 ballen waarvan 4 rood ($A$) en 6 wit ($B$). We poneren nu een *hypothese*: *stel* dat de $A$- en de $B$-machines even goed zijn.
*Als* die hypothese juist is, dan is de "greep" van 5 (versleten) machines op te vatten als een willekeurige greep van 5 ballen uit deze vaas. De hypothese dat alle machines dezelfde kans hebben om na 2 jaar versleten te zijn, komt overeen met de hypothese dat alle ballen dezelfde kans hebben om in de steekproef van 5 voor te komen.
De vraag is of de hypothese juist is: wijst het resultaat van de steekproef (1 rode bal en 4 witte ballen getrokken) niet op het tegendeel, namelijk dat de $A$-machines langer meegaan? Of is het toeval, dat het resultaat zo scheef is?
Een beslissing hierover wordt genomen op grond van de kans dat er in een steekproef van 5 uit onze vaas slechts 1 rode bal voorkomt (of zelfs nog minder).
Deze kans blijkt vrij groot te zijn, nl.:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{4}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} \approx 0{,}26$$

daarom is er geen reden om de hypothese te verwerpen, m.a.w. het is best mogelijk dat inderdaad alle machines gelijkwaardig zijn.

### 1.10 Trekken met terugleggen.

We nemen dezelfde vaas als in paragraaf 1.8. We nemen er weer $n$ ballen uit, maar leggen telkens de gepakte bal terug. We nummeren de ballen weer van 1 tot en met $N$, en zo dat de ballen 1 t/m $r$ rood zijn en de ballen $r+1$ t/m $N$ wit.

Het is nu mogelijk dat meerdere keren dezelfde bal wordt getrokken, en we zullen dus op een andere manier moeten "boekhouden". Daarom letten we nu (eventjes) wèl op de volgorde. De uitkomstenruimte $\Omega$ bestaat dan uit rijtjes $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, waarbij elke $\omega_i$ een element is van $\{1, \ldots, N\}$. Ofwel: $\Omega = \{1, \ldots, N\}^n$. $\Omega$ bevat $N^n$ gelijkwaardige uitkomsten (weer: een "supervaas").

Zij $X$ het aantal keren dat een rode bal wordt getrokken; we bepalen weer $\mathbb{P}[X{=}k]$, voor $k \in \mathbb{N}$ met $k \leq n$. We kunnen bijvoorbeeld eerst $k$ rode en dan $n-k$ witte pakken. Dit kan op $r^k w^{n-k}$ manieren. Maar ook elke andere volgorde van pakken, die $k$ rode en $n-k$ witte oplevert, kan op $r^k w^{n-k}$ manieren gerealiseerd worden. En aangezien er $\binom{n}{k}$ mogelijke volgorden zijn die tot $k$ rode en $n-k$ witte ballen leiden, vinden we als antwoord:

$$\mathbb{P}[X{=}k] = \frac{\binom{n}{k} r^k w^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

waarbij $p = \frac{r}{N}$ de fractie rode en $q = \frac{w}{N}$ de fractie witte ballen is.

Dit is de beroemde *binomiale verdeling* met parameters $n$ en $p$. In hoofdstuk 3 komen we erop terug.

**Voorbeeld.** Dezelfde vaas als in het voorbeeld uit paragraaf 1.8. Nu is $\#\Omega = 25$, $\Omega$ bevat elementen als $(3,5)$, $(2,2)$ enzovoorts. Schrijf zelf de elementen op van $[X{=}0]$, $[X{=}1]$ en $[X{=}2]$, en controleer de bijbehorende kansen.

**Opgaven**

1. Men werpt 3 dobbelstenen. Bepaal de kans op:

   (a) 3 gelijke;

   (b) 3 verschillende aantallen ogen;

   (c) een totaal van minstens 16.

2. Hoe groot is de kans dat in een groep van 20 personen er minstens 2 op dezelfde dag jarig zijn? (Laat schrikkeljaren buiten beschouwing)

3. Uit een goed geschud pak van 52 kaarten krijgt men er 13. Hoe groot is de kans:

   (a) dat er precies 6 $\spadesuit$ bij zijn;

   (b) dat er minstens één aas bij is;

   (c) dat het 3 $\heartsuit$, 3 $\clubsuit$, 3 $\diamondsuit$ en 4 $\spadesuit$ zijn;

   (d) dat het een (3,3,3,4)-hand is (van één kleur 4, van iedere andere 3)?

4. $n$ personen ($n \geq 3$), waaronder Jo en Ien, worden op willekeurige wijze aan een tafel gezet. Hoe groot is de kans:

   (a) dat Jo en Ien naast elkaar zitten, als alle personen aan één kant van de tafel gaan zitten;

   (b) dat Jo en Ien naast elkaar zitten, als de tafel rond is;

   (c) dat Jo en Ien naast elkaar zitten, als $n$ even is, en er aan beide lange zijden van de tafel $\frac{1}{2}n$ personen plaatsnemen;

   (d) dat Jo en Ien in de situatie van (c) tegenover elkaar zitten?

5. Los het probleem van de geheim agent in 1.7 op.

6. Uit een zak met $a$ witte en $b$ zwarte knikkers worden één voor één knikkers genomen totdat er nog één over is. Bereken de kans dat deze overblijvende knikker wit is.

7. Voor 7 mensen zijn 5 bioscoopkaartjes beschikbaar. Op hoeveel manieren kunnen deze verdeeld worden:

   (a) als de 5 kaartjes allemaal voor dezelfde voorstelling zijn;

(b) als de 5 kaartjes allemaal voor verschillende voorstellingen zijn;

(c) als er één kaartje is voor “Bambi” en er vier kaartjes zijn voor “De kleine zeemeermin”?

8. Los het probleem van Galileï in paragraaf 1.1 op.

9. Los het probleem van Pascal en De Méré in paragraaf 1.1 op.

10. Drie personen gooien elk een dobbelsteen; wie het hoogste aantal ogen heeft, wint. Als meerdere personen het hoogste aantal ogen gooien, beginnen ze opnieuw. Wat is de kans dat de beslissing meteen valt?

11. In een kast liggen $2n$ schoenen ($n$ paren) willekeurig door elkaar. Men grijpt blindelings $k$ schoenen ($k \leq n$).

    (a) Hoe groot is de kans dat daar minstens één paar bij is?

    (b) Hoe groot is de kans dat er precies één paar bij is?

12. Lotto. Ik kies zes van de getallen $1, 2, \ldots, 41$. Zes van deze getallen worden door het lot aangewezen. Hoe groot is de kans:

    (a) dat dat juist mijn zes getallen zijn?

    (b) dat ik vijf goede getallen heb?

13. In het pokerspel werpt men 5 dobbelstenen. Bereken de kans op elk van de volgende pokercombinaties:

    (a) poker (5 gelijke);

    (b) carré (4 gelijke, 1 anders);

    (c) vol huis (een drietal en een paar);

    (d) grote straat (2,3,4,5,6);

    (e) kleine straat (1,2,3,4,5);

    (f) drie van één soort (een drietal en twee losse);

    (g) twee paar (twee paren en een losse);

    (h) één paar (een paar en drie losse);

    (i) de rest.

14. Op een kermis beweert iemand telekinetische gaven te hebben. Het publiek gooit munten op, en hij zal proberen om de munten met kop omhoog te laten vallen. Hij slaagt 5 van de 6 keren. Welke kans zou hij hebben op zo'n goed resultaat (of nog beter), wanneer hij geen bovennatuurlijke gaven bezat?

15. Bij het Risk-spel spelen telkens twee spelers tegen elkaar: de 'aanvaller' en de 'verdediger'.
    We beschouwen nu één enkel duel. Daarbij werpt de aanvaller met drie dobbelstenen, de verdediger met één of met twee.
    We noemen de uitslagen van de aanvaller: $X_1$, $X_2$ en $X_3$, en nummeren deze van hoog naar laag; dus $6 \geq X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq 1$.

    (a) Stel eerst dat de verdediger met één dobbelsteen werpt. (Uitslag: $Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). We zeggen dat hij *één slag wint* wanneer $Y \geq X_1$. Bereken de kans hierop.

    (b) Stel nu dat de verdediger met twee dobbelstenen werpt. We noemen de uitslagen: $Y_1$ en $Y_2$ ($6 \geq Y_1 \geq Y_2 \geq 1$).
    We zeggen dat de verdediger *de eerste slag wint* als $Y_1 \geq X_1$, en *de tweede slag wint* als $Y_2 \geq X_2$.
    Zij $V_i$ het aantal door de verdediger gewonnen slagen minus het aantal door hem verloren slagen, bij verdediging met $i$ dobbelstenen ($i = 1$ of $2$).
    De verdediger mag, nadat hij de uitslag van de aanvaller gezien heeft, kiezen of hij met één of met twee dobbelstenen verdedigt.
    Stel dat de uitslag van de aanvaller is: $X_1 = 5$, $X_2 = 4$ en $X_3 = 2$.
    Bereken de kansen $\mathbb{P}(V_i = j)$ voor $i = 1, 2$; $j = -2, 0, 2$.

    (c) Als je in de situatie van onderdeel (c) verdediger was, met hoeveel dobbelstenen zou je dan verdedigen (bewijs is niet nodig, alleen een argumentatie is voldoende)?

    (d) Overigens: heb je wel eens Risk gespeeld? (Het antwoord op deze vraag beïnvloedt je practicumcijfer niet.)

# Hoofdstuk 2

# Het algemene model

**2.1** In hoofdstuk 1 hebben we al een flink instrumentarium opgebouwd waarmee we vele problemen kunnen oplossen. Toch blijven er nog genoeg vraagstukken over die eenvoudig te formuleren zijn, maar niet opgelost kunnen worden met de methoden uit hoofdstuk 1. Enige voorbeelden:

1. In casino's speelt men een gokspel, roulette, waarbij alle mogelijke uitkomsten: $0, 1, 2, \ldots, 36$ dezelfde kans ($\frac{1}{37}$) zouden moeten hebben. De man die het balletje werpt, kan echter de vaardigheid ontwikkelen om het balletje met grote kans in een bepaald deel van de getallencirkel terecht te laten komen, zodat de gelijkwaardigheid der uitkomsten verloren gaat.

2. Werp een (eerlijke) dobbelsteen. Hoe lang duurt het vòòr de eerste 6 verschijnt? Dit kan willekeurig lang duren: de uitkomstenruimte is (aftelbaar) oneindig geworden.

3. Werp een pijltje op een schijf met een straal van 20 cm. Hoe groot is de kans dat het pijltje hoogstens 3 cm van het middelpunt terecht komt?

## Uitkomstenruimten

**2.2** Blijkbaar moeten we twee essentiële vooronderstellingen uit hoofdstuk 1 laten vallen: de uitkomsten hoeven niet allen gelijkwaardig te zijn (2.1.1), en de uitkomstenruimte hoeft niet eindig te zijn (2.1.2 en 2.1.3).
De uitkomstenruimte $\Omega$ van een experiment kan een eindige of oneindige, aftelbare[1] of overaftelbare verzameling zijn.
**Voorbeelden:** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{\text{kop}, \text{munt}\}$, $\{\text{januari}, \text{februari}, \ldots, \text{december}\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $[0, 1]$, $[0, 1] \times [0, 1]$.

[1] Een oneindige verzameling $V$ heet *aftelbaar* als de elementen van $V$ genummerd kunnen worden.

**2.3** Wanneer we binnen een uitkomstenruimte gebeurtenissen $A, B, A_1, A_2, \ldots$ hebben, dan kunnen we daaruit allerlei nieuwe gebeurtenissen maken door verzamelingsoperaties toe te passen.
Voer eenmaal het betreffende experiment uit en noem de uitkomst $\omega$ (Je kunt ook zeggen: laat het toeval een uitkomst $\omega$ aanwijzen).
Dan correspondeert de uitspraak "$A$ en $B$ treden beide op" met "$\omega \in A \cap B$". We zetten een aantal van dergelijke verbanden op een rijtje.
Vooraf enige afspraken: de verzameling $\{\omega : \omega \in \Omega, \omega \notin A\}$ heet het *complement* van $A$ en wordt genoteerd als $A^c$. Het *verschil* van $A$ en $B$ definiëren we als $A \cap B^c$; we schrijven ervoor $A \setminus B$.

| | | |
|---|---|---|
| (a) | $A$ treedt op | $\omega \in A$ |
| (b) | $A$ en $B$ treden beide op | $\omega \in A \cap B$ |
| (c) | $A_1, A_2, \ldots, A_n$ treden alle op | $\omega \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ |
| (d) | $A$ of $B$ treedt op (minstens één van de twee) | $\omega \in A \cup B$ |
| (e) | Minstens één van de gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_n$ treedt op | $\omega \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ |
| (f) | Of $A$ òf $B$ treedt op (precies één van de twee) | $\omega \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Deze verzameling heet ook wel het *symmetrisch verschil* van $A$ en $B$, en wordt genoteerd als $A \triangle B$. |
| (g) | $A$ treedt niet op | $\omega \in A^c$ |

Verder kunnen er verbanden bestaan tussen het optreden van $A$ en $B$, bv.:

| | | |
|---|---|---|
| (h) | $A$ en $B$ sluiten elkaar uit, kunnen niet tegelijk optreden | $A \cap B = \emptyset$ ($A$ en $B$ zijn *disjunct*) |

| | | |
|---|---|---|
| (i) | Uit $A$ volgt $B$, d.w.z. als $A$ optreedt, dan zeker ook $B$ | $A \subset B$ |

**2.4** * We willen dadelijk aan iedere gebeurtenis een kans toekennen. Maar de uitkomstenruimte $\Omega$ kan zó veel deelverzamelingen hebben (anders gezegd: $\mathcal{P}(\Omega)$ kan zó groot zijn), dat het niet mogelijk is om aan alle deelverzamelingen van $\Omega$ een kans toe te kennen. Daarom beperken we ons veelal tot een deelklasse $\mathcal{G}$ van $\mathcal{P}(\Omega)$, en slechts elementen van die deelklasse $\mathcal{G}$ zullen we gebeurtenissen noemen.
We vooronderstellen dat $\mathcal{G}$ de volgende eigenschappen heeft:

(a) $\Omega \in \mathcal{G}$;
(b) Als $A \in \mathcal{G}$, dan $A^c \in \mathcal{G}$;
(c) Als $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}$, dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$.
(Men noemt zo'n $\mathcal{G}$ wel een $\sigma$-algebra).
In woorden: combinaties van gebeurtenissen, zoals ingevoerd in paragraaf 2.3, zijn zelf óók gebeurtenissen.
Als $\Omega$ (eindig of) aftelbaar is, kunnen we altijd $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\Omega)$ nemen; bij overaftelbare $\Omega$ zal $\mathcal{G}$ i.h.a. echt kleiner zijn dan $\mathcal{P}(\Omega)$.
We zullen verder aan deze beperkingen geen aandacht schenken (dat gebeurt wèl in het college "Maat en Integraal"). We nemen steeds aan dat alle voorkomende deelverzamelingen van $\Omega$ gebeurtenissen zijn. In de praktijk, dat betekent voor ons: bij het oplossen van vraagstukken, is dit altijd het geval.

## Kansruimten

**2.5** Ons doel is, zoals aangekondigd, aan elke gebeurtenis $A$ een kans toe te kennen, die we zullen noteren met $\mathbb{P}(A)$. In feite is $\mathbb{P}$ dus een functie op (een deel van) $\mathcal{P}(\Omega)$.

De formele definitie van kansruimte:
Een *kansruimte* bestaat uit een uitkomstenruimte $\Omega$, een collectie gebeurtenissen $\mathcal{G}$ ($\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) en een functie $\mathbb{P} : \mathcal{G} \to [0, 1]$ die aan de volgende voorwaarden voldoet:

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(b) Als $A$ en $B$ elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn, dan is $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (men zegt wel: "$\mathbb{P}$ is additief").

Voor oneindige kansruimten stellen we bovendien de volgende (continuïteits)eis:

(c) Als $A_1, A_2, \ldots$ gebeurtenissen zijn met $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ (men zegt wel: de rij $A_1, A_2, \ldots$ is monotoon stijgend), dan is $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

$\mathbb{P}$ heet de kansfunctie, of kortweg *kans*.

Met volledige inductie bewijs je uit eis (b) eenvoudig dat voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_n$ geldt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Maar eis (c) volgt *niet* uit de eisen (a) en (b) (Bewijs: zie het college "Maat en Integraal").

Ten overvloede zij opgemerkt, dat $\mathbb{P}(A)$ altijd een getal in $[0,1]$ is.

**2.6** De in de vorige paragraaf genoemde voorwaarden lijken misschien wat mager, maar het blijkt dat er veel formules uit af te leiden zijn (zie opgave 2). We schrijven er een aantal op (met $A$, $B$, $C \in \mathcal{G}$):

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

(c) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

(d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$;

(e) $\mathbb{P}(A \cup B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;

(f) $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C);\end{aligned}$$

(g) Als $A \subset B$, dan $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$.

**2.7** Met behulp van de eigenschappen van de kansfunctie $\mathbb{P}$ in paragraaf 2.5 en 2.6 kan men het volgende bewijzen:

**(a)** Als $A_1, A_2, \ldots$ gebeurtenissen zijn met $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ (men zegt wel: de rij $A_1, A_2, \ldots$ is monotoon dalend), dan is

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

**(b)** Als $A_1, A_2, \ldots$ elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn, dan is

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

**2.8** Als $\Omega$ aftelbaar is, en we dus $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\Omega)$ kunnen nemen, dan is $\mathbb{P}$ gemakkelijk vast te leggen door elke uitkomst $\omega \in \Omega$ op te vatten als gebeurtenis $A = \{\omega\}$, en de kans dáárop vast te leggen. Als volgt: schrijf $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ voor $\omega \in \Omega$. Wegens 2.7(b) moet nu voor elke $A \in \mathcal{G}$ gelden:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Merk op dat deze som altijd bestaat en eindig is. De sommatievolgorde is niet van belang, want de termen zijn allemaal positief.
Controleer zelf de voorwaarden in paragraaf 2.5.

**2.9 Opmerking.** Uit deze constructie volgt dat in een aftelbaar oneindige uitkomstenruimte nooit alle uitkomsten gelijkwaardig kunnen zijn. Stel namelijk maar dat er een constante $c \in [0, 1]$ bestaat met $\mathbb{P}(\{\omega\}) = c$ voor elke $\omega \in \Omega$. Als $c > 0$, dan volgt: $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} c = \infty$, in tegenspraak met de axioma's in paragraaf 2.5. En als $c = 0$, dan volgt op dezelfde wijze: $\mathbb{P}(\Omega) = 0$, hetgeen evenzeer onjuist is.

## Stochasten

**2.10** Vaak zijn we niet zozeer geïnteresseerd in de uitkomst $\omega$ zelf van het experiment, maar in een functie van $\omega$. De uitkomst $\omega$ van het experiment en daarmee de waarde van deze functie wordt bepaald door het toeval; daarom heet deze functie toevalsgrootheid, of stochastische variabele, of kortweg stochast[2]. We gebruiken voor stochasten meestal hoofdletters uit het eind van het alfabet: $X$, $Y$, $Z$, $X_1$, $X_2, \ldots$
Een *stochast* $X$ is dus een functie $X : \Omega \to W$, waarbij $W$ de waardenverzameling van $X$ is. Als $W \subset \mathbb{R}$ heet $X$ een *stochastische grootheid* (random variable); als $W \subset \mathbb{R}^n$ voor een of andere $n$, dan heet $X$ een *stochastische vector*. Als $W$ aftelbaar of zelfs eindig gekozen kan worden, noemen we $X$ een *discrete stochast*.

**2.11 Voorbeelden van stochasten.**

[2] Grieks: $\sigma\tau o\chi\alpha\zeta o\mu\alpha\iota$ = gissen of mikken; $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau o$ = datgene waarmee men gist; werpspeer.

1. We doen 2 worpen met een dobbelsteen, en zijn slechts geïnteresseerd in de som $X$ van de beide worpen. Een uitkomst $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ van het experiment levert voor $X$ de waarde $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$. De stochast $X$ heeft waardenverzameling $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$ en is derhalve discreet.

2. We herhalen het experiment in 1, maar kijken nu slechts naar de hoogste, $Y$, van de twee worpen, Dan is $Y(\omega) = \max(\omega_1, \omega_2)$, een stochast met waarden in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en dus discreet.

3. Bij het werpen op de schijf noteren we de uitkomsten door middel van coördinaten $\omega = (x, y)$. De roos is $(0, 0)$. We zijn geïnteresseerd in de horizontale afwijking $X$ t.o.v. de roos, de verticale afwijking $Y$ t.o.v. de roos, en de afstand $R$ tot de roos.
Dan zijn $X(x, y) = x$, $Y(x, y) = y$, terwijl $R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Merk op dat $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
Elke worp wordt met een aantal punten $Z$ gewaardeerd, als volgt: $Z(x, y) = n$ als $\frac{1}{n+1} < R(x, y) \leq \frac{1}{n}$ (dus: $Z = [\frac{1}{R}]$). Ga na dat $X$, $Y$ en $R$ niet discreet zijn, en $Z$ wel.

**2.12** Stochasten zijn we ongemerkt al tegengekomen in paragraaf 1.8. Ze maken het makkelijk om kort en duidelijk gebeurtenissen te omschrijven. Zo wordt de gebeurtenis "geen vijven of zessen in twee worpen met een dobbelsteen" in 2.11.2: $\{\omega : Y(\omega) \leq 4\}$, in de notatie van 1.5: $[Y \leq 4]$.
**Voorbeeld.** Als we drie dobbelstenen gooien met aantallen ogen $X_1$, $X_2$, resp. $X_3$, dan is de gebeurtenis "de laatste worp is de hoogste" te schrijven als

$$[X_1 \leq X_3 \text{ en } X_2 \leq X_3]$$

hetgeen weer de afkorting is van

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq X_3(\omega) \text{ en } X_2(\omega) \leq X_3(\omega)\}.$$

**2.13** Beschouw een discrete stochast $X$ met waardenverzameling $W$. We zijn geïnteresseerd in de *kansverdeling* van $X$, d.w.z. de waarde van $\mathbb{P}[X{=}x]$ voor $x \in W$. Als we deze kansen eenmaal kennen, liggen alle verdere kansen op gebeurtenissen die betrekking hebben op $X$, vast door 2.7(b). Zij nl. $V \subset W$, dan is $\mathbb{P}[X{\in}V] = \sum\limits_{x \in V} \mathbb{P}[X{=}x]$.
**Voorbeeld.** Neem de stochast $Y$ uit 2.11.2. Reken na dat $\mathbb{P}[Y{=}k] = \frac{2k-1}{36}$ voor $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Bereken zelf de kansverdeling van de stochast $X$ uit 2.11.1.

**2.14** Bij elke gebeurtenis $A$ kunnen we een stochast $\mathbf{1}_A$ maken door te definiëren:

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{als } \omega \in A \\ 0 & \text{als } \omega \in A^c. \end{cases}$$

$\mathbf{1}_A$ heet de *indicator* (aanwijzer) van $A$. Van deze stochast kunnen we de kansverdeling eenvoudig bepalen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathbf{1}_A{=}1] &= \mathbb{P}(A); \\ \mathbb{P}[\mathbf{1}_A{=}0] &= \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Indicatoren worden vaak gebruikt om berekeningen waarin een discrete stochast $X$ voorkomt, te vereenvoudigen. Men kan namelijk $X$ "ontbinden" m.b.v. indicatoren:

$$X = \sum_{x \in W} x \cdot \mathbf{1}_{[X=x]}$$

waar $W$ de waardenverzameling van $X$ is. Controleer deze identiteit. Later komen we hierop terug.

**2.15** Een stochast $X$ die slechts de waarden 0 en 1 aanneemt heet *alternatief verdeeld.* Als $\mathbb{P}[X{=}1] = p$ (en dus $\mathbb{P}[X{=}0] = 1{-}p$), dan zeggen we dat $X$ alternatief verdeeld is met parameter $p$. We schrijven wel: $X \sim \mathrm{Alt}(p)$.
Uit paragraaf 2.14 volgt dat voor gebeurtenissen $A$ geldt:

$$\mathbf{1}_A \sim \mathrm{Alt}(\mathbb{P}(A)).$$

**2.16** Stel we hebben een experiment met uitkomstenruimte $\Omega$, en daarbij twee discrete stochasten $X$ en $Y$ met waardenverzameling $V$ resp. $W$. Dan kunnen we $(X, Y)$ opvatten als een discrete stochast met waarden in (een deelverzameling van) $V \times W$. Ook deze nieuwe stochast is discreet en heeft een kansverdeling, nl.:

$$\mathbb{P}[(X,Y) = (x,y)] = \mathbb{P}[X{=}x \text{ en } Y{=}y]$$

(voluit: $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x \text{ en } Y(\omega) = y\})$). Deze kansverdeling heet de *simultane kansverdeling* van de stochasten $X$ en $Y$. De kansverdeling van de stochast $X$ alleen noemt men de *marginale kansverdeling* van $X$.
**Voorbeeld.** Werp twee dobbelstenen. Uitkomst: $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Zij $X_1$ het aantal ogen van de eerste worp: $X_1(\omega) = \omega_1$, en evenzo $X_2(\omega) = \omega_2$, en zij $X$ de som der beide worpen: $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$. Dan is de simultane kansverdeling van $X_1$ en $X_2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_1, X_2) = (x_1, x_2)] &= \\ \mathbb{P}[X_1{=}x_1 \text{ en } X_2{=}x_2] &= \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{als } x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\} \\ 0 & \text{anders;} \end{cases} \end{aligned}$$

de simultane kansverdeling van $X_1$ en $X$ is:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[(X_1, X) = (x, y)] &= \\ \mathbb{P}[X_1{=}x \text{ en } X_2{=}y - x] &= \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{als } x, y{-}x \in \{1, \ldots, 6\} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}\end{aligned}$$

De marginale kansverdelingen van $X_1$ en $X_2$ kennen we natuurlijk allang:

$$\mathbb{P}[X_1{=}x] = \tfrac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}[X_2{=}x] = \tfrac{1}{6}$$

als $x = 1, \ldots, 6$. De marginale kansverdeling van $X$ heb je in paragraaf 2.13 uitgerekend.

## 2.17 Discreet of niet discreet.

In een aftelbare uitkomstenruimte krijg je de kans op een gebeurtenis $A$ door de kansen $p_\omega$ van de afzonderlijke uitkomsten waarbij $A$ gerealiseerd wordt bij elkaar op te tellen (zie paragraaf 2.8). Dit recept geldt alleen voor de zogenaamde *discrete situatie*, waarbij de totale "kansmassa" (1 dus) opgedeeld is in discrete porties $p_\omega$ ("puntmassa's") geconcentreerd in afzonderlijke punten $\omega$ van $\Omega$. Deze punten, het zijn er hoogstens aftelbaar veel, vormen een verzameling $D$ (de zogenaamde drager van de kansmaat) die alle kans opslokt: $\mathbb{P}(D) = \sum_{\omega \in D} p_\omega = 1$. Dus $\mathbb{P}(\Omega \setminus D) = 0$. Het kan zijn dat $D = \Omega$, maar dat hoeft niet, het is best mogelijk dat $D = \mathbb{N}$ en $\Omega = \mathbb{R}$.

Naast deze discrete situatie zullen we ons verderop (hoofdstuk 8 en verder) uitgebreid bezighouden met situaties waarbij de kansmassa continu (men zegt ook wel diffuus) is uitgespreid over de uitkomstenruimte, die dan noodzakelijk overaftelbaar is. Karakteristiek daarbij is dat iedere afzonderlijke uitkomst kans nul krijgt: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$ voor iedere $\omega \in \Omega$.

Een eenvoudig, maar belangrijk voorbeeld is het volgende:

## 2.18 Uniforme toevalsgetallen (Uniform Random Numbers).

De uitkomstenruimte bestaat nu uit het interval $[0, 1]$ in de reële getallen, $\Omega = [0, 1]$. De kansmaat $\mathbb{P}$ is zodanig dat voor ieder interval $I = (a, b)$ (en ook voor elk interval $[a, b]$) geldt: $\mathbb{P}(I) = b - a$, de lengte van $I$.

Dit is wat gewoonlijk bedoeld wordt wanneer men het heeft over het kiezen (eventueel door het toeval) van een willekeurig reëel getal tussen 0 en 1.

Definieer je bij deze uitkomstenruimte de stochast $U$ door $U(\omega) = \omega$, dan geldt:

$\mathbb{P}[a < U < b] = b - a$ als $0 \leq a \leq b \leq 1$ en $\mathbb{P}[U \leq x] = \mathbb{P}[U < x] = x$ voor $x \in [0, 1]$.
Zo'n stochast $U$ noemt men uniform verdeeld over $[0, 1]$; notatie: $U \sim \mathrm{Un}(0, 1)$.
**Toepassing.** Treinen in de richting Juistweg vertrekken van station Netgemist met tussenpozen van precies een uur. Zonder het spoorboekje te raadplegen ga je op goed geluk naar het station. Je hoeft hoogstens een uur te wachten op de eerstvolgende trein naar Juistweg. Het kan zijn dat je minder dan 20 minuten moet wachten, maar net zo goed kan je wachttijd meer dan 40 minuten zijn. Het lijkt redelijk om aan te nemen dat de wachttijd $U$ (in uren) uniform$(0, 1)$ verdeeld is.
**Opmerking.** Er is hier sprake van idealisering. In de werkelijkheid zul je de wachttijd hoogstens tot op één minuut nauwkeurig willen weten. De wachttijd (in uren) wordt dan beschreven door de discrete stochast $U'$ met $\mathbb{P}[U' = \frac{k}{60}] = \frac{1}{60}$ voor $k = 0, 1, \ldots, 59$.
Iemand anders wil de wachttijd op de seconde nauwkeurig hebben, dat geeft een andere beschrijving. Het zal duidelijk zijn dat de geïdealiseerde continue beschrijving hier het voordeel van de eenvoud heeft.

## 2.19 Simulatie.

Computers (en zelfs zakrekenmachientjes met een knopje RND of RAN) kunnen op aanroep een getal tussen 0 en 1 produceren, dat dienst kan doen als uniform toevalsgetal. Bij benadering tenminste, want het geproduceerde getal heeft een beperkt aantal decimalen, 8 bijvoorbeeld, zodat we in feite een discrete stochast hebben met $10^8$ mogelijke waarden, waarvan we hopen dat ze allemaal dezelfde kans hebben.
Heb je een stochast $U \sim \mathrm{Un}(0, 1)$ dan kun je daarmee stochasten maken met iedere gewenste verdeling, zowel discreet als continu. Het werpen van een dobbelsteen kan als volgt nagebootst (gesimuleerd) worden:
Laat $U$ het door de computer geproduceerde toevalsgetal zijn. Stel $X = [6U] + 1$.
Ga na dat $\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}[\frac{k-1}{6} \leq U < \frac{k}{6}] = \frac{1}{6}$ als $U \sim \mathrm{Un}(0, 1)$.
Bedenk zelf een recept voor een stochast $Y \sim \mathrm{Alt}(p)$ (wat denk je van $Y = [U + p]$?).

**2.20 Intuïtieve achtergrond van het kansbegrip.** Als je 600 keer een eerlijke dobbelsteen gooit, hoe vaak verwacht je dan vijf ogen te gooien? Een redelijk antwoord lijkt: ongeveer 100 keer, waarbij je met "ongeveer" zou kunnen bedoelen dat het wel gek moet gaan als je minder dan 70 of meer dan 130 keer vijf ogen krijgt. Experimenteel blijkt dat dergelijke relatief grote afwijkingen inderdaad weinig voorkomen. Dit ervaringsfeit staat bekend als de *Experimentele wet van de grote aantallen.*

Als je 6 keer een dobbelsteen gooit, hoe vaak verwacht je dan vijf ogen te gooien? "Gemiddeld één keer" lijkt een redelijk antwoord, maar relatief grote afwijkingen als nul keer of twee keer zijn zeer wel mogelijk (kans ongeveer 0,33 resp. 0,20).
Het begrip kans zegt dus i.h.a. weinig over de uitkomst van één enkel experiment, maar krijgt pas betekenis als het experiment heel vaak herhaald wordt.
Zij $n$ het aantal experimenten, en $n_A$ het aantal experimenten daaronder die gebeurtenis $A$ opleveren. Dan zal het frequentiequotiënt $\frac{n_A}{n}$ met grote kans dicht bij $\mathbb{P}(A)$ liggen als $n$ groot is.
De precieze formulering van deze uitspraak staat bekend als de *Theoretische (zwakke) wet van de grote aantallen*; deze stelling zullen we in hoofdstuk 6 bewijzen.

Voor gebeurtenissen met zeer kleine of zeer grote kans, kan men wèl een zinnige voorspelling doen over de uitkomst van één enkel experiment. Als de kans op een gebeurtenis $A$ bijvoorbeeld kleiner is dan 0,001, dan zegt men wel: we mogen er op vertrouwen, dat $A$ bij eenmalige uitvoering van het experiment niet optreedt, dat risico kunnen we wel nemen.
Verzin zelf een interpretatie voor het geval dat $\mathbb{P}(A) > 0,999$.

**Opgaven**

1. Laat $A$, $B$ en $C$ willekeurige gebeurtenissen zijn. Druk de volgende gebeurtenissen in $A$, $B$ en $C$ uit:

   (a) Geen van de drie (treedt op);

   (b) Precies één van de drie;

   (c) Minstens twee van de drie.

2. Bewijs de formules in paragraaf 2.6.

3. Bewijs:

   (a) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$;

   (b) $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

4. Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \sum_{k\leq n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k_1<k_2\leq n} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2}) \\ &\quad + \sum_{k_1<k_2<k_3\leq n} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) - \ldots \\ &\quad - (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).\end{aligned}$$

   Deze generalisatie van 2.6(d) en (f) noemt men wel de "regel van inclusie en exclusie".

5. Lootjes trekken. $n$ personen besluiten lootjes te trekken voor Sinterklaas. Wat is de kans dat minstens één van de personen het lootje met zijn eigen naam trekt (en er dus opnieuw getrokken moet worden)?
   Aanwijzing: Neem $A_i = [i^{\mathrm{e}}$ persoon trekt zijn eigen lootje$]$. Gebruik de regel van inclusie en exclusie. Antwoord:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

   (voor grote $n$ is dit ongeveer $1 - \frac{1}{e}$).

6. We werpen twee dobbelstenen en noteren de uitkomst als $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. $X$ is het verschil tussen de beide worpen: $X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|$. Bepaal de kansverdeling van $X$.

7. Bewijs 2.7(a) en (b). Aanwijzing bij (b): Zij $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \cup B_{n-1} (n \geq 2)$, dan is de rij $B_1, B_2, \ldots$ monotoon stijgend en $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ en $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.
8. Bewijs:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
9. Jan en Piet werpen om de beurt een dobbelsteen. Jan begint. Degene die als eerste een zes gooit, wint.
   (a) Bepaal de kans dat Jan wint. Aanwijzing: neem $\Omega = \{1, 2, \ldots, \infty\}$. Uitkomst $k \in \mathbb{N}$ betekent: eerste zes bij de $k^{\mathrm{e}}$ worp. De kans hierop is $\frac{5^{k-1}}{6^k}$. Uitkomst $\infty$ betekent: er wordt nooit een zes gegooid.
   (b) Bewijs zo ook dat de kans dat Jan of Piet wint, 1 is.
10. $A$ en $B$ komen (onafhankelijk van elkaar) tussen 0 en 1 uur binnen in café "Houdoe". Neem voor $\Omega$ het vierkant van alle punten $(x, y)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, waarin $x$ en $y$ de aankomsttijden van $A$ en $B$ voorstellen. Veronderstel dat de kans dat het punt $(x, y)$ in zeker deel van $\Omega$ valt, evenredig is met de oppervlakte van dat deel. $A$ en $B$ blijven ieder een kwartier in het café. Bepaal de kans dat ze elkaar daar aantreffen.
11. $n$ rode en $n$ blauwe kralen worden in een kring gelegd ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Zij $X$ het aantal der rode kralen die minstens één rode buurkraal hebben. Bepaal $\mathbb{P}[X{=}1]$ en $\mathbb{P}[X{=}0]$.
12. In een dichtgevouwen hand bevinden zich tien touwtjes die elk met één uiteinde boven de hand en met het andere uiteinde onder de hand uitsteken. De tien bovenuiteinden worden twee aan twee aan elkaar gebonden; idem voor de tien onderuiteinden. Wat is de kans dat de tien touwtjes, na opening van de hand, samen één gesloten ring vormen?
13. Er worden 12 dobbelstenen geworpen. Er zijn nu twee mogelijkheden: Alle getallen van 1 t/m 6 komen minstens één keer in de worp voor, of van de getallen 1 t/m 6 komen er één of meer niet voor in de worp.
    Welke gebeurtenis heeft de grootste kans?
    Aanwijzing. Stel $A_i = [i$ ogen komt niet voor$]$, en gebruik de ongelijkheid van opgave 3(b).

# Hoofdstuk 3

# Onafhankelijkheid

## Voorwaardelijke kansen

**3.1 Voorbeeld:** We kunnen de nederlandse bevolking enerzijds indelen naar mannen en vrouwen; anderzijds naar personen onder de 65 jaar en personen van 65 jaar en ouder. De volgende tabel[1] geeft een overzicht van deze gegevens voor 1990:

| % | $< 65$ | $\geq 65$ | Totaal |
|---|---|---|---|
| Man | 44,3 | 5,1 | 49,4 |
| Vrouw | 42,9 | 7,7 | 50,6 |
| Totaal | 87,2 | 12,8 | 100,0 |

Als we een willekeurige Nederlander aanwijzen, hoe groot is dan de kans dat die 65 jaar of ouder is?
Als er niets bekend zou zijn, dan is de kans op $B =$ [65 of ouder] gelijk aan 12,8%. Weten we echter dat deze Nederlander een vrouw is, dus dat $A =$ [vrouw] optreedt, dan is het veel waarschijnlijker geworden, dat deze persoon 65 jaar of ouder is. Immers, voor 15,2% van de vrouwen uit $A$ geldt, dat ze 65 jaar of ouder zijn. Het ligt dus voor de hand om te zeggen: de kans dat de persoon 65 jaar of ouder is als *gegeven* is dat de persoon een vrouw is, is 15,2%.
Het woordje "als" geeft hier aan dat we te doen hebben met een zogenaamde voorwaardelijke kans: de voorwaardelijke kans op $B$, gegeven $A$. Die kans vinden we dus door binnen $A$ (de voorwaarde) te kijken welke uitkomsten bovendien tot $B$, dus tot $A \cap B$ behoren.

**3.2 Definitie:** Zij $A$ een gebeurtenis met $\mathbb{P}(A) \neq 0$. We definiëren dan de *voorwaardelijke kans op $B$ gegeven $A$*, notatie $\mathbb{P}(B|A)$, als volgt:

[1]Gegevens ontleend aan: Statistisch Jaarboek 1991, Centraal Bureau voor de Statistiek.

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.}$$

In feite verklein je zo de uitkomstenruimte $\Omega$ tot de uitkomstenruimte $A$.
Het is gebruikelijk om in het geval dat $\mathbb{P}(A) = 0$ te zeggen dat $\mathbb{P}(B|A)$ niet gedefinieerd is. Voor zulke $A$ is de definitie immers zinloos geworden.
Maar de formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$ die je uit de definitie kunt afleiden, is wèl geldig voor $A$ met $\mathbb{P}(A) = 0$, immers, dan is ook $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
**Voorbeeld.** Laat $A$ en $B$ als in paragraaf 3.1. Dan is $\mathbb{P}(B|A) = 15{,}2\%$, en $\mathbb{P}(A|B) = 60{,}2\%$. Merk op dat $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(A|B)$!

**3.3** De 52 kaarten van het kaartspel zijn op twee manieren in te delen: naar soort (♠, ♡, ♢, ♣) en naar rang (aas, heer,. . . ,2). Iemand neemt blindelings een kaart uit de stapel en zegt dat het ♣ is. Geeft deze mededeling ons enige informatie over de rang van de getrokken kaart, bijvoorbeeld, of deze kaart een boer is? Nee: binnen iedere kleur is de verdeling over de rangen precies dezelfde. In meer wiskundige termen: $\mathbb{P}$(Boer|♣) = $\mathbb{P}$[Boer], en dus: $\mathbb{P}$[♣ Boer] = $\mathbb{P}$[♣] · $\mathbb{P}$[Boer].
Blijkbaar beïnvloeden de gebeurtenissen [Boer] en [♣] elkaar niet. We zullen zulke "dwars door elkaar heenlopende" gebeurtenissen onafhankelijk noemen.

| | ♠ | ♡ | ♢ | ♣ |
|---|---|---|---|---|
| Aas | | | | |
| Heer | | | | |
| Vrouw | | | | |
| Boer | | | | ♣B |
| 10 | | | | |
| 9 | | | | |
| 8 | | | | |
| 7 | | | | |
| 6 | | | | |
| 5 | | | | |
| 4 | | | | |
| 3 | | | | |
| 2 | | | | |

Merk op dat we eigenlijk $\mathbb{P}$([Boer]|[♣]) zouden moeten schrijven. We zullen echter, om een woud van haakjes en haken te vermijden, de notatie $\mathbb{P}$(Boer|♣) aanhouden.

## Onafhankelijkheidsdefinities

**3.4 Definitie.** Stel $A$ en $B$ zijn gebeurtenissen. We noemen $A$ en $B$ *onafhankelijk*, notatie $A \perp\!\!\!\perp B$, als

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Als de gebeurtenissen $A$ en $B$ niet onafhankelijk zijn, dan noemen we ze *afhankelijk*.

Merk op dat voor gebeurtenissen $A$ en $B$ geldt:

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

(als tenminste $\mathbb{P}(A) \neq 0$) en ook:

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

(als tenminste $\mathbb{P}(B) \neq 0$).
De mededeling $A \perp\!\!\!\perp B$ wil dus zoiets zeggen als: $A$ en $B$ beïnvloeden elkaar niet, de kans dat $B$ optreedt hangt niet af van het optreden van $A$, en andersom.
Het begrip onafhankelijkheid is de kern van de kansrekening.
**Voorbeelden.** De gebeurtenissen $A$ en $B$ uit paragraaf 3.1 zijn niet onafhankelijk; de gebeurtenissen [boer] en [♣] uit paragraaf 3.3 zijn het wel.

**3.5** Het is intuïtief duidelijk, dat als het optreden van $A$ het optreden van $B$ niet beïnvloedt, het optreden van $A$ ook geen invloed heeft op het niet-optreden van $B$, en andersom. Dit valt wiskundig ook precies te maken:
**Stellinkje.** Stel $A$ en $B$ zijn gebeurtenissen zo dat $A \perp\!\!\!\perp B$. Dan geldt ook $A \perp\!\!\!\perp B^c$, $A^c \perp\!\!\!\perp B$ en $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$.
Je mag dit zelf bewijzen, in opgave 1.

### 3.6 Partities.

We komen nog even terug op het kaartenvoorbeeld uit paragraaf 3.3. We trokken reeds de conclusie, dat de gebeurtenis [Boer] geen invloed heeft op de gebeurtenis [♣].
Maar dat geldt natuurlijk ook voor elke andere combinatie van rang en kleur. We kunnen, meer algemeen, stellen dat de indeling van het kaartspel in rangen niets te maken heeft met de indeling van het kaartspel in kleuren.
We zullen dat nu wiskundig precies maken. Daarvoor de volgende
**Definitie.** Een *partitie (indeling, opsplitsing)* $\alpha$ van $\Omega$ is een stel disjuncte gebeurtenissen $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots\}$ (aftelbaar of eindig veel) zó dat $\bigcup_k A_k = \Omega$.

**3.7 Definitie.** We noemen twee partities $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots\}$ en $\beta = \{B_1, B_2, \ldots\}$ *onafhankelijk* als voor elke gebeurtenis $A \in \alpha$ en elke gebeurtenis $B \in \beta$ geldt dat $A \perp\!\!\!\perp B$. Notatie: $\alpha \perp\!\!\!\perp \beta$.
**Voorbeeld.** De partities van het kaartspel naar kleur en rang zijn onafhankelijk, want bv. $\mathbb{P}[\heartsuit \text{ Aas}] = \mathbb{P}[\heartsuit] \cdot \mathbb{P}[\text{Aas}]$ ($\frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13}$). Binnen iedere kleur komen evenveel

azen voor, of ook: binnen iedere rang komen evenveel $\heartsuit$ voor.
Ook het Amerikaanse leger is in te delen naar kleur en rang. Zouden dit ook onafhankelijke partities zijn?
**Gevolg.** Als $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots\}$ en $\beta = \{B_1, B_2, \ldots\}$ onafhankelijke partities zijn, en $A$ is vereniging van een stel elementen van $\alpha$, en $B$ is vereniging van een stel elementen van $\beta$, dan is $A \perp\!\!\!\perp B$.
Bewijs dit zelf (opgave 12).
**Toepassing.** Werp twee dobbelstenen, met aantal ogen $X_1$ resp. $X_2$. In de uitkomstenruimte $\Omega$ van de 36 punten $(i, j)$ (met $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) hebben we de onafhankelijke partities $\alpha = \{A_1, \ldots, A_6\}$ en $\beta = \{B_1, \ldots, B_6\}$ met $A_k = [X_1{=}k]$ en $B_k = [X_2{=}k]$. Dan geldt bijvoorbeeld: $\mathbb{P}[X_1 \text{ is even en } X_2 \leq 3] = \mathbb{P}[X_1 \text{ is even}] \cdot \mathbb{P}[X_2 \leq 3]$.
Hier is $[X_1 \text{ is even}] = A_2 \cup A_4 \cup A_6$ de vereniging van een stel elementen van $\alpha$; evenzo is $[X_2 \leq 3] = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.
**Opmerking.** In paragraaf 3.5 hebben we gezien:
De gebeurtenissen $A$ en $B$ zijn onafhankelijk $\Leftrightarrow$ de partities $\{A, A^c\}$ en $\{B, B^c\}$ zijn onafhankelijk.

**3.8** Bij iedere discrete stochast hoort een partitie van $\Omega$. Zij nl. $X$ een discrete stochast met waardenverzameling $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Dan vormen de gebeurtenissen $A_k = [X{=}x_k]$ een partitie $\alpha(X) = \{A_1, A_2, \ldots\}$ van $\Omega$. $\alpha(X)$ heet de *partitie voortgebracht door* $X$.
$X$ is te schrijven als $X = \sum_k x_k \mathbf{1}_{A_k}$ (zie paragraaf 2.14).
**Voorbeeld.** Neem $X_1$ en $X_2$ als in paragraaf 3.7, en zij $Y = \max\{X_1, X_2\}$. Teken $\Omega$ als een $6 \times 6$ rooster, en teken daarin de elementen van $\alpha(X_1)$ en $\alpha(Y)$.

## 3.9 Onafhankelijke stochasten.

**Definitie.** We noemen de discrete stochasten $X$ en $Y$ *onafhankelijk* als de partities $\alpha(X)$ en $\alpha(Y)$ onafhankelijk zijn. Notatie: $X \perp\!\!\!\perp Y$.
Als $V$ de waardenverzameling van $X$ is en $W$ de waardenverzameling van $Y$, dan is onafhankelijkheid van $X$ en $Y$, volgens de definities, equivalent met

$$\mathbb{P}[X{=}x \text{ en } Y{=}y] = \mathbb{P}[X{=}x] \cdot \mathbb{P}[Y{=}y]$$

voor alle $x \in V$ en alle $y \in W$.
**Voorbeeld:** $X_1$, $X_2$ en $Y$ zijn als in de paragrafen 3.7 en 3.8. De stochasten $X_1$ en $X_2$ zijn onafhankelijk, want voor elke keuze van $x, y \in \{1, \ldots, 6\}$ is

$$\mathbb{P}[X_1{=}x \text{ en } X_2{=}y] = \tfrac{1}{36}$$

en

$$\mathbb{P}[X_1{=}x] = \mathbb{P}[X_2{=}y] = \tfrac{1}{6}.$$

De stochasten $X_1$ en $Y$ zijn niet onafhankelijk, want bv. $\mathbb{P}[X_1{=}6, Y{=}4] = 0$ terwijl $\mathbb{P}[X_1{=}6] \cdot \mathbb{P}[Y{=}4] \neq 0$.
Laat zelf zien dat ook $Y$ en $Z = |X_1 - X_2|$ afhankelijk zijn.
**Opmerking.** Als $X$ en $Y$ onafhankelijke stochasten zijn, dan zijn ook $f(X)$ en $g(Y)$ onafhankelijke stochasten (voor alle functies $f$ en $g$).
**Opmerking.** Als $A$ en $B$ gebeurtenissen zijn, dan komt onafhankelijkheid van de stochasten $\mathbf{1}_A$ en $\mathbf{1}_B$ precies neer op onafhankelijkheid van de gebeurtenissen $A$ en $B$ (vergelijk het stellinkje in 3.5).

### 3.10 Meerdere onafhankelijke gebeurtenissen.

**Definitie.** De gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_n$ noemen we *onafhankelijk* als voor elke greep $i_1, \ldots, i_k$ uit $\{1, \ldots, n\}$ geldt:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

**Voorbeeld:** $A$, $B$ en $C$ zijn, per definitie, onafhankelijke gebeurtenissen als $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$ en $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$.
Het is dus in het algemeen *niet* voldoende als alleen aan $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$ is voldaan, hetgeen je misschien vooronderstelde; opgave 2 laat hiervan een voorbeeld zien.
Als de vermenigvuldigingsregel in de definitie wèl geldt voor paren, maar eventueel niet voor grotere grepen, dan noemt men de gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_n$ *paarsgewijs onafhankelijk*.
Dat dit echt zwakker is dan "gewoon" onafhankelijk, kun je ervaren in opgave 3.

### 3.11 Meerdere onafhankelijke partities en stochasten.

**Voorbeeld.** We doen $n$ worpen met een dobbelsteen. De uitkomstenruimte $\Omega$ bestaat uit $6^n$ rijtjes $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. $X_k$ is het aantal ogen van de $k^{\text{e}}$ worp, en dus gedefinieerd door $X_k(\omega) = \omega_k$.
Dan is $\alpha(X_k) = \{A_1^{(k)}, \ldots, A_6^{(k)}\}$, waarin bv. $A_2^{(k)} = [X_k{=}2]$ de verzameling is van alle $6^{n-1}$ rijtjes $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ met $\omega_k = 2$.
We hebben dan $n$ partities, die op grond van de volgende definitie onafhankelijk zijn.

**Definitie.** De partities $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ zijn *onafhankelijk* als voor alle gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_n$ met $A_1 \in \alpha^{(1)}$, $A_2 \in \alpha^{(2)}, \ldots, A_n \in \alpha^{(n)}$ geldt:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

Ga na dat de definitie van onafhankelijkheid voor twee partities in 3.7 een speciaal geval is van de definitie hierboven.
Op dezelfde manier als in 3.9 definiëren we nu onafhankelijkheid van meerdere stochasten.
**Definitie.** De discrete stochasten $X_1, \ldots, X_n$ zijn *onafhankelijk* als de partities $\alpha(X_1), \ldots, \alpha(X_n)$ onafhankelijk zijn.
Is $W_1$ de waardenverzameling van $X_1$, $W_2$ de waardenverzameling van $X_2, \ldots$, en $W_n$ de waardenverzameling van $X_n$, dan is onafhankelijkheid van $X_1, \ldots, X_n$ weer equivalent met:

$$\mathbb{P}[X_1{=}w_1 \text{ en } \ldots \text{ en } X_n{=}w_n] = \mathbb{P}[X_1{=}w_1] \cdots \mathbb{P}[X_n{=}w_n]$$

voor alle $w_1 \in W_1$, alle $w_2 \in W_2, \ldots$, en alle $w_n \in W_n$.
Ook de definitie van onafhankelijkheid van meerdere stochasten is weer een uitbreiding van de definitie van onafhankelijkheid van twee stochasten.
**Opmerking.** Er geldt:

$$\text{De stochasten } X_1, \ldots, X_n \text{ zijn onafhankelijk}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)$$

voor iedere keuze van gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_n$ zó, dat $A_1$ alleen afhangt van $X_1$ (bv. $A_1 = [X_1 \leq -5]$), $A_2$ alleen van $X_2$, enzovoorts.

**3.12** Soms kijken we naar nóg grotere collecties gebeurtenissen, partities en stochasten.
Aftelbaar veel gebeurtenissen $A_1, A_2, \ldots$ noemen we *onafhankelijk* als elk eindig stel gebeurtenissen eruit onafhankelijk is.
Net zo voor partities en stochasten.

**3.13** Voor de volledigheid vermelden we nog enige eigenschappen van onafhankelijkheid.

**(a)** Een deelcollectie van een stel onafhankelijke stochasten (of partities, of gebeurtenissen) is ook weer onafhankelijk.

**(b)** Als $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke stochasten zijn, en $Y = f(X_1, \ldots, X_k), Z = g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$, dan $Y \perp\!\!\!\perp Z$.

## De binomiale verdeling

**3.14 Rijen onafhankelijke experimenten.** We hebben nu voldoende gereedschap m.b.t. onafhankelijkheid verzameld om een wiskundig model af te kunnen leiden voor rijen onafhankelijke experimenten.

Wanneer men bij een aantal toevalsexperimenten, die na of naast elkaar gedaan worden, mag aannemen dat er geen verband bestaat tussen de uitkomsten van verschillende experimenten, en men heeft een stel stochasten $X_1, X_2, \ldots$ zó, dat $X_k$ slechts bepaald wordt door de uitkomst van het $k^{\text{e}}$ experiment, dan mag men aannemen dat $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijke stochasten zijn. We spreken dan ook van onafhankelijke experimenten.

Als $\Omega_k$ de uitkomstenruimte van het $k^{\text{e}}$ experiment is, dan kunnen we de hele (aftelbare) rij experimenten opvatten als één groot experiment met uitkomstenruimte $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots$, waarvan de elementen rijen $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ zijn. Hierin is $\omega_k$ de uitkomst van het $k^{\text{e}}$ experiment. Zie het voorbeeld in paragraaf 3.11, waar $\Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = \Omega_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**3.15 De binomiale verdeling.**

We hebben $n$ onafhankelijke experimenten. Bij ieder experiment kan een zeker resultaat optreden, dat we een succes zullen noemen, en wel steeds met dezelfde kans $p$. Met kans $q$ $(= 1-p)$ treedt géén succes ("mislukking") op. We willen de kansverdeling bepalen van $X$, het aantal successen. $X$ neemt waarden aan in $\{0, 1, \ldots, n\}$.

**Voorbeelden:**

1. $X$ is het aantal zessen in $n$ worpen met een dobbelsteen.

2. $X$ is het aantal kop in $n$ worpen met een munt.

3. De deelnemers aan de voetbaltoto voorspellen van 12 wedstrijden, club $A$ tegen club $B$, de uitslag: $A$ wint, $B$ wint, of gelijkspel. Vult men het formulier in m.b.v een dobbelsteen (1 of 2 ogen: $A$ wint; 3 of 4 ogen: $B$ wint; 5 of 6 ogen: gelijkspel), dan is voor iedere wedstrijd de kans op een juiste voorspelling $\frac{1}{3}$. Het gaat nu om $X$, het aantal juiste voorspellingen. $X = 12$ betekent de hoofdprijs.

Laat $X_k$ de stochast zijn die de waarde 1 of 0 aanneemt al naargelang het $k^{\mathrm{e}}$ experiment een succes oplevert of niet. $X_k$ is dus de indicator van de gebeurtenis $A_k =$[het $k^{\mathrm{e}}$ experiment levert een succes op]. Dan is $X_1 + \ldots + X_n$ het aantal successen. De stochasten $X_1, \ldots, X_n$ hebben de volgende eigenschappen:
(a) $X_1, \ldots, X_n$ zijn onafhankelijk;
(b) $X_k \sim \mathrm{Alt}(p)$ voor $k = 1, \ldots, n$.
We leiden nu af dat $X = X_1 + \ldots + X_n$ binomiaal verdeeld is met parameters $n$ en $p$ (notatie: $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$):

$$\mathbb{P}[X{=}k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

voor $k = 0, 1, \ldots, n$. Het bewijs is in wezen hetzelfde als in paragraaf 1.10.
$[X{=}k]$ treedt op bv. als de eerste $k$ experimenten successen opleveren en de overige $n - k$ mislukkingen. De kans hierop is wegens de onafhankelijkheid $p^k q^{n-k}$. Maar ook een willekeurige andere $k$-greep uit de $n$ experimenten kan voor de $k$ successen zorgen; en er zijn $\binom{n}{k}$ van die grepen.
We hebben zo de volgende stelling bewezen.
**Stelling.** Als $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn, $X_k \sim \mathrm{Alt}(p)$ voor elke $k$, en $X = X_1 + \ldots + X_n$, dan is $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

**Opgaven**

1. Bewijs het stellinkje in paragraaf 3.5.

2. Voor onafhankelijkheid van de gebeurtenissen $A$, $B$ en $C$ is in het algemeen niet voldoende dat $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$. Laat dit zien aan de hand van drie muntworpen, waarin $A =$[eerste worp geeft kop], $B =$[meer keren kop dan munt], $C =$[de laatste twee worpen geven dezelfde uitkomst].

3. Het licht op de overloop op de eerste verdieping kan in veel huizen op twee plaatsen bediend worden: zowel beneden als op de overloop zelf is een lichtschakelaar aangebracht. Beide lichtschakelaars kunnen in twee standen staan: "naar boven" ("0") en "naar beneden" ("1") gericht. Doordat er twee schakelaars zijn, valt uit de stand van één schakelaar niet af te leiden of het licht op de overloop brandt of niet.
   Laat $X_1$ de stand van de schakelaar beneden zijn, en $X_2$ de stand van de schakelaar op de overloop zelf. We nemen aan dat het licht op de overloop brandt, precies wanneer beide schakelaars in dezelfde stand staan.
   Zij $A = [X_1{=}1]$, $B = [X_2{=}1]$, $C =$ [Het licht op de overloop brandt]. Ga na dat $A$, $B$ en $C$ wel paarsgewijs onafhankelijk zijn, maar niet "echt" onafhankelijk.

4. Een test bestaat uit 10 ja-nee vragen. Iemand die van toeten noch blazen weet, besluit de vragen op goed geluk te beantwoorden. We geven hem bij iedere vraag een kans $\frac{1}{2}$ op een goed antwoord. Bepaal de kans op 8 of meer goede antwoorden.

5. Men werpt $n$ munten op. Hoe groot is de kans dat het aantal kop even is? (Het antwoord is een eenvoudig rationaal getal)

6. Bepaal de kans op 11 of 12 goed bij de voetbaltoto.

7. Rijexamen. Veronderstel dat bij elk examen de kans om te slagen $p$ is ($0 < p < 1$) en dat de resultaten van opvolgende examens onderling onafhankelijk zijn. Laat $Y$ het aantal examens zijn dat iemand nodig heeft om te slagen. Bepaal de kansverdeling van $Y$, en $\mathbb{P}[Y < \infty]$. $Y$ noemt men *geometrisch verdeeld*.

8. In een rij onafhankelijke proeven met kans $p$ op succes zij $Y_n$ het aantal proeven dat men moet doen om $n$ successen te behalen. Bereken $\mathbb{P}[Y_n{=}k]$.

9. Laat in de vorige opgave $X_1$ het aantal proeven tot en met het eerste succes zijn, $X_2$ het aantal proeven dat na het eerste succes nodig is om het tweede succes te bereiken, enz., zodat $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$. Bewijs dat $X_1$, $X_2$ en $X_3$ onafhankelijk zijn en alle drie dezelfde kansverdeling hebben.

10. Laat $X_0, X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke stochasten zijn, met $X_k \sim \text{Alt}(p)$ voor elke $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Hierin is $p \in [0, 1]$. Definieer $Y_k = |X_k - X_{k-1}|$ voor $k \in \{1, \ldots, n\}$. Voor welke waarden van $p$ zijn $Y_1, \ldots, Y_n$ onafhankelijk?

11. Bewijs: Als $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ en $X$ en $Y$ onafhankelijk, dan $X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$.

12. Bewijs het "gevolg" in paragraaf 3.7

# Hoofdstuk 4

# Verwachtingswaarde

**4.1** Huygens begint zijn verhandeling met het volgende principe:
1e Voorstel: Als ick gelijcke kans hebbe om $a$ of $b$ te hebben, dit is my so veel weerdt als $\frac{a+b}{2}$.
By exempel, so yemandt sonder mijn weeten in d'eene handt 3 schellingen verbergt, en in d'andere 7 schellingen, ende my te kiesen geeft welck van beyde ick begeere te hebben, ick segge dit my even soo veel weerdt te zijn als of ick 5 schellingen seecker hadde.

**4.2 Voorbeelden.**

**(a)** Bij een zeker kaartspel wint men *f* 1,– met kans $\frac{1}{2}$, *f* 2,50 met kans $\frac{1}{5}$, *f* 100,– met kans $\frac{1}{100}$. Men moet $x$ gulden betalen om mee te mogen doen.
Bij welke waarden van $x$ is het voordelig om mee te doen? Bij welke waarden van $x$ wordt er (op den duur althans) winst gemaakt door degene die het spel organiseert?

**(b)** In $n$ worpen met een scheve dobbelsteen hebben we $n_i$ keer het resultaat $i$ ogen gekregen ($i$ =1,2,3,4,5,6). Ons gemiddelde is dan: het totaal gedeeld door $n$, dat is

$$\frac{1}{n}(n_1 \times 1 + n_2 \times 2 + \ldots + n_6 \times 6) =$$
$$1 \cdot \frac{n_1}{n} + 2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots + 6 \cdot \frac{n_6}{n}.$$

Als $n$ groot is, dan verwachten we op grond van de Experimentele wet van de grote aantallen (zie paragraaf 2.20) dat het frequentie-quotiënt $\frac{n_i}{n}$ dicht bij $p_i$, de kans op $i$ ogen, zal liggen. Dan zal het gemiddelde ook dicht bij $\sum_{i=1}^{6} ip_i$ liggen. Deze laatste uitdrukking is een soort ideaal gemiddelde: de verwachtingswaarde. Gewone gemiddelden, bepaald met eindig veel worpen, zijn benaderingen (die nog van het toeval afhangen) voor dit ideale gemiddelde.

## Definitie en eigenschappen

**4.3 Definitie.** Laat $X$ een discrete stochast zijn met waardenverzameling $W$. De *verwachtingswaarde* $\mathbb{E}(X)$ van $X$ definiëren we als

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{w \in W} w \mathbb{P}[X{=}w].}$$

**Voorbeeld.** Als $X$ het aantal ogen bij een worp met een eerlijke dobbelsteen is, dan is $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3\frac{1}{2}$.
Merk op: blijkbaar hoeft $\mathbb{E}(X)$ niet tot de waardenverzameling van $X$ te behoren.

**4.4 Niet voor elke $X$ bestaat $\mathbb{E}(X)$.**
Als de waardenverzameling van $X$ eindig is, levert de definitie in paragraaf 4.3 geen problemen op. Bij oneindige waardenverzamelingen staat er echter een oneindige som van reële getallen, en je hebt geleerd voorzichtig te zijn met oneindige sommen. De oneindige sommen die in voorgaande hoofdstukken voorkomen, leverden nog geen problemen op, omdat het daar telkens gaat om het optellen van een aantal van de positieve getallen $p_1, p_2, \ldots$, waarvan we op voorhand weten dat de totale som 1 is. Nu echter kunnen er wèl moeilijkheden ontstaan: de totale som van de termen in de definitie van $\mathbb{E}(X)$ kan wel eens $\infty$ zijn; ook kunnen er negatieve waarden in voorkomen.

**(a)** Neem eerst het geval dat $X \geq 0$ (dus alle waarden $x_1, x_2, \ldots$ zijn $\geq 0$). Dan laten we toe dat $\mathbb{E}(X) = \infty$.
**Voorbeeld.** Werp zolang een munt op tot voor het eerst kop verschijnt. Als de eerste kop bij de $k^{\text{e}}$ worp verschijnt, dan is de uitbetaling $X$ gelijk aan $2^k$ gulden, en het spel is afgelopen.
Daar $\mathbb{P}[X{=}2^k] = (\frac{1}{2})^k$ (ga na), volgt: $\mathbb{E}(X) = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$.

**(b)** Analoog aan (a). Als $X \leq 0$, dan laten we toe dat $\mathbb{E}(X) = -\infty$.

**(c)** * Moeilijkheden kunnen ontstaan als sommige van de waarden positief zijn, en andere negatief. Noem de mogelijke positieve waarden van $X$ even $x_1, x_2, \ldots,$ en de mogelijke negatieve waarden van $X$: $y_1, y_2, \ldots$ . Bereken nu eerst $a = \sum_k x_k \mathbb{P}[X{=}x_k]$ en $b = \sum_l y_l \mathbb{P}[X{=}y_l]$. Dan is $a > 0$ en $b < 0$. We onderscheiden nu vier gevallen:

1. Als $a < \infty$ en $b > -\infty$, is er geen probleem: dan is $\mathbb{E}(X) = a + b$.

2. Als $a = \infty$ en $b > -\infty$, dan vinden we volgens de definitie: $\mathbb{E}(X) = \infty$.

3. Als $a < \infty$ en $b = -\infty$, dan is analogiter: $\mathbb{E}(X) = -\infty$.

4. Maar als $a = \infty$ en $b = -\infty$, dan is $\mathbb{E}(X)$ niet eenduidig uit te rekenen. We zeggen dan dat $\mathbb{E}(X)$ niet gedefinieerd is.

   **Voorbeeld.** een dobbelsteen heeft twee zijden met 1 oog, twee zijden met 2 ogen en twee zijden met 3 ogen. We werpen tot voor het eerst een 2 of een 3 verschijnt. Als dat gebeurt bij de $k^{\mathrm{e}}$ worp, dan ontvangen we ingeval we 3 ogen gegooid hebben, $3^k$ gulden; maar als we 2 ogen gegooid hebben, moeten we $3^k$ gulden betalen. Ga na dat de verwachtingswaarde van onze winst $X$ niet gedefinieerd is.

**(d)** Tot slot: in verreweg de meeste gevallen die wij zullen tegenkomen, zullen er geen problemen ontstaan, omdat vaak de waardenverzameling eindig is en/of de betreffende stochast positief. We spreken af: als we in dit hoofdstuk over $\mathbb{E}(X)$ spreken, dan nemen we daarbij stilzwijgend aan dat $\mathbb{E}(X)$ bestaat (dus dat (a) of (b) of (c)1 of (c)2 of (c)3 geldt).

### 4.5 Eenvoudige eigenschappen van $\mathbb{E}$.

| | |
|---|---|
| (a) | Als $X$ constant is, $X = c$ (d.w.z. $X(\omega) = c$ voor alle $\omega \in \Omega$), dan is $\mathbb{E}(X) = c$; |
| (b) | $\mathbb{E}(aX) = a \cdot \mathbb{E}(X)$ (voor alle $a \in \mathbb{R}$); |
| (c) | Als $X \geq 0$, dan $\mathbb{E}(X) \geq 0$; |
| (d) | Als $X \geq Y$ (d.w.z. $X(\omega) \geq Y(\omega)$ voor alle $\omega \in \Omega$), dan $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$; |
| (e) | $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$. |

Bewijs deze eigenschappen zelf (opgave 15).

**4.6** Laat $\alpha = \{A_1, A_2, A_3\}$ een partitie zijn en laat $X$ op $A_1$ constant 5 zijn, op $A_2$ constant 7 en op $A_3$ weer constant 5; dus $X = 5 \cdot \mathbf{1}_{A_1} + 7 \cdot \mathbf{1}_{A_2} + 5 \cdot \mathbf{1}_{A_3}$. Dan is volgens de definitie:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 5\mathbb{P}[X{=}5] + 7\mathbb{P}[X{=}7] = \\ &= 5\mathbb{P}(A_1 \cup A_3) + 7\mathbb{P}(A_2) = \\ &= 5\mathbb{P}(A_1) + 7\mathbb{P}(A_2) + 5\mathbb{P}(A_3). \end{aligned}$$

Dit geldt algemeen: als $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots\}$ een partitie is, en $X = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$, dan is uiteraard

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i a_i \cdot \mathbb{P}(A_i).$$

In het bijzondere geval dat de getallen $a_i$ allemaal verschillend zijn, is bovenstaande formule slechts een herformulering van de definitie van $\mathbb{E}(X)$.

**4.7** Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een willekeurige functie is, $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots\}$ een partitie is, en $X = \sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, dan is $f(X) = \sum_i f(a_i) \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, en dus volgens paragraaf 4.6: $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_i f(a_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$.
In het bijzonder, met $\alpha = \alpha(X)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \sum_i f(x_i) \cdot \mathbb{P}[X = x_i] \\ &= \sum_{w \in W} f(w)\mathbb{P}[X = w] \end{aligned}}$$

waarin $W$ de waardenverzameling van $X$ is.
**Voorbeelden:**
$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{w \in W} w^2 \cdot \mathbb{P}[X{=}w]$
$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{w \in W} |w| \cdot \mathbb{P}[X{=}w]$
Als $X$ het aantal ogen van een zuivere dobbelsteen is, dan is $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = 15\frac{1}{6}$. Merk op dat $\mathbb{E}(X^2) \neq (\mathbb{E}(X))^2$. Algemener: $\mathbb{E}(f(X))$ en $f(\mathbb{E}(X))$ hoeven niet hetzelfde te zijn. In hoofdstuk 6 zullen we zien dat wèl altijd geldt: $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$.

**4.8** Laat $Z$ het totale aantal ogen zijn als 2 dobbelstenen gegooid worden. Met behulp van de kansverdeling van $Z$: $\mathbb{P}[Z{=}2] = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}[Z{=}3] = \frac{2}{36}$,...,$\mathbb{P}[Z{=}12] = \frac{1}{36}$, kunnen we $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=2}^{12} k\mathbb{P}[Z{=}k]$ berekenen. Er komt uit $\mathbb{E}(Z) = 7$, dus twee keer zoveel als bij één dobbelsteen. Hier geldt dus: $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, als $X$ en $Y$ de uitkomsten van de afzonderlijke dobbelstenen zijn. Dit blijkt algemeen te gelden:

$$\boxed{\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$$

Bewijs. Zij $V$ de waardenverzameling van $X$, en $W$ de waardenverzameling van $Y$. Schrijf $X = \sum_{v \in V} v \cdot \mathbf{1}_{[X=v]}$, $Y = \sum_{w \in W} w \cdot \mathbf{1}_{[Y=w]}$.

Dan is

$$X + Y = \sum_{(v,w)\in V\times W} (v+w)\mathbf{1}_{[X=v,Y=w]}.$$

Wegens paragraaf 4.6 is dan (ga na!)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{(v,w)\in V\times W} (v+w)\mathbb{P}[X=v, Y=w] = \\
&= \sum_{(v,w)\in V\times W} v\mathbb{P}[X=v, Y=w] + \sum_{(v,w)\in V\times W} w\mathbb{P}[X=v, Y=w] = \\
&= \sum_{v\in V} v\mathbb{P}[X=v] + \sum_{w\in W} w\mathbb{P}[Y=w] = \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \quad \square
\end{aligned}$$

Gevolg:

$$\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n).$$

Bewijs. Met volledige inductie. $\square$

### 4.9 Toepassingen.

**(a)** Als $X \sim \text{Alt}(p)$, dan is $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}[X=0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X=1] = p$.

**(b)** Als je honderd vragen moet beantwoorden, die je elk met kans $\frac{3}{4}$ goed hebt, dan verwacht je 75 goede antwoorden. Algemeen: Als $X \sim \text{Bin}(n,p)$, dan $\mathbb{E}(X) = np$. Bewijs: zie (c). $\square$

**(c)** Ook de hypergeometrische verdeling heeft verwachtingswaarde $np$.
Bewijs van (b) en (c): de binomiale en de hypergeometrische verdeling zijn beide afkomstig uit het vaasmodel (paragraaf 1.10 resp. paragraaf 1.8. Beschouw dus een vaas met $N$ ballen; $r$ rode en $w$ witte ($r + w = N$), laat $p = \frac{r}{N}$, en trek $n$ ballen uit deze vaas (met, resp. zonder terugleggen).
Laat $X_i = \mathbf{1}_{\text{bal } i \text{ is rood}}$, en $X = X_1 + \ldots + X_n$. $X$ is het aantal getrokken rode ballen. $X$ is binomiaal (in het geval "met terugleggen") resp. hypergeometrisch ("zonder terugleggen") verdeeld. Wegens het gevolg in paragraaf 4.8 is in beide gevallen $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \stackrel{\text{a}}{=} np$. $\square$
**Opmerking.** Realiseer je wel dat de $X_i$'s in het hypergeometrische geval *niet* onafhankelijk zijn. Toch mogen de verwachtingen bij elkaar opgeteld worden.

**(d)** Merk op dat we in (b) en (c) de verwachting van een stochast $X$ hebben uitgerekend zonder daarbij de kansverdeling van $X$ te gebruiken. De gebruikte methode is vaak toepasbaar: als $X$ op te vatten is als het aantal successen in een zeker aantal ($n$) proeven, schrijf dan $X = X_1 + \ldots + X_n$, waarbij $X_k = \mathbf{1}_{[\text{succes in } k^e \text{ proef}]}$. Wegens paragraaf 4.8 is dan $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}[X_1{=}1] + \ldots + \mathbb{P}[X_n{=}1]$. Deze laatste kansen zijn dikwijls eenvoudig te berekenen, terwijl $X$ zelf een vreselijk ingewikkelde kansverdeling kan hebben.

**Voorbeeld.** Lootjes trekken voor Sinterklaas (hoofdstuk 2, opgave 5). Wat is de verwachting van het aantal personen dat zijn/haar eigen lootje trekt? Met $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$ is $X_i \sim \text{Alt}(\frac{1}{n})$, dus $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

## Loterijen, verzekeringen en wat dies meer zij: Een moraliserend intermezzo

### 4.10 De Petersburg-paradox.

Lees nog eens het voorbeeld in paragraaf 4.4(a) door. Hoeveel is het je waard, aan dat spel mee te mogen doen?

Iemand zegt dat het hem 10 gulden waard is. Wij zullen laten zien dat het meer waard is.

Vergelijk het spel in paragraaf 4.4(a) met de volgende variant: na 10 worpen breken we het spel af. Heeft de speler dan nog geen kop gegooid, dan krijgt hij niets.

De verwachte winst van de speler in dit spel is 10 gulden, zoals je gemakkelijk kunt nagaan. Dus als de speler vooraf 10 gulden zou moeten betalen, dan is de verwachte winst 0 gulden. Maar dit spel is voor hem ongunstiger dan het oorspronkelijke spel, immers het scheelt hem een aantal winstmogelijkheden. Dus als hij bij het oorspronkelijke spel 10 gulden zou moeten betalen als inleg, dan is de verwachte uitbetaling nog steeds positief.

Nu hadden we in plaats van 10 gulden ook wel 100.000 gulden kunnen nemen in bovenstaand verhaal. We hadden dan gevonden, dat meedoen met het spel meer dan 100.000 gulden waard is.

Blijkbaar is elk (eindig) bedrag, dat men van de speler als inleg vraagt, acceptabel voor de speler: de verwachte winst blijft voor hem positief. Anderzijds heb je – intuïtief – het gevoel, dat je het spel niet moet spelen als er een heel hoge inzet wordt verlangd. Je loopt dan tenslotte een groot risico om veel geld te verliezen, terwijl je slechts een heel kleine kans hebt om (heel erg) veel geld te winnen.

Deze tegenstrijdigheid staat bekend als de *Petersburg-paradox*.

### 4.11 Zó win je altijd.

We spelen een wat reëler spel. Elke ronde bestaat uit een muntworp. Vòòr elke

worp bepaalt de speler zijn inzet, zeg, $k$ gulden. Als de worp kop oplevert, ontvangt hij $2k$ gulden van de spelleider (dus wint $k$ gulden); als munt verschijnt, is hij zijn $k$ gulden kwijt. Zo'n spel noemt men eerlijk, omdat in elke ronde de verwachte winst 0 gulden is. Toch is er een strategie om als speler met zekerheid 1 gulden te winnen. Zet voor de eerste worp 1 gulden in. Als kop bovenkomt, stop dan en ga naar huis. Als munt bovenkomt, zet dan voor de tweede worp 2 gulden in. Als bij de tweede worp kop bovenkomt, dan is je winst per saldo 1 gulden, stop dus. Als munt bovenkomt, zet dan voor de derde worp 4 gulden in. Enzovoorts (verdubbel steeds de inzet zolang je verliest).
Als na $k$ ronden de eerste kop verschijnt, dan is de spelerswinst:

$$(-1) + (-2) + (-4) + \ldots + (-2^{k-2}) + 2^{k-1} = 1 \text{ gulden}$$

(ga na).
Dus wànneer ook de kop verschijnt, je winst is altijd 1 gulden. En met zekerheid verschijnt ooit de eerste kop. Het beroerde is alleen, dat de strategie alleen uitvoerbaar is met oneindig veel geld op zak. Is je kapitaal eindig, dan is er een kans dat je alles kwijtraakt.
We maken het nog bonter. We werpen nu niet met een munt, maar met een dobbelsteen; de speler wint alleen als een worp met de dobbelsteen zes ogen oplevert. Met precies dezelfde strategie bereik je dan precies hetzelfde resultaat; alleen duurt het waarschijnlijk wel wat langer voordat je uitgespeeld bent.
Deze strategie is blijkbaar toepasbaar voor elk spel waarin je als speler in elke ronde een kans $p > 0$ hebt om te winnen. Hiermee wapen je je dus tegen geslepen munten en dito tegenstanders.
Maar waarom dan niet meteen naar de Waalkade gesneld en mezelf rijk gespeeld? Wel, er zijn praktische bezwaren. Vaak is er een maximum-inleg in casino's. En verder ontbreekt je als speler het geld om lang genoeg door te gaan als het in het begin flink tegenzit.

### 4.12 De praktijk.

Verwachtingswaarden kun je eenvoudig toepassen bij zaken als verzekeringen en loterijen. Eigenlijk speel je in beide gevallen een spel: je betaalt premie (resp. inzet), en krijgt met (kleine) kans geld terug. Zowel de verzekeringsmaatschapij als de organisatie van de loterij willen winst maken, dus beide spelen hebben een negatieve verwachtingswaarde voor de deelnemers.
Toch zit er (psychologisch) verschil tussen een verzekering aangaan en meedoen aan een loterij: je tegen bepaalde risico's verzekeren wordt algemeen als zeer verstandig

aangemerkt; het meedoen aan een loterij als geldverspilling (of: geld schenken aan "het goede doel").
Bij een verzekering betaal je namelijk een (relatief) klein bedrag, om je in te dekken tegen een risico, en bij een loterij alleen om een (kleine) kans te maken op een grote winst.
Blijkbaar hangt het niet alleen van de verwachtingswaarde af, of het verstandig is om aan een bepaald spel mee te doen of niet!

## Onafhankelijkheid en verwachting

**4.13** We behandelen nu enkele eigenschappen van de verwachting die in verband staan met onafhankelijkheid. $X$ en $Y$ zijn stochasten.

**(a)** $\boxed{\text{Als } X \perp\!\!\!\perp Y, \text{ dan is } \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).}$

Bewijs. Laten $V$, $W$ de waardenverzamelingen van $X$ resp. $Y$ zijn, en schrijf $X$ en $Y$ weer als

$$X = \sum_{v \in V} v \mathbf{1}_{[X=v]}$$

en

$$Y = \sum_{w \in W} w \mathbf{1}_{[Y=w]}.$$

Dan is

$$XY = \sum_{(v,w) \in V \times W} v \cdot w \mathbf{1}_{[X=v, Y=w]}.$$

Wegens paragraaf 4.6 is dan weer:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(v,w) \in V \times W} v \cdot w \mathbb{P}[X=v, Y=w] \\
&= \sum_{(v,w) \in V \times W} v \cdot w \mathbb{P}[X=v] \mathbb{P}[Y=w] \\
&= \left( \sum_{v \in V} v \mathbb{P}[X=v] \right) \left( \sum_{w \in W} w \mathbb{P}[Y=w] \right) \\
&= \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y). \quad \square
\end{aligned}$$

**(b)** Als $X \perp\!\!\!\perp Y$, dan geldt voor elk tweetal functies $f$ en $g$:

$$\mathbb{E}(f(X) \cdot g(Y)) = \mathbb{E}(f(X)) \cdot \mathbb{E}(g(Y)).$$

**(c)** Als $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, dan volgt daaruit nog niet $X \perp\!\!\!\perp Y$.

**Voorbeeld.** Gooi 2 keer een munt op, zij $X_i = \mathbf{1}_{[i^e \text{ keer kop}]}$ $(i = 1, 2)$. Dan zijn $X = X_1 + X_2$ en $Y = X_1 - X_2$ niet onafhankelijk, maar wel geldt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Als $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, dan heten $X$ en $Y$ wel *ongecorreleerd*; notatie: $X \perp Y$. Onafhankelijke stochasten (met bestaande verwachting) zijn dus ongecorreleerd, maar ongecorreleerde stochasten hoeven niet onafhankelijk te zijn.

## 4.14 Voorwaardelijke verwachting.

**Voorbeeld.** In een worp met een dobbelsteen is $X$ het aantal ogen. Zoals bekend is $\mathbb{E}(X) = 3\frac{1}{2}$. Wat is nu echter de verwachting van $X$ als gegeven is dat $X$ even is? Er zijn dan nog drie mogelijke waarden van $X$, namelijk 2, 4 en 6, die alle drie optreden met kans $\frac{1}{3}$. Intuïtief zeg je dus: de gevraagde verwachting is $\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 4$. We noteren dit als volgt: $\mathbb{E}(X|[X \text{ is even}]) = 4$, of, om een teveel aan haken te vermijden: $\mathbb{E}(X|X \text{ is even}) = 4$.

**Definitie.** Zij $A$ een gebeurtenis met $\mathbb{P}(A) > 0$. Dan definiëren we de *voorwaardelijke verwachting van $X$ gegeven $A$* door

$$\boxed{\mathbb{E}(X|A) = \sum_{w \in W} w\mathbb{P}([X{=}w]|A)}$$

waar $W$ de waardenverzameling van $X$ is.

Het verschil met de “gewone” verwachting is, dat hier de “gewone” kansen vervangen zijn door voorwaardelijke kansen.

In bovenstaand voorbeeld is $\mathbb{E}(X|X \text{ is even}) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$.

Onmiddelijk uit de definitie volgt:

**Eigenschap:** $\mathbb{E}(\mathbf{1}_B|A) = \mathbb{P}(B|A)$.

In paragraaf **??** zagen we dat het bij het berekenen van kansen wel eens handig is, de waarde van een bepaalde stochast te kennen. Dat geldt ook bij het berekenen van verwachtingen. Als $X$ een stochast is met waardenverzameling $W$, en $\mathbb{E}(Y)$ bestaat, dan is

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{w \in W} \mathbb{P}[X{=}w] \cdot \mathbb{E}(Y|X{=}w).$$

Deze formule is een speciaal geval ($\alpha = \alpha(X)$) van de volgende, waarin $\alpha$ een partitie is:

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{A \in \alpha} \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(Y|A).}$$

Bewijs van deze formule:

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\alpha} \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(Y|A) &= \sum_{A\in\alpha} \mathbb{P}(A) \sum_{w\in W} w\cdot \mathbb{P}([Y{=}w]|A) \\
&= \sum_{w\in W} \left( w \cdot \sum_{A\in\alpha} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}([Y{=}w]|A)\right) \\
&= \sum_{w\in W} w\mathbb{P}[Y{=}w] \\
&= \mathbb{E}(Y). \quad \square
\end{aligned}$$

**4.15 Stelling.** Als $X$ alleen *gehele waarden* $\geq 0$ aanneemt, dan is

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X{>}k].}$$

Bewijs: zij $p_k = \mathbb{P}[X{=}k]$, dan is

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots \\
&= (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots) + (p_2 + p_3 + \ldots) + (p_3 + \ldots) + \ldots \\
&= \mathbb{P}[X{>}0] + \mathbb{P}[X{>}1] + \mathbb{P}[X{>}2] + \ldots. \quad \square
\end{aligned}$$

**Opmerking.** In dit bewijs wordt de sommatievolgorde van twee oneindige sommen verwisseld. Dat levert hier geen problemen op, maar dat zullen we niet bewijzen. Vaak is het rekenwerk met deze formule wat eenvoudiger dan wanneer men de definitie van $\mathbb{E}(X)$ gebruikt.
**Voorbeeld.** Als $Y$ het aantal proeven is dat nodig is om één succes te behalen (onafhankelijke proeven, elke proef kans $p$ op succes) dan is

$$\mathbb{P}[Y{>}k] = \mathbb{P}[\text{eerste t/m } k^{\text{e}} \text{ proef mislukt}] = q^k$$

(met $q = 1{-}p$), zodat $\mathbb{E}(Y) = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$.
Overigens kan $\mathbb{E}(Y)$ ook berekend worden m.b.v. de formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ (voor $|x| < 1$).

**Opgaven**

1. Men gooit 12 dobbelstenen. Wat is de verwachting van $X$, het aantal zessen, en $Y$, het totale aantal ogen?

2. Als de machine weigert zijn er twee mogelijkheden: onderdeel $A$ is kapot (kans 0,3), of onderdeel $B$ is kapot (kans 0,7). De kans dat beide kapot zijn, stellen we 0. Het nakijken en eventueel vervangen van $A$ duurt 10 minuten; voor $B$ is dit 20 minuten.

   (a) Men begint te kijken bij $A$. Is $A$ in orde, dan gaat men verder met $B$. Is $A$ kapot, dan hoeft men niet naar $B$ te kijken. Bepaal de verwachte tijdsduur van de werkzaamheden.

   (b) Zelfde vraag, als men bij $B$ begint.

3. In een serie onafhankelijke spelen hebben $A$ en $B$ bij ieder spel kans $\frac{1}{2}$ om te winnen. Iedere winstpartij levert één punt op. Bepaal de verwachting van het aantal spelen als:

   (a) er wordt gespeeld tot $A$ of $B$ drie punten behaald heeft;

   (b) er wordt gespeeld tot iemand een voorsprong van 2 punten op zijn tegenstander heeft.

4. Men neemt 13 kaarten uit een goed geschud kaartspel. Laat $X$ het aantal azen, $Y$ het aantal $\spadesuit$, en $Z$ het aantal kwartetten zijn (een kwartet is een viertal kaarten van gelijke rang).

   (a) Bepaal $\mathbb{E}(X)$ en $\mathbb{E}(Y)$.

   (b) Bepaal $\mathbb{E}(Z)$. Aanwijzing. Schrijf $Z = Z_1 + \ldots + Z_{13}$, waar bv. $Z_6 = \mathbf{1}_{[\text{zessen vormen een kwartet}]}$.

5. Vervolg op hoofdstuk 3, opgave 10. Zij $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$. Bereken $\mathbb{E}(Y)$.

6. Men krijgt 13 kaarten uit een goed geschud spel. Nadat genoteerd is, welke kaarten dit waren, worden de kaarten teruggegeven, geschud en opnieuw krijgt men 13 kaarten. Bij deze kaarten blijken er $X$ te zijn die ook in de eerste hand voorkwamen.

   Ook deze kaarten worden genoteerd en teruggegeven. Na het schudden krijgt men voor de derde keer een hand van 13 kaarten. In deze hand komen $Y$ kaarten voor die ook in de beide voorgaande handen reeds voorkwamen (dus zeker: $Y \leq X$). Bepaal:

(a) $\mathbb{P}[X \geq 1]$;

(b) $\mathbb{E}(X)$;

(c) $\mathbb{E}(Y)$.

7. Werp zesmaal een dobbelsteen. $X$ is het aantal kanten dat nooit bovenkomt. Bereken $\mathbb{E}(X)$.

8. Bereken de verwachting van het aantal gepakte paren schoenen in opgave 11 van hoofdstuk 1.

9. Bereken $\mathbb{E}(X)$ in opgave 11 van hoofdstuk 2.

10. $Y_n$ is het aantal proeven dat men moet doen om $n$ successen te behalen (we hebben te maken met onafhankelijke proeven met vaste succeskans $p$). Bepaal $\mathbb{E}(Y_n)$. Aanwijzing: Hoofdstuk 3, opgave 9.

11. Het recordprobleem.
    Er wordt een onbeperkte rij proeven gedaan, die resultaten $X_1, X_2, \ldots$ geven. Als er al $n$ proeven gedaan zijn, dan kunnen we de resultaten naar grootte ordenen. We nemen aan dat daarbij alle mogelijke rangschikkingen even waarschijnlijk zijn, en dat precies gelijke resultaten met kans 0 optreden.
    We noemen de $n^{\mathrm{e}}$ proef een record als $X_n$ al zijn voorgangers overtreft. Deze gebeurtenis noemen we $A_n$.
    Laat $R_n$ het aantal records zijn onder de eerste $n$ proeven. Laat $T_2$ het nummer van de proef zijn waarbij het $2^{\mathrm{e}}$ record optreedt. Toon aan:

    (a) $\mathbb{E}(R_n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$;

    (b) $\mathbb{P}[T_2 > k] = \frac{1}{k}$ voor $k \geq 1$, en $\mathbb{E}(T_2) = \infty$.

12. $X$ is het aantal worpen nodig om alle kanten van de dobbelsteen minstens één keer boven te krijgen. Bepaal $\mathbb{E}(X)$ (Antwoord: $\mathbb{E}(X) = 14{,}7$).

13. Werp zolang een dobbelsteen tot voor het eerst twee keer achter elkaar hetzelfde aantal ogen optreedt. Dit gebeurt bij de $X^{\mathrm{e}}$ worp. Bepaal $\mathbb{E}(X)$.

14. In een reeks onafhankelijke proeven, elk met succeskans $p$ $(0 < p < 1)$ zij $Y$ het aantal proeven nodig om één succes te behalen. In paragraaf 4.15 hebben we $\mathbb{E}(Y)$ berekend; een tweede manier daarvoor is de volgende. Zij $A = [1^{\mathrm{e}}$ proef succes$]$.

    (a) Noem even $\mathbb{E}(Y)$: $\mu$. Beredeneer (géén bewijs) dat $\mathbb{E}(Y|A^c) = 1 + \mu$.

(b) Bereken nu $\mathbb{E}(Y)$ m.b.v. de laatste formule uit paragraaf 4.14.

15. Bewijs de eigenschappen van de verwachtingswaarde in paragraaf 4.5.

# Hoofdstuk 5

# Spreiding

**5.1**

**(a)** We gooien met pijltjes naar een prikbord dat in smalle verticale stroken verdeeld is die genummerd zijn: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ De bedoeling is de 0-strook te raken. De persoon die aan het gooien is, heeft kansen

$$\ldots, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots$$

om de verschillende stroken te raken (verschillende personen hebben in principe verschillende kansverdelingen). Zij $X$ het nummer van de geraakte strook.
Laten we aannemen dat afwijkingen naar links ongeveer even vaak voorkomen als overeenkomstige afwijkingen naar rechts, dus dat $\mathbb{E}(X) = \sum_i ip_i = 0$ is. Bij iemand die het goed kan, zal de spreiding klein zijn: de stroken dicht bij 0 nemen bijna alle kans op. Bij een slordige gooier zal ook nog flink wat kans verder weg liggen. Mogelijke maten voor die spreiding zijn bv. $\sum_i |i|p_i$ en $\sum_i i^2 p_1$.

**(b)** We gooien $n$ munten en krijgen daarbij $X_n$ keer kop. Het verwachte aantal kop $\mathbb{E}(X_n)$ is $\frac{1}{2}n$. We doen dit experiment enkele keren. Is $n$ klein, laten we zeggen 10, dan zullen afwijkingen van het verwachte aantal kop van 20 % of meer ($|X_{10} - 5| \geq 2$) geregeld voorkomen (de kans hierop is ongeveer 0,34). Nemen we $n$ wat groter, bv. 40, dan worden afwijkingen van 20 % of meer ($|X_{40} - 20| \geq 8$) tamelijk zeldzaam (de kans hierop is $\approx$ 0,016). Met toenemende $n$ wordt de spreiding van $\frac{X_n}{n}$ kennelijk kleiner.

## Variantie

**5.2 Definitie.** Als maat voor de spreiding van een stochast $X$, die verwachting $\mathbb{E}(X)$ heeft, voeren we in de *variantie*, afgekort $\mathbb{V}$ar:

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).}$$

Vaak noteren we $\mathbb{E}(X)$ als $\mu$, zodat dan $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right)$.
Als $X$ een *discrete* stochast is met waardenverzameling $W$ en verwachting $\mu$, dan wordt de variantie, m.b.v. paragraaf 4.7:

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{w \in W} (w-\mu)^2 \cdot \mathbb{P}[X{=}w].}$$

**Voorbeelden:**

1. Voor het aantal ogen $X$ bij een worp met een dobbelsteen vinden we:
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{i=1}^{6} (i - 3\tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{35}{12}.$$
2. Laat $X$ de waarden $+a$ en $-a$ ieder met kans $\frac{1}{2}$ aannemen. Dan is $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = a^2$.
3. Laat $X$ de waarden $+a$ en $-a$ ieder met kans $\frac{1}{4}$ aannemen, en de waarde 0 met kans $\frac{1}{2}$. Dan is $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{2}a^2$.

### 5.3 Bestaat $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ altijd?

Nee: als $\mathbb{E}(X)$ niet bestaat, bestaat $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ natuurlijk ook niet.
Als $\mathbb{E}(X) = -\infty$ of $\mathbb{E}(X) = \infty$, is het weinig zinvol om naar de verwachting van de "stochast" $(X - \mathbb{E}(X))^2$ te kijken. Ook voor zulke $X$ definiëren we $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ niet.
Als echter $|\mathbb{E}(X)| < \infty$, dan bestaat $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ en kan zowel eindig als oneindig zijn.
We maken een soortgelijke afspraak als in hoofdstuk 5: als we in het vervolg ergens $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ (of $\mathbb{E}(X)$) schrijven, dan nemen we daarbij stilzwijgend aan dat $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ (resp $\mathbb{E}(X)$) bestaat en eindig is.

## 5.4 Eigenschappen van $\mathbb{V}\mathrm{ar}$.

| | |
|---|---|
| (a) | $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \geq 0$; |
| (b) | Als $X$ constant is, $X = c$, dan $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$, en omgekeerd; |
| (c) | $\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX) = a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$, voor elke $a \in \mathbb{R}$; |
| (d) | $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + a) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$, voor elke $a \in \mathbb{R}$; |
| (e) | $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$; |
| (f) | Als $X \perp\!\!\!\perp Y$, dan $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$; |
| (g) | Als $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn, dan $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)$. |

Bewijs. (a), (b), (c) en (d) volgen direct uit de definitie door gebruik te maken van bekende eigenschappen van $\mathbb{E}$.
(e). Noem $\mathbb{E}(X) = \mu$, dan is

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.
\end{aligned}$$

(f). Noem $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{E}(Y) = \nu$, dan is $\mathbb{E}(X + Y) = \mu + \nu$, en

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) &= \mathbb{E}\left(((X+Y) - (\mu+\nu))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(((X-\mu) + (Y-\nu))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((X-\mu)^2 + (Y-\nu)^2 + 2(X-\mu)(Y-\nu)\right) \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{E}\left((X-\mu)(Y-\nu)\right).
\end{aligned}$$

Daar $X$ en $Y$ onafhankelijk zijn, is de laatste term gelijk aan $2\mathbb{E}(X-\mu)\mathbb{E}(Y-\nu) = 0$.
(g). Met volledige inductie uit (f). $\square$

## 5.5 Standaardafwijking.

**Definitie.** De *standaardafwijking* of *standaarddeviatie* $\sigma_X$ van een stochast $X$ is

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}.}$$

$\sigma_X$ is in dezelfde eenheden (bv. kg, cm) als de stochast $X$ (de waarnemingen van $X$); $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ niet.
Uit 5.4(f) volgt direct dat standaardafwijkingen van onafhankelijke stochasten “optellen volgens Pythagoras”:

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y.$$

## 5.6 De $2\sigma$-regel.

Zij $X$ een stochast met verwachting $\mathbb{E}(X) = \mu$ en variantie $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sigma^2$. Een vuistregel (de $2\sigma$-regel) zegt dat meestal meer dan 95 % der waarnemingen van $X$ in het interval

$$(\mu{-}2\sigma, \mu{+}2\sigma)$$

ligt. Anders gezegd: afwijkingen van $2\sigma$ (of meer) van de verwachtingswaarde $\mu$ komen weinig voor; afwijkingen van $1\sigma$ daarentegen zijn heel gewoon (vandaar de uitdrukking “standaard”afwijking). $\sigma$ is dus een maat voor de breedte van de kansverdeling.

## 5.7 Variantie van enige bekende kansverdelingen

**(a)** Als $X \sim \mathrm{Alt}(p)$, dan is $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = pq$ (waar $q = 1{-}p$). Immers, $X = X^2$, dus $\mathbb{E}(X^2) = p$, zodat $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = p - p^2 = pq$.

**(b)** Als $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, dan is $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = npq$. We schrijven namelijk $X = X_1 + \ldots + X_n$, met $X_k \sim \mathrm{Alt}(p)$ (elke $k$), en $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk.
Op grond van eigenschap 5.4(g) vinden we m.b.v. (a) dat

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) = npq.$$

**(c)** Zij $X$ het aantal proeven nodig voor het eerste succes in een reeks onafhankelijke proeven, elk met succeskans $p$.
We weten al dat $\mathbb{P}[X{=}k] = q^{k-1}p$ $(q = 1{-}p)$, en $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$. Rechtstreekse berekening van $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ uit de definitie wordt bemoeilijkt door analytische problemen (verwisselen van sommatievolgorden e.d.). Het lukt echter wel met voorwaardelijke verwachting (vergelijk opgave 14 in hoofdstuk 5).
Zij weer $A =$ [succes bij 1e proef]. Dan is $\mathbb{E}(X^2|A^c) = \mathbb{E}\left((1 + X)^2\right)$ (intuïtief duidelijk, exact bewijs niet nodig), zodat

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(X^2|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X^2|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 \cdot p + \mathbb{E}\left((1 + X)^2\right) \cdot q \\ &= 1 + 2q\mathbb{E}(X) + q\mathbb{E}(X^2) \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1+q}{p^2}$ en $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{q}{p^2}$.
Zie voor een andere methode opgave 6.

## De ongelijkheid van Chebyshev

**5.8** De spreiding van een stochast hangt nauw samen met de verdeling van de kansdichtheid rond het gemiddelde. Dit blijkt nog eens uit de volgende ongelijkheid:

> **Ongelijkheid van Chebyshev:**
>
> Voor elke stochast $X$ en elk getal $a > 0$ is
> $$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq a] \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{V}\text{ar}(X).$$

Bewijs. Schrijf $\mu = \mathbb{E}(X)$. De $\omega \in \Omega$ met $|X(\omega) - \mu| \geq a$ dragen aan de variantie van $X$ minstens $a^2 \cdot \mathbb{P}[|X(\omega) - \mu| \geq a]$ bij. Dus:

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) \geq a^2 \cdot \mathbb{P}[|X - \mu| \geq a]. \qquad \square$$

**Opmerking.** In veel gevallen is de ongelijkheid van Chebyshev slechts een ruwe afschatting voor de grootte van de kans $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq a]$. Zo levert de keuze $a = 2\sigma_X$ de afschatting $\frac{1}{4}$ op; maar in paragraaf 5.6 vermeldden we al dat deze kans vaak ongeveer 0,05 is. Er zijn echter ook voorbeelden te bedenken waarin de ongelijkheid van Chebyshev wèl scherp is:

$$X = \begin{cases} -a & \text{met kans } p; \\ 0 & \text{met kans } 1 - 2p; \\ a & \text{met kans } p. \end{cases}$$

Reken zelf na dat in dit voorbeeld geldt

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq a] = \frac{1}{a^2}\mathbb{V}\text{ar}(X).$$

Zonder extra informatie over de verdeling van $X$ kan de ongelijkheid van Chebyshev dus niet verbeterd worden.

**5.9** Een toepassing van paragraaf 5.8 is de Zwakke Wet van de grote aantallen, al genoemd in paragraaf 2.20. Hier volgt een speciaal geval (in opgave 5 staat de algemene formulering):

> Zij $S_n$ het aantal successen in $n$ onafhankelijke proeven, elk met succeskans $p$. Zij $P_n$ het frequentiequotiënt: $P_n = \frac{1}{n}S_n$.
> Dan geldt voor elk getal $\varepsilon > 0$:
>
> $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|P_n - p| < \varepsilon] = 1.$$

Bewijs. $S_n \sim \text{Bin}(n,p)$, dus $\mathbb{E}(S_n) = np$ en $\mathbb{V}\text{ar}(S_n) = npq$ (waar $q = 1-p$). We vinden: $\mathbb{E}(P_n) = p$, $\mathbb{V}\text{ar}(P_n) = \frac{1}{n}pq$ en met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\mathbb{P}[|P_n - p| < \varepsilon] > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

en dit gaat naar 1 als $n \to \infty$ $\square$.

**Commentaar.** Als we $n$ groot genoeg nemen, kunnen we de kans dat $P_n$ meer dan $\varepsilon$ van $p$ afwijkt, zo klein krijgen als we willen, bv. $< 0{,}001$. En aangezien we in paragraaf 2.20 aangenomen hebben dat we er op mogen vertrouwen dat gebeurtenissen met zeer kleine kansen bij eenmalige uitvoering van het experiment niet optreden, mogen we dan óók vertrouwen hebben dat in een lange serie van onafhankelijke proeven het frequentiequotiënt niet veel van $p$ zal afwijken. De zojuist bewezen Zwakke Wet van de grote aantallen voorspelt dus dat in lange reeksen onafhankelijke proeven, frequentiequotiënten zich gaan stabiliseren.

## Covariantie

### 5.10 Definitie.

De onafhankelijkheid in paragraaf 5.4(f) is heel wezenlijk. Bekijk maar eens de volgende twee voorbeelden van "zwaar afhankelijke" stochasten:

**(a)** Stel $X = Y$. $X$ en $Y$ zijn dan zgn. positief afhankelijk: omdat ze steeds dezelfde waarde aannemen, versterken hun afwijkingen (van $\mathbb{E}(X)$) elkaar. En inderdaad: $\mathbb{V}\text{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\text{ar}(2X) = 4\mathbb{V}\text{ar}(X)$, terwijl $\mathbb{V}\text{ar}(X) + \mathbb{V}\text{ar}(Y) = 2\mathbb{V}\text{ar}(X)$.

**(b)** Als $X = -Y$, hebben we negatieve afhankelijkheid: de afwijkingen van $X$ en $Y$ werken elkaar lijnrecht tegen. We zien: $\mathbb{V}\text{ar}(X+Y) = 0$, terwijl $\mathbb{V}\text{ar}(X) + \mathbb{V}\text{ar}(Y) = 2\mathbb{V}\text{ar}(X)$.

Kunnen we dan i.h.a. niets zeggen over het verband tussen $\mathbb{V}\text{ar}(X+Y)$ enerzijds en $\mathbb{V}\text{ar}(X)$ en $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$ anderzijds, als $X$ en $Y$ afhankelijke stochasten zijn?
Gelukkig wel. We voeren daarvoor een nieuwe grootheid in.
**Definitie.** De *covariantie* van de stochasten $X$ en $Y$ wordt genoteerd met $\mathbb{C}\text{ov}(X,Y)$ en gedefinieerd als

$$\boxed{\mathbb{C}\text{ov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\right].}$$

### 5.11 Eigenschappen.

(a) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$;
(b) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;
(c) Als $X$ en $Y$ onafhankelijk zijn, dan is $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 0$ (andersom hoeft niet);
(d) $X$ en $Y$ ongecorreleerd $\Leftrightarrow \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 0$ (voor de definitie van ongecorreleerdheid, zie paragraaf 4.13);
(e) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, X)$;
(f) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$;
(g) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j)$;
(h) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, aY) = a\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

De meeste van deze eigenschappen zijn heel gemakkelijk te bewijzen; we stellen dit uit tot opgave 2.

**Voorbeeld.** Het lootjesprobleem (zie opgave 5 in hoofdstuk 2 en paragraaf 4.9(d)). $X_1, \ldots, X_n$ zijn niet onafhankelijk, dus we gebruiken bovenstaande eigenschap (f): voor elke $i$ is $X_i \sim \mathrm{Alt}(\frac{1}{n})$, zodat $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Voor $i \neq j$ is $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}[X_i = X_j = 1] = \frac{1}{n(n-1)}$, zodat

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Enig rekenwerk levert dan: $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1$.

**5.12** De covariantie kan zowel positief als negatief zijn. Een positieve covariantie duidt op een positieve afhankelijkheid, een negatieve covariantie duidt op een negatieve afhankelijkheid. Nu zegt de covariantie van $X$ en $Y$ niet veel over de mate van afhankelijkheid tussen $X$ en $Y$: als we $X$ en $Y$ beide verdubbelen, wordt $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ 4 $\times$ zo groot, terwijl de mate van afhankelijkheid natuurlijk dezelfde blijft.

Daarom bestaat er ook nog een "gestandaardiseerde covariantie", de zgn. *correlatiecoëfficiënt* $\rho_{X,Y}$:

$$\boxed{\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.}$$

Altijd geldt: $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$. Dit volgt direct uit:

**Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz**:

$$|\mathbb{C}\text{ov}(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

Gelijkheid treedt op dan en slechts dan als $Y = c \cdot X$ voor zekere $c$.

BEWIJS. Omdat $\mathbb{V}\text{ar}(X + \lambda Y) \geq 0$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, moet de discriminant van de kwadratische functie

$$\lambda \mapsto \mathbb{V}\text{ar}(X) + 2\lambda \mathbb{C}\text{ov}(X,Y) + \lambda^2 \mathbb{V}\text{ar}(Y)$$

$\leq 0$ zijn. Dus moet

$$(\mathbb{C}\text{ov}(X,Y))^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2.$$

□

Ga zelf na dat de uiterste waarden -1 en 1 van de covariantie juist bereikt worden in de twee voorbeelden in paragraaf 5.10. Verder is het duidelijk dat $\rho_{X,Y} = 0$ zodra $X$ en $Y$ ongecorreleerd zijn, iets wat de naamgeving al suggereert.

## Opgaven

1. Men werpt $n$ dobbelstenen. $X$ is het totaal aantal ogen, $Y = \frac{X}{n}$ het gemiddelde per worp. Bepaal $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ en $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.

2. Bewijs de eigenschappen van $\mathbb{C}\mathrm{ov}$ in paragraaf 5.11.

3. **Hypergeometrische verdeling.** Notaties als in paragraaf **??**(b) en paragraaf 4.9(c). Omdat $X_1, \ldots, X_n$ niet onafhankelijk zijn, is nu i.h.a.
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \neq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i).$$
Gebruik formule 5.11(f) om $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ te berekenen.
(Antwoord: $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}$).

4. We gooien $n$ keer een munt op. $P_n = \frac{1}{n} S_n$ is daarbij het frequentiequotiënt voor het optreden van kop. Hoe groot zou volgens de afschatting in het bewijs van de Wet van de grote aantallen (paragraaf 5.9) $n$ moeten zijn, opdat de kans op een afwijking $|P_n - \frac{1}{2}| \geq 0,01$ kleiner dan 0,02 zij?

5. **Zwakke wet van de grote aantallen voor gemiddelden.**
Laat $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijke stochasten zijn met $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ en $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \sigma^2$ (elke $i$).
Zij $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$. Bewijs dat voor elke $\varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon] = 1$.

6. De stochast $X$ neemt de waarden 0,1,2,... aan met kansen $p_0, p_1, p_2, \ldots$. Zij $Q_k = \mathbb{P}[X > k] = p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots$
In paragraaf 4.15 is aangetoond dat $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k$. We gaan met deze methode een stap verder:
   (a) Zij $R_k = Q_{k+1} + Q_{k+2} + \ldots$. Toon aan dat $\sum_{k=0}^{\infty} R_k = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}X(X-1)\right)$.
   (b) Laat $Y$ het aantal proeven zijn nodig om één succes te behalen (onafhankelijke proeven met succeskans $p$). Gebruik de methode in (a) om $\mathbb{E}\left(Y(Y-1)\right)$ en daarmee $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ te bepalen.
   (c) Laat $Y_n$ het aantal proeven zijn nodig om $n$ successen te behalen. Bepaal $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_n)$. Aanwijzing: gebruik opgave 9 in hoofdstuk 3.

7. De schoenenkast (opgave 11 in hoofdstuk 1). Om het rekenwerk wat te beperken nemen we $n = 3$. Bereken de variantie van het aantal gepakte paren schoenen. Zie ook opgave 8 in hoofdstuk 5.

# Hoofdstuk 6

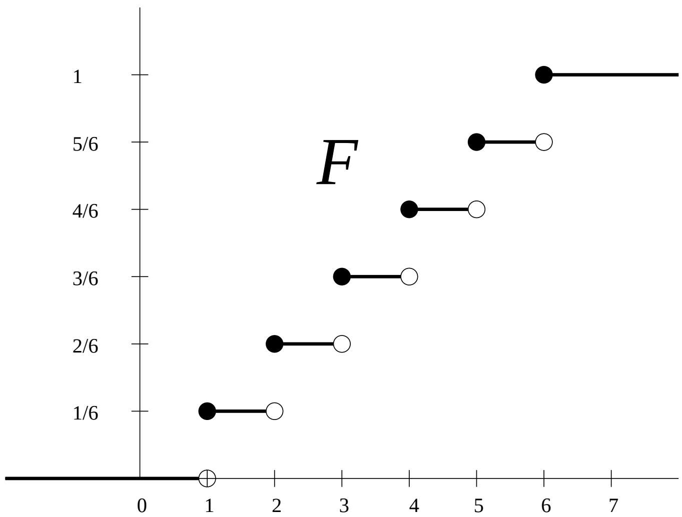
# Continue verdelingen

## Verdelingsfuncties

**6.1** Tot nog toe hebben we ons vrijwel uitsluitend beziggehouden met discrete stochasten. In dit hoofdstuk introduceren we een ander soort stochasten, nl. continu verdeelde stochasten. Vòòr het zover is (in paragraaf 6.3), zullen we eerst het begrip verdelingsfunctie invoeren, en wel voor àlle reëelwaardige stochasten.
**Definitie.** Voor een stochast $X$ wordt de *verdelingsfunctie* $F$ als volgt gedefinieerd:

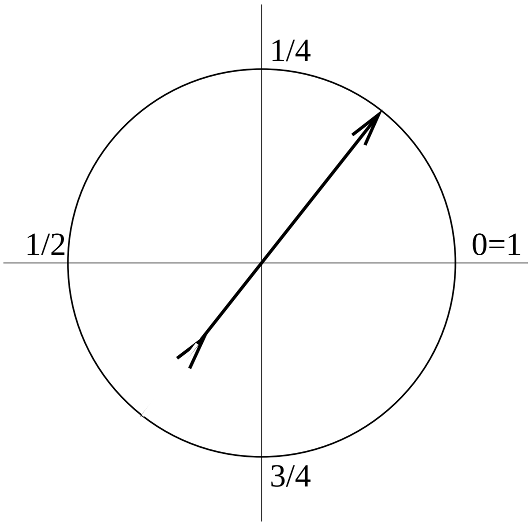
$$\boxed{F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \text{ voor elke } x \in \mathbb{R}.}$$

**Voorbeeld.** Zij $X$ het aantal ogen van een worp met een dobbelsteen. Dan heeft $F$ de volgende grafiek:




**Voorbeeld.** Rad van avontuur. In het middelpunt van een schijf is een vrij draaiende wijzer aangebracht. Op de omtrek van de schijf is een schaalverdeling van $[0,1)$ geplaatst. Het punt $X$ waar de wijzer tot stilstand komt is een zeker reëel getal uit $[0,1)$.

Het heeft geen zin om te gaan kijken naar kansen $\mathbb{P}[X = x]$ voor punten $x \in [0,1)$; die kansen zijn allemaal 0.
We zullen in plaats daarvan kansen $\mathbb{P}[a < X < b]$ beschouwen, m.a.w. de kans dat $X$ in het interval $(a,b)$ terechtkomt.
Is er geen enkele voorkeur voor bepaalde richtingen, dan hangt deze kans alleen van de lengte van het interval af: $\mathbb{P}[a < X < b] = b - a$ voor ieder interval $(a,b) \subset [0,1)$. Dit betekent dat de kans met een constante dikte is uitgesmeerd over $[0,1)$.




De verdelingsfunctie van $X$ is dus

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$$

**6.2 Algemene eigenschappen van verdelingsfuncties.** Voor elke verdelingsfunctie gelden de volgende eigenschappen:

**(a)** $F$ is stijgend, d.w.z. als $a < b$, dan $F(a) \le F(b)$.

BEWIJS. $[X \le a] \subset [X \le b]$, dus $F(a) = \mathbb{P}[X \le a] \le \mathbb{P}[X \le b] = F(b)$. □

**(b)**
$$\boxed{\lim_{x\to\infty} F(x) = 1.}$$

BEWIJS. Omdat we al weten dat $F$ stijgend is, is het voldoende om te bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} F(n) = 1$. Wel, met 2.5(c) is

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(n) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X \le n] \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [X \le n]\right) \\ &= \mathbb{P}[X < \infty] = 1. \quad \square \end{aligned}$$

**(c)**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.}$$

Bewijs. Net als dat van (b). $\square$

**(d)**

$$\boxed{\lim_{x\downarrow a} F(x) = F(a) \quad \text{en} \quad \lim_{x\uparrow a} F(x) = \mathbb{P}[X < a].}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow a} F(x) &= \lim_{n\to\infty} F\left(a + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[X \le a + \frac{1}{n}\right] \\
&\overset{2.7(a)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[X \le a + \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}[X \le a] = F(a)
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\lim_{x\uparrow a} F(x) &= \lim_{n\to\infty} F\left(a - \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[X \le a - \frac{1}{n}\right] \\
&\overset{2.5(c)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[X \le a - \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}[X < a].
\end{aligned}$$

$\square$

We zien dat de grootte van de sprong die $F$ maakt in $x = a$ gelijk is aan

$$\lim_{x\downarrow a} F(x) - \lim_{x\uparrow a} F(x) = \mathbb{P}[X \le a] - \mathbb{P}[X < a] = \mathbb{P}[X = a].$$

## Dichtheidsfuncties en continu verdeelde stochasten

**6.3 Definitie.** De stochast $X$ is *continu verdeeld* als de verdelingsfunctie $F$ van $X$ continu is.

**Opmerking.** Uit 6.2(d) volgt: als $X$ continu verdeeld is, dan is $\mathbb{P}[X = a] = 0$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

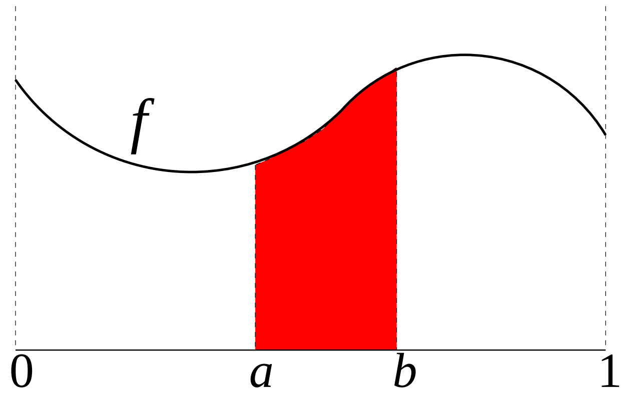
**Voorbeeld.** Het rad van avontuur uit 6.1. We nemen aan, dat de wijzer geen enkele voorkeur heeft voor bepaalde richtingen. Merk op dat onder deze aanname

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0; \\ x & \text{als } 0 < x < 1; \\ 1 & \text{als } 1 \leq x \end{cases}$$

zodat $X$ een continu verdeelde stochast is. Zou er wèl voorkeur zijn voor bepaalde richtingen, dan geldt dat

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

voor een of andere functie $f$, die er bijvoorbeeld als in het plaatje kan uitzien. Deze functie $f$ zullen we de *dichtheid* van $X$ noemen; de grafiek van $f$ geeft aanschouwelijk weer hoe dik de kansmassa plaatselijk uitgesmeerd is.




**6.4 Definitie.** De stochast $X$ is *continu verdeeld met dichtheidsfunctie*[1] $f$ als voor ieder interval $(a, b)$ geldt:

$$\boxed{\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx.}$$

Hierbij zijn de keuzen $a = -\infty$ en $b = \infty$ toegestaan.
Wanneer je $a = -\infty$ invult, vind je: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \mathbb{P}[X \leq b] = F(b)$, dus

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du \text{ voor elke } x \in \mathbb{R}.}$$

Een stochast die continu verdeeld is met dichtheidsfunctie $f$ (volgens definitie 6.4) is dus ook inderdaad continu verdeeld volgens definitie 6.3.
**Opmerking.** De functie $f$ ligt nooit helemaal vast. Als je nl. de waarde van $f$ in één punt verandert, dan verandert de integraal van $f$ daardoor niet. We hebben daardoor altijd een heel klein beetje keuzevrijheid voor de functie $f$. Wel zullen we

[1] In de literatuur heet "continu met dichtheidsfunctie $f$" ook wel: "absoluut continu".
Men kan laten zien dat er stochasten zijn die continu verdeeld zijn, maar geen dichtheidsfunctie hebben, maar zulke stochasten zullen wij hier niet tegenkomen.

$f$ altijd zo kiezen dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
Natuurlijk is altijd

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

### 6.5 Verband tussen $f$ en $F$.

**(a)** Zij $X$ een continu verdeelde stochast met onbekende dichtheid $f$, waarvan we wèl de verdelingsfunctie $F$ kennen. Dan vinden we $f$ door $F$ te differentiëren (bewijs: De hoofdstelling van de Analyse):

$$\boxed{f(x) = F'(x).}$$

$F$ hoeft niet in élk punt $x$ differentieerbaar te zijn. $F$ is echter wèl differentieerbaar in die punten waar we $f$ continu kunnen maken. In de resterende punten, en dat zullen er in dit dictaat meestal één of twee zijn, is de waarde van $f$ niet van belang.

**(b)** Met de hoofdstelling van de Analyse vinden we ook:

$$\boxed{\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$$

## Voorbeelden van continu verdeelde stochasten

Het wordt tijd voor een aantal voorbeelden van continu verdeelde stochasten. In de opsomming hieronder zal het belangrijkste voorbeeld, de zogenaamde "normale verdeling" ontbreken. Dit hiaat zal ruimschoots worden opgevuld door hoofdstuk 10, dat in zijn geheel is gewijd aan deze verdeling.

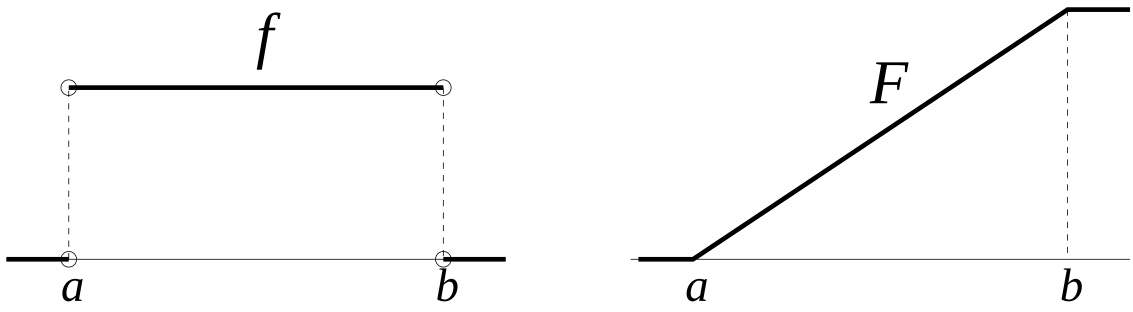
**6.6 De uniforme (of homogene) verdeling.** Een stochast $X$ is *uniform verdeeld* over $(a, b)$ als $X$ zijn waarden aanneemt tussen $a$ en $b$, en zonder voorkeur voor bepaalde delen van $(a, b)$. Notatie: $X \sim \mathrm{Un}(a, b)$. De dichtheidsfunctie $f$ van $X$ is dan constant op $(a, b)$; omdat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ moet zijn, zal die constante waarde van $f$ gelijk zijn aan $\frac{1}{b-a}$. Dus:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{als } a < x < b; \\ 0 & \text{als } x > b. \end{cases}}$$

$f(a)$ en $f(b)$ schrijven we niet voor.
De verdelingsfunctie $F$ berekenen we nu m.b.v. 6.5(b) (of 6.4):

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{als } a < x < b; \\ 1 & \text{als } x \geq b. \end{cases}}$$

De grafieken:




**Voorbeeld 1.** In het rad van avontuur is $X \sim \mathrm{Un}(0,1)$. Dus:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0; \\ 1 & \text{als } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{als } x > 1; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0; \\ x & \text{als } 0 < x < 1; \\ 1 & \text{als } x \geq 1. \end{cases}$$

**Voorbeeld 2.** Een draad van lengte 1, langs de $x$-as gespannen tussen de punten 0 en 1, breekt in een toevallig punt. De kans dat het breekpunt in een interval $(a,b)$ ligt, stellen we gelijk aan $b-a$, en dit voor ieder interval $(a,b) \subset [0,1]$. Als dan $X$ de lengte is van het linkerstuk, dan is $X \sim \mathrm{Un}(0,1)$. Welke verdeling heeft de lengte $Y$ van het rechterstuk?

**Voorbeeld 3. Afrondingsfouten.** Een tabel geeft de logaritmen van de getallen 1 tot en met 10.000 in 4 decimalen. De vierde decimaal is verkregen door afronding. Is $Y$ een willekeurig getal, dan kun je $\log Y$ schrijven als

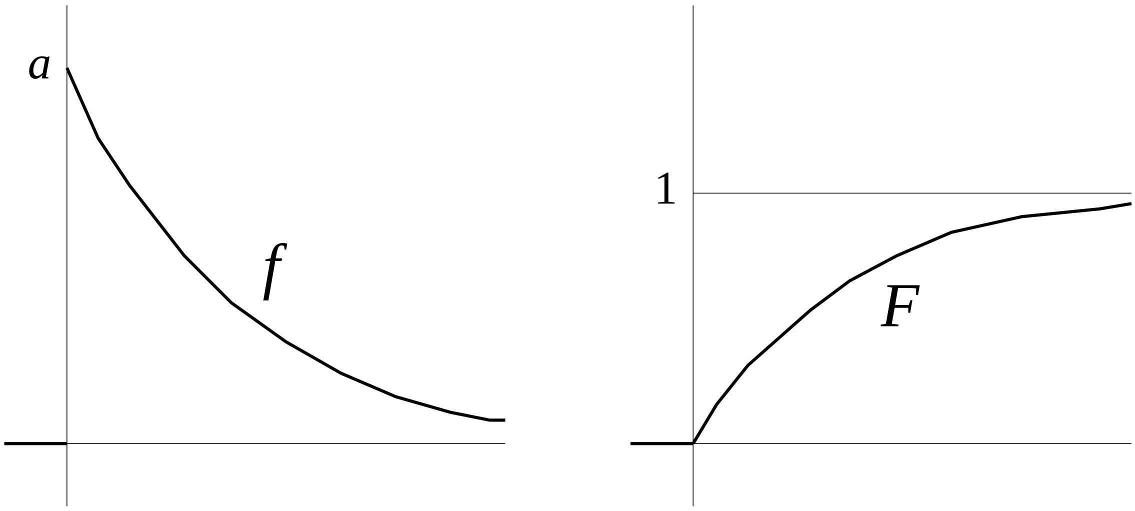
$$\log Y = \texttt{a,bcde} + 10^{-4}X,$$

waarin `a,bcde` het getal is dat we in de tabel vinden en $10^{-4}X$ de (niet vermelde) afrondingsfout. Als de afronding correct is, dan geldt: $-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{2}$.
We mogen aannemen dat $X \sim \mathrm{Un}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Door er een grotere logaritmentafel bij te halen, met bv. 8 decimalen, kunnen we voor een aantal willekeurige waarden van $Y$ de bijbehorende afrondingsfouten in de kleine tabel bepalen (in slechts vier decimalen nauwkeurig weliswaar). Is bv. $\log Y = 0{,}36277281$ volgens de grote tabel, dan is in de kleine tabel $\log Y = 0{,}3628$, zodat $X = -0{,}2719$.

**6.7 De exponentiële verdeling.**Zij $a$ een positief reëel getal. Een stochast $X$ is *exponentieel verdeeld met parameter* $a$ (kortweg $X \sim \text{Exp}(a)$) als $\mathbb{P}[X > x] = e^{-ax}$ voor alle $x \geq 0$. We vinden dan eenvoudig de dichtheids- en verdelingsfunctie van $X$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0; \\ 1 - e^{-ax} & \text{als } x > 0; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0; \\ ae^{-ax} & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

De grafieken:




**Voorbeeld 1.** De levensduur $T$ van sommige voorwerpen (borden, kopjes) heeft een exponentiële verdeling. Immers, het aantal borden dat er op een dag sneuvelt is evenredig met het aantal borden dat er nog aanwezig is, dus

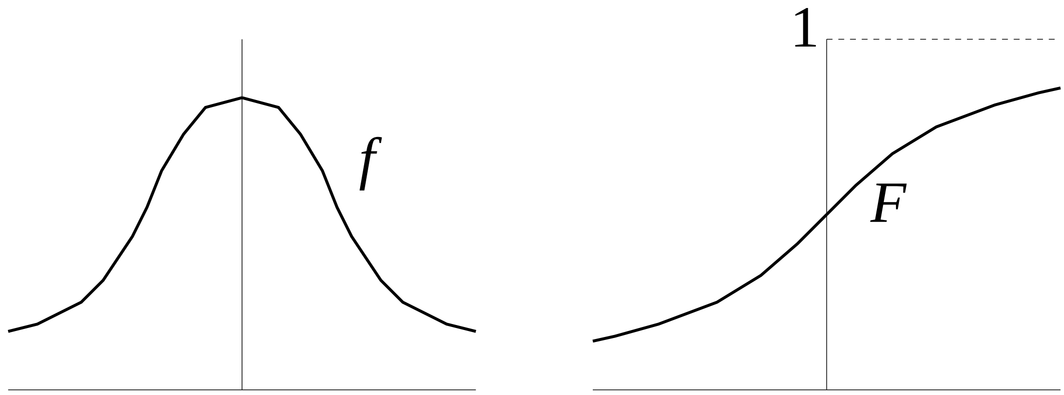
$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}[T > t] = -a\mathbb{P}[T > t]$$

voor zekere $a > 0$.
Oplossen van deze differentiaalvergelijking levert $\mathbb{P}[T > t] = e^{-at}$ (voor $t > 0$), zodat $T$ inderdaad exponentieel verdeeld is.
**Voorbeeld 2.** Wachten op de eerste klant in het Poissonproces. In hoofdstuk 7, opgave 6, is de volgende berekening gemaakt: $\mathbb{P}[T > t] = \mathbb{P}[K_t = 0] = e^{-\lambda t}$, zodat $\mathbb{P}[T \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$.
Conclusie: $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

**6.8 De Cauchy- (of arctan-)verdeling.**Zij $a$ een positief getal. Een stochast $X$ is *Cauchy verdeeld met parameter* $a$ als $X$ de volgende dichtheids- en verdelingsfunctie heeft:

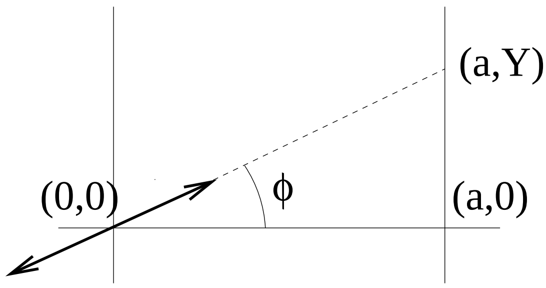
$$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

De grafieken:




**Voorbeeld.** Een tweezijdige wijzer draait om het punt (0,0) in het $x,y$-vlak en komt in een willekeurige richting tot stilstand.

De hoek die de wijzer maakt met de positieve $x$-as noemen we $\varphi$. We veronderstellen dat $\varphi$ uniform verdeeld is over $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$. Op de lijn $x = a$ wordt door de wijzer een punt $(a, Y)$ aangewezen. We laten het als een opgave (5) om te bewijzen dat deze stochast $Y$ Cauchy verdeeld is met parameter $a$.




**6.9** Laat $X$ continu verdeeld zijn met dichtheid $f$. Als $Y$ een functie is van $X$, bv. $Y = X^2$, hoe ziet de kansverdeling van $Y$ er dan uit? Dit soort vragen is meestal het eenvoudigst te beantwoorden door de verdelingsfunctie van $Y$ te berekenen.

**Voorbeeld.** Stel de omtrek $X$ van een vierkant is uniform verdeeld over $(10, 20)$. Welke kansverdeling heeft de oppervlakte $Y$ van dat vierkant?

Oplossing: Daar $Y = \left(\frac{1}{4}X\right)^2$, is voor $y > 0$: $F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \le y] = \mathbb{P}\left[\frac{1}{4}X \le \sqrt{y}\right] = \mathbb{P}[X \le 4\sqrt{y}] = F_X(4\sqrt{y})$, dus

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y \le 6\frac{1}{4}; \\ \frac{2}{5}\sqrt{y} - 1 & \text{als } 6\frac{1}{4} < y < 25; \\ 1 & \text{als } y \ge 25 \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \frac{1}{5\sqrt{y}} \cdot \mathbf{1}_{(6\frac{1}{4}, 25)}(y).$$

N.B. De onderindex "$Y$" of "$X$" bij dichtheids- en verdelingsfuncties gebruiken we als we het nodig vinden om duidelijk aan te geven over welke stochast we het hebben.

## Onafhankelijkheid, verwachtingswaarde, variantie.

**6.10 Onafhankelijkheid**De definitie in paragraaf 3.9 is niet langer bruikbaar, omdat $\mathbb{P}[X{=}x] = 0$ voor continu verdeelde stochasten $X$; De volgende definitie heeft zin voor álle stochasten, en stemt voor discrete stochasten overeen met die van paragraaf 3.9.

**Definitie.** $X$ en $Y$ heten *onafhankelijk* als voor alle $x$ en $y$ geldt:

$$\mathbb{P}[X{\le}x, Y{\le}y] = \mathbb{P}[X{\le}x] \cdot \mathbb{P}[Y{\le}y].$$

**6.11 Verwachting van continu verdeelde stochasten.**De verwachting van een stochast $X$ die continu verdeeld is met dichtheid $f$ berekenen we met de volgende formule:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.}$$

**Voorbeeld 1.** Als $X \sim \text{Un}(a,b)$, dan is

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}(a+b),$$

een antwoord dat ook intuïtief geheel duidelijk is.

**Voorbeeld 2.** Als $X \sim \text{Exp}(a)$, dan volgt uit de definitie:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} x \cdot ae^{-ax}dx.$$

Als deze integraal bestaat, moet hij gelijk zijn aan

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x \cdot ae^{-ax}dx.$$

Wel, met behulp van partiële integratie:

$$\begin{aligned} \int_0^n x \cdot ae^{-ax}dx &= \left[-xe^{-ax}\right]_{x=0}^{x=n} + \int_0^n e^{-ax}dx \\ &= -ne^{-an} + \frac{1}{a}(1 - e^{-an}) \end{aligned}$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \left(-ne^{-an} + \frac{1}{a}\left(1 - e^{-an}\right)\right) = \frac{1}{a}$$

dus $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{a}$.
**Voorbeeld 3.** Als $X \sim$ Cauchy($a$), bestaat $\mathbb{E}(X)$ niet.
Immers, $\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} dx$ bestaat slechts als $\int_{-\infty}^{0} x \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} dx$ en $\int_{0}^{\infty} x \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} dx$ bestaan.
Maar

$$\int_0^n \frac{a}{\pi} \cdot \frac{x}{a^2+x^2} dx = \left[\frac{a}{2\pi} \log(a^2+x^2)\right]_{x=0}^{x=n} = \frac{a}{2\pi} \log\left(\frac{a^2+n^2}{a^2}\right);$$

deze uitdrukking heeft geen limiet als $n \to \infty$, dus $\mathbb{E}(X)$ bestaat niet.

**Voorwaarde.** Voorbeeld 3 maakt duidelijk dat we een voorwaarde moeten opleggen aan de dichtheidsfunctie $f$ van een continu verdeelde stochast $X$, wil $\mathbb{E}(X)$ bestaan. Deze voorwaarde luidt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty.$$

## 6.12 * Verband tussen de twee definities van de verwachting.indexverwachting

v. discrete en continue stochasten Voor een discrete stochast $Y$ met waardenverzameling $W$ hebben we gedefinieerd: $\mathbb{E}(Y) = \sum_{w \in W} w \cdot \mathbb{P}[Y = w]$. Voor een continu verdeelde stochast $X$ met dichtheidsfunctie $f$ hebben we gedefinieerd: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$.
Er bestaat wel degelijk een verband tussen deze twee definities. In het nu volgende verhaal doen we alsof we alleen de eerste definitie kennen; we leiden de tweede dan af.
Zij $X$ een continu verdeelde stochast met dichtheidsfunctie $f$. Kies een klein positief getal $h$ (bijvoorbeeld $\frac{1}{10}$).
We gaan $X$ afronden (naar beneden) op gehele veelvouden van $h$. Het resultaat is een stochast $X_h$ die de waarde $kh$ aanneemt ($k \in \mathbb{Z}$) als $X$ een waarde aanneemt in $[kh, (k+1)h)$. De afgeronde stochast $X_h$ is dus een discrete stochast met mogelijke waarden

$$\ldots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \ldots$$

en kansverdeling

$$\mathbb{P}[X_h = kh] = \mathbb{P}[kh \leq X < (k+1)h] = \int_{kh}^{(k+1)h} f(x) dx.$$

$X_h$ ligt steeds heel dicht bij $X$, want $X_h \leq X < X_h + h$.
De verwachting van $X$ zal dus, wanneer we haar zinnig willen definiëren, ook dicht bij $\mathbb{E}(X_h)$ moeten liggen. Hoe kleiner $h$, des te dichter zal $\mathbb{E}(X)$ bij $\mathbb{E}(X_h)$ moeten liggen. Dit leidt ons ertoe te stellen:

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E}(X_h).$$

Omdat $X_h$ een discrete stochast is, kunnen we $\mathbb{E}(X_h)$ makkelijk uitrekenen:

$$\mathbb{E}(X_h) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kh \cdot \mathbb{P}[X_h{=}kh] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{kh}^{(k+1)h} kh \cdot f(x)dx.$$

Als $x \in [kh, (k{+}1)h)$, dan is $kh \leq x < (k{+}1)h$, zodat

$$\int_{kh}^{(k+1)h} kh \cdot f(x)dx \leq \int_{kh}^{(k+1)h} x \cdot f(x)dx \leq \int_{kh}^{(k+1)h} (k{+}1)h \cdot f(x)dx$$

en

$$\int_{kh}^{(k+1)h} (k{+}1)h \cdot f(x)dx = \int_{kh}^{(k+1)h} kh \cdot f(x)dx + h \int_{kh}^{(k+1)h} f(x)dx.$$

Door sommeren over $k$ volgt hieruit:

$$\mathbb{E}(X_h) \leq \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \leq \mathbb{E}(X_h) + h.$$

Dus:

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbb{E}(X_h) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$$

**6.13 Eigenschappen van de verwachting.** Alle eigenschappen van de verwachtingswaarde $\mathbb{E}$ die we in hoofdstuk 5 zijn tegengekomen en die niet specifiek handelen over discrete stochasten, gelden ook voor continu verdeelde stochasten. Een opsomming:

(a) $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

(b) als $X \geq 0$, dan $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

(c) als $X \geq Y$, dan $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

(d) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(e) $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$.

(f) als $X \perp\!\!\!\perp Y$, dan $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Bewijzen geven we niet. Ze zijn in de stijl van paragraaf 6.12.

Als $X$ continu verdeeld is, met dichtheid $f$, en $g$ is een enigszins nette functie, dan is $g(X)$ weer een stochast, waarvan we de verwachtingswaarde als volgt berekenen:

$$\boxed{\mathbb{E}\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx}$$

(geen bewijs). In het bijzonder levert de keuze $g(x) = (x - \mu)^2$ (waar $\mu = \mathbb{E}(X)$):

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.}$$

Ook voor de variantie geldt dat alle niet specifiek discrete eigenschappen geldig blijven:

(g) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \geq 0$.

(h) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX) = a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

(i) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+a) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

(j) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

(k) Als $X \perp\!\!\!\perp Y$ dan is $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.

(l) Als $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn, dan is $\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k)$.

(m) $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq a] \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ (Chebyshev).

Ook $\sigma_X$ en $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X)$ kunnen weer ingevoerd worden. We noemen slechts twee eigenschappen:

(n) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.

(o) $\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) + 2\sum_{i<j} \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j)$.

**Opgaven**

1. Laat in voorbeeld 2 van paragraaf 6.6 het langste van de twee stukken de lengte $Z$ hebben, dus $Z = \max\{X, 1-X\}$. Bepaal verdelingsfunctie, dichtheidsfunctie en verwachting van $Z$.

2. Bepaal de variantie van de

   (a) uniforme verdeling;

   (b) exponentiële verdeling.

3. Wachten op de trein. Treinen naar Duistervoort vertrekken met tussenpozen van precies 1 uur. Als we op een willekeurig tijdstip op het station komen, moeten we een tijd $T$ wachten tot de volgende trein vertrekt. Bepaal verwachting en variantie van $T$ ($T$ is, in minuten, uniform verdeeld over $(0, 60)$.).

4. Bewijs dat de stochast $Y$ in het voorbeeld van paragraaf 6.8 inderdaad Cauchy-verdeeld is.

5. Laat $X$ een Cauchy-verdeling hebben met parameter $a = 1$. Toon aan dat $Y = \frac{1}{X}$ dezelfde kansverdeling heeft als $X$.
   Aanwijzing: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{als } x > 0; \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{als } x < 0. \end{cases}$

6. Laat $X$ en $Y$ onafhankelijke stochasten zijn, beide uniform verdeeld over $(0, 1)$. Bepaal verdelingsfunctie, dichtheidsfunctie en verwachting van $Z = \max\{X, Y\}$.

7. Stel de levensduur $T$ van een voorwerp is exponentieel verdeeld met parameter $a$. Als gegeven is dat het voorwerp al minstens 100 dagen oud is, wat is dan de kans dat het ook de 101[e] dag ongeschonden doorkomt? M.a.w. bereken de kans $\mathbb{P}(T > 101 | T > 100)$.
   Moraal: Slijtage speelt geen rol. De exponentiële verdeling is de enige verdeling die deze eigenschap heeft.

8. Laat $X$ continu verdeeld zijn met verdelingsfunctie $F$ en dichtheidsfunctie $f$.

   (a) Toon aan dat $Y = X^2$ een verdelingsfunctie $G$ en een dichtheidsfunctie $g$ heeft die gegeven worden door

$$\begin{array}{ll} G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) & (y > 0); \\ g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\Big) & (y > 0). \end{array}$$

(b) Idem voor $Z = aX + b$ $(a > 0)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= F\left(\tfrac{z-b}{a}\right); \\ h(z) &= \tfrac{1}{a} f\left(\tfrac{z-b}{a}\right). \end{aligned}$$

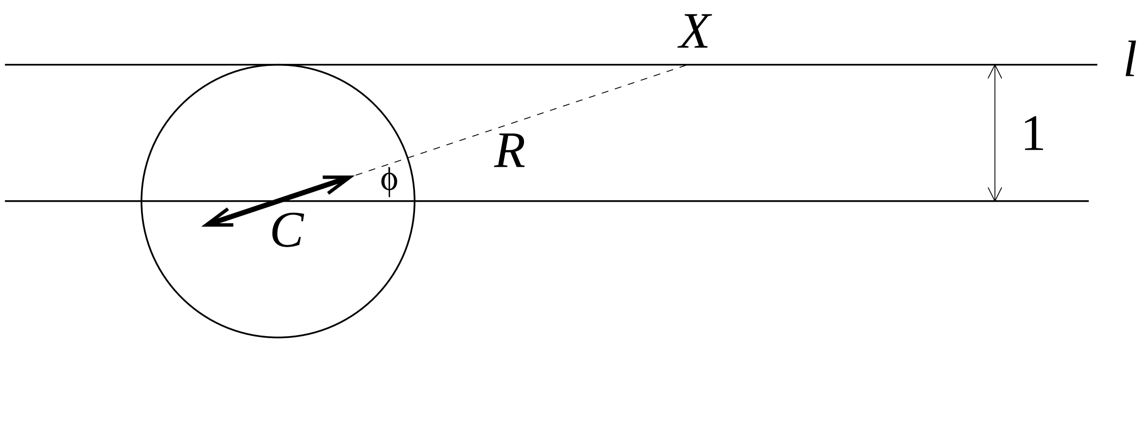
9. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochasten met dezelfde verdelingsfunctie $F$. Zij $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

   (a) Bepaal de verdelingsfunctie van $Y_n$.
   Aanwijzing: $[Y_n > x] = \bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k > x]$.

   (b) Toepassing: tien lampen, allen met een levensduur die exponentieel verdeeld is met parameter $\frac{1}{20}$, worden tegelijk ingeschakeld. Zij $T$ het tijdstip waarop de eerste lamp kapot gaat. Bereken verdelingsfunctie, dichtheidsfunctie en verwachting van $T$.

10. $X_1$ en $X_2$ zijn onafhankelijke stochasten. $\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$, $\mathbb{E}(X_2) = \mu_2$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \sigma_1^2$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_2) = \sigma_2^2$. Bepaal de verwachtingswaarde en de variantie van het product $Y = X_1 \cdot X_2$.

11. Een tweezijdige pijl draait rond op een pen op $C$, en komt zodanig tot stilstand dat de hoek $\varphi$ met een rechte $\ell$ op afstand 1 uniform over $(0, \pi)$ verdeeld is. De tot stilstand gekomen pijl wijst een punt $X$ aan op $\ell$. Zij $R$ de afstand tussen $C$ en $X$, en zij $Y = \frac{1}{R^2}$. Bepaal verdelings- en dichtheidsfunctie van $Y$.




12. Stel, $X$ en $Y$ zijn onafhankelijke stochasten; $X$ neemt de waarden $0, \ldots, n-1$ aan elk met kans $\frac{1}{n}$, en $Y \sim \mathrm{Un}(0, 1)$.
    Bewijs: $X + Y \sim \mathrm{Un}(0, n)$.

# Hoofdstuk 7

# De normale verdeling

**7.1** De binomiale verdeling krijgt voor grote $n$ een steeds mooiere 'klok'-vorm. Nu is een binomiaal verdeelde stochast op te vatten als de som van $n$ onafhankelijke alternatief verdeelde stochasten. Iets dergelijks blijkt voor veel meer verdelingen dan alleen de alternatieve verdeling te gelden. Door dit voor een aantal verdelingen uit te rekenen, ontdekte men al in de 18$^{\text{e}}$ en 19$^{\text{e}}$ eeuw speciale gevallen en beperkte versies van wat later de centrale-limietstelling zou gaan heten.
De formulering van deze stelling, die in paragraaf 7.2 staat, is bewezen door Lyapunov omstreeks 1900; later vond men allerlei veralgemeningen.

## Theorie.

**7.2 De centrale-limietstelling.** Zij $X_1, X_2, \ldots$ een rij *onafhankelijke* stochasten zó, dat alle $X_k$ dezelfde verdelingsfunctie hebben, en dus ook dezelfde verwachting $\mu$ ($|\mu| < \infty$) en dezelfde variantie $\sigma^2$ ($0 < \sigma < \infty$).
We zijn geïnteresseerd in de zgn. partiële sommen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
Nu zal de rij $S_1, S_2, \ldots$ zelf i.h.a. niet interessant zijn, omdat de verdeling van $S_n$ "wegloopt" als $n \to \infty$, immers $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$. Daarom bekijken we liever de stochasten $S_1 - \mu, S_2 - 2\mu, S_3 - 3\mu, \ldots$; deze hebben alle verwachting 0.
Maar een nadeel blijft dat de verdeling van $S_n - n\mu$ zich steeds verder "uitspreidt" als $n$ stijgt, immers $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n - n\mu) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = n\sigma^2$. Daarom bekijken we de volgende stochasten:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

anders geschreven:

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}}.$$

Merk op dat $\mathbb{E}(Z_n) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z_n) = 1$ voor elke $n$.

We noemen $Z_n$ daarom *gestandaardiseerde stochasten* .
Voor de achtereenvolgende verdelingsfuncties van $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ kan men het volgende bewijzen:

**Centrale-limietstelling:**

Zij $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochasten, alle met dezelfde verdelingsfunctie, verwachting $\mu$ en variantie $\sigma^2$.
Definieer

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ en } Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Dan geldt voor elke $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Z_n \le x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

We bewijzen deze stelling niet.

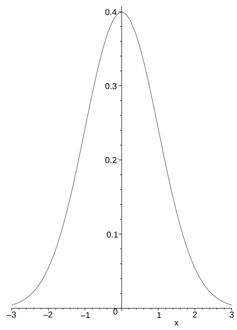
## 7.3 Standaard-normale verdeling.

De zojuist gevonden functie is de verdelingsfunctie van de *standaard-normale verdeling* . Deze is zo belangrijk, dat men er een speciale letter voor heeft gereserveerd, $\Phi$, in plaats van de gebruikelijke $F$.
Dus:

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.}$$

De bijbehorende dichtheidsfunctie krijgen we nu cadeau; hiervoor wordt de letter $\varphi$ gebruikt:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.}$$

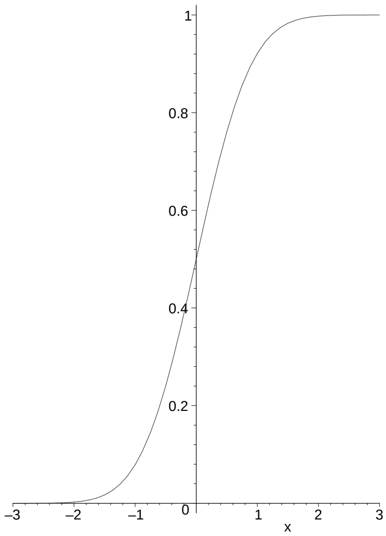



Het lijkt wellicht wat vreemd dat er in de definitie van een verdelingsfunctie een integraalteken staat. De reden hiervoor is dat we de primitieve functie van $\varphi$ ($\Phi$ dus) niet op een elementaire manier in bekende functies kunnen uitdrukken (veeltermen, sin, arctan, log, exp, $\ldots$).

Om dezelfde reden is het evenmin mogelijk om rechtstreeks te bewijzen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1,$$

iets wat we wel degelijk moeten weten, willen we van een dichtheid kunnen spreken. Met een omweg lukt het echter wel: er is een bewijs mogelijk m.b.v. poolcoördinaten, zie opgave (13).




## 7.4 Verwachting en variantie.

Zij $Z$ standaard-normaal verdeeld. Dan is

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = 0 \text{ en } \mathbb{V}\text{ar}(Z) = 1.}$$

Dit ligt voor de hand, want in paragraaf 7.2 hebben we gezien dat

$$F_Z(z) = \Phi(z) = \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z)$$

voor zekere stochasten $Z_1, Z_2, \ldots$ met $\mathbb{E}(Z_n) = 0$ en $\mathbb{V}\text{ar}(Z_n) = 1$.

Bewijs. Om

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

te bepalen, berekenen we

$$\int_0^n xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{x=0}^{x=n} = 1 - e^{-\frac{1}{2}n^2},$$

zodat

$$\int_0^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

Evenzo volgt $\int_{-\infty}^0 xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -1$, zodat $\mathbb{E}(Z) = 0$.

$\mathbb{V}\text{ar}(Z)$ berekenen we met partiële integratie:

$$\begin{aligned}
\int_0^n x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx &= \int_0^n x \cdot xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \left[-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{x=0}^{x=n} + \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= -ne^{-\frac{1}{2}n^2} + \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,
\end{aligned}$$

zodat

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Evenzo is

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

zodat

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1. \quad \square$$

**7.5 Normale verdeling.** We zeggen dat de stochast $Y$ *normaal verdeeld* is met (twee!) parameters $\mu$ en $\sigma^2$ ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$) als de gestandaardiseerde stochast $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ standaardnormaal verdeeld is.
Merk op: $\mu = \mathbb{E}(Y)$, $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.
Notatie: $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (en dus $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$).
De verdelingsfunctie van $Y$ is:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \le y] = \mathbb{P}\left[Z \le \tfrac{y-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\tfrac{y-\mu}{\sigma}\right),$$

en de dichtheid (kettingregel!):

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \tfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\tfrac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Bij normaal verdeelde stochasten kunnen we, als de parameters $\mu$ en $\sigma$ bekend zijn, alle kansen berekenen m.b.v. de functie $\Phi$. In elk statistiekboek is wel een tabel van $\Phi$ te vinden. In dit dictaat hebben we 'm in Bijlage A gezet.
**Eigenschappen van $\Phi$.** Om snel te kunnen rekenen met de tabel is het handig enkele eigenschappen van de normale verdeling te kennen.

**(a)**

$$\boxed{\Phi(0) = \tfrac{1}{2}.}$$

BEWIJS. $\Phi(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ wegens de symmetrie van $\varphi$. $\square$

**(b)**

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).}$$

BEWIJS. Ook dit is onmiddelijk duidelijk uit de symmetrie van $\varphi$:

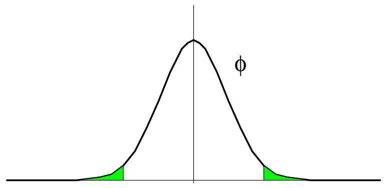
$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= \mathbb{P}[Z \le -x] = \mathbb{P}[Z \ge x] \\ &= 1 - \Phi(x). \quad \square \end{aligned}$$

**(c)** Als $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ en $a > 0$ dan $\mathbb{P}[|Y - \mu| > a\sigma] = 2(1 - \Phi(a))$.
Immers (bij ($\star$) maken we gebruik van de symmetrie van $\varphi$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|Y - \mu| > a\sigma] &= \mathbb{P}[Y - \mu > a\sigma \text{ of } Y - \mu < -a\sigma] \\
&\overset{\star}{=} 2\mathbb{P}[Y - \mu > a\sigma] \\
&= 2\left(1 - \mathbb{P}[Y - \mu \leq a\sigma]\right) \\
&= 2\left(1 - \mathbb{P}\left[\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq a\right]\right) \\
&= 2\left(1 - \Phi(a)\right). \quad \square
\end{aligned}$$

(d) Een bijzonder gevolg van (c) krijgen we door $a = 2$ te kiezen:

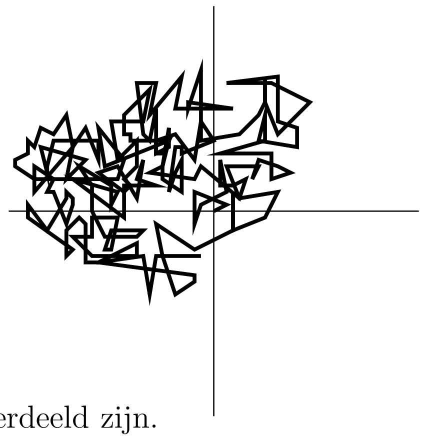
$$\mathbb{P}[|Y - \mu| > 2\sigma] = 2(1 - \Phi(2)) \approx 0{,}046 < 5\%).$$




We zien: elke normaal verdeelde stochast voldoet aan de $2\sigma$-regel.
Ga zelf na dat voor normaal verdeelde stochasten afwijkingen van $\geq 1\sigma$ heel "normaal" zijn (kans $\approx$0,318), en dat afwijkingen van $\geq 3\sigma$ uiterst weinig voorkomen (kans $\approx$ 0,0026).

## Praktijk.

**7.6 * Brownse beweging in $\mathbb{R}^2$.**
Microscopisch kleine deeltjes zwevend in een vloeistof zijn in een rusteloze chaotische beweging. Zoals we nu weten (de botanicus Brown dacht dat al in 1828) is de beweging van zo'n deeltje het gevolg van de stoten die het krijgt van de omringende vloeistofmoleculen die er onophoudelijk van alle kanten tegenaan botsen.
Een deeltje dat op tijdstip 0 in de oorsprong is, bevindt zich na 1 tijdseenheid in een willekeurig punt $(X, Y)$. Als men nu de volgende vooronderstellingen maakt:



**(a)** $X$ en $Y$ zijn onafhankelijk;

**(b)** $(X, Y)$ is continu verdeeld met een dichtheid $f$ die constant is op iedere cirkel om de oorsprong;

dan kan men bewijzen dat $X$ en $Y$ beide normaal verdeeld zijn.

**7.7 Toepassing van de Centrale Limietstelling.**
Door de stelling in paragraaf 7.2 wat anders te formuleren vinden we:

Als een stochast $X$ te schrijven is als som van een groot aantal onafhankelijke stochasten die allen dezelfde verdeling hebben, dan is $X$ bij benadering normaal verdeeld, dus (met $\mu = \mathbb{E}(X)$ en $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$):

$$\mathbb{P}[X \leq a] \approx \Phi\left(\tfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Deze uitdrukking is de zogenaamde *normale benadering* voor $\mathbb{P}[X \leq a]$. In veel gevallen blijkt de benadering al bij de som van een klein aantal termen vrij goed.
**Continuïteitscorrectie.** Als $X$ alleen gehele waarden aanneemt, an zou $\mathbb{P}[X = k]$ in de normale benadering 0 worden, voor elke $k$. We redden de situatie door $\mathbb{P}[X = k]$ te schrijven als

$$\mathbb{P}[k - \tfrac{1}{2} < X \leq k + \tfrac{1}{2}];$$

deze kans heeft als normale benadering

$$\Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right)$$

(als $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sigma^2$). Dientengevolge vervangen we ook

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X < k] \quad \text{door} \quad \mathbb{P}[X \leq k - \frac{1}{2}];\\
&\mathbb{P}[X \leq k] \quad \text{door} \quad \mathbb{P}[X \leq k + \frac{1}{2}];\\
&\mathbb{P}[X > k] \quad \text{door} \quad \mathbb{P}[X \geq k + \frac{1}{2}];\\
&\mathbb{P}[X \geq k] \quad \text{door} \quad \mathbb{P}[X \geq k - \frac{1}{2}].
\end{aligned}$$

Als $X$ alleen waarden in $\{\ldots, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots\}$ aanneemt, moet je natuurlijk ook een continuïteitscorrectie gebruiken. Nu niet met $\frac{1}{2}$, maar met $\frac{1}{14}$.

### 7.8 Voorbeelden bij 7.7.

**(a)** Zij $X$ het totaal aantal ogen in $n$ worpen met een dobbelsteen. Dan is

$$\mathbb{P}[X \leq k] \approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}}\right);$$

al bij kleine $n$ blijk je mooie resultaten te krijgen.

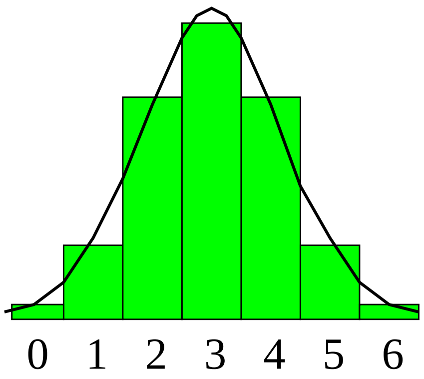
**(b)** Als $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, dan kunnen we $X$ schrijven als $X = X_1 + \ldots + X_n$, waarin de $X_k$'s onafhankelijk zijn en dezelfde (alternatieve) verdeling hebben. 7.7 geeft dus voor "grote" $n$:

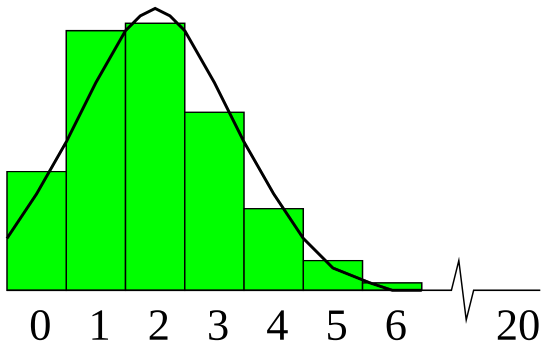
$$\mathbb{P}[X \leq k] \approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Hóé groot $n$ moet zijn hangt ook van $p$ af. Als $p$ dicht bij $\frac{1}{2}$ ligt, is $X$ zelf ook al nagenoeg symmetrisch verdeeld; $X$ zal dan bij toenemende $n$ veel eerder de "klok"vorm gaan benaderen dan wanneer $p$ dicht bij 0 of 1 ligt: dan is de verdeling van $X$ veel schever. Ter illustratie tekenen we de exacte $\mathrm{Bin}(n,p)$ kansen en de benaderde $\mathrm{N}(np, np(1-p))$ dichtheid voor $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$ en voor $n = 20$, $p = \frac{1}{10}$. Oordeel zelf.

### 7.9 Een uitgewerkt voorbeeld.

Een stadion heeft 65.000 plaatsen. Omdat gemiddeld 2% van de mensen die een kaartje gekocht hebben, niet komt opdagen, wordt besloten in totaal $n$ kaartjes te




verkopen ($n > 65.000$). Men wil echter de kans dat er meer dan 65.000 mensen komen, kleiner dan 0,05 houden. Hoe groot mag $n$ maximaal zijn?

**Oplossing.** Zij $X$ het aantal kaartjeskopers dat daadwerkelijk komt. Dan is $X \sim \text{Bin}(n; 0{,}98)$. Er moet gelden:

$$\mathbb{P}[X > 65.000] < 0{,}05.$$

Wel,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X > 65.000] &\approx 1 - \Phi\left(\frac{65.000 + \frac{1}{2} - 0{,}98n}{\sqrt{0{,}02 \cdot 0{,}98 \cdot n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{65.000 + \frac{1}{2} - 0{,}98n}{0{,}14\sqrt{n}}\right) < 0{,}05; \end{aligned}$$

uit de tabel halen we dat moet gelden

$$\frac{65.000 + \frac{1}{2} - 0{,}98n}{0{,}14\sqrt{n}} > 1{,}65$$

waaruit volgt

$$n \leq 66.266.$$

## Opgaven

1. Zij $X$ het aantal kop in vier muntworpen.

   (a) Bepaal de exacte waarde van $\mathbb{P}[X < 3]$.

   (b) Bepaal de normale benadering van $\mathbb{P}[X < 3]$.

2. In 12 worpen met een dobbelsteen zij $X$ het aantal zessen en $Y$ het totaal aantal ogen. Benader de normale benaderingen voor de kansen

   (a) $\mathbb{P}[X \geq 5]$;

   (b) $\mathbb{P}[|Y - 42| \geq 10]$.

3. Een test bestaat uit 30 vragen. Bij elke vraag moet men kiezen uit drie antwoorden, waarvan er één het goede antwoord is. Stel dat de proefpersoon zuiver op de gok bij iedere vraag een antwoord kiest. $X$ is het aantal goede antwoorden.

   (a) Benader $\mathbb{P}[X > 15]$;

   (b) Bepaal het kleinste natuurlijke getal $m$ waarvoor $\mathbb{P}[X > m] < 0,01$ (bij $m$ goede antwoorden is men geslaagd).

4. $X_1, \ldots, X_{10}$ zijn onafhankelijke, normaal verdeelde stochasten, bv. 10 herhalingen van een bepaalde meting.
   Stel $\mathbb{E}(X_i) = \mu = 3$ en $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \sigma^2 = 1$. Bepaal de volgende kansen (n.b. $\Phi(3{,}16) \approx 0{,}9992$):

   (a) $\mathbb{P}[2{,}1 < X_1 < 4{,}0]$;

   (b) $\mathbb{P}[2{,}1 < \overline{X} < 4{,}0]$ (waar $\overline{X} := \frac{1}{10}(X_1 + \ldots + X_{10})$).

5. Verkeersongelukken.

   (a) Laat het aantal verkeersongelukken $X$ in 1 jaar te N. een Poissonverdeling hebben met $\lambda = 400$. Hoe groot is $\mathbb{P}[X > 440]$?

   (b) Laat $X_1$ en $X_2$ de aantallen in twee opeenvolgende jaren zijn; stel $X_1$, $X_2$ beide Poisson(400) en onafhankelijk. Hoe groot is $\mathbb{P}[|X_1 - X_2| \geq 50]$?

6. Laat de lengte $X$ van de Nederlandse man normaal verdeeld zijn met gemiddelde $\mu = 172$ cm en standaarddeviatie $\sigma = 6$ cm. Hoeveel procent van de nederlandse mannen is

(a) langer dan 180 cm? (antwoord 9,2%)

(b) korter dan 160 cm? (antwoord 2,3%)

7. In $n$ worpen met een munt krijgen we $S_n$ keer kop. Zij $Z_n = \frac{S_n}{n}$. In hoofdstuk 6, opgave 4, vonden we dat de ongelijkheid van Chebyshev garandeert dat voor $n \geq 125.000$ geldt dat $\mathbb{P}[|Z_n - \frac{1}{2}| \geq 0,01] \leq 0,02$. Laat zien dat dit met de normale benadering al bij veel kleinere $n$ bereikt wordt.

8. Stel dat in een land de lengte $X$ van mannen normaal verdeeld is, met $\mu_X =$ 180 cm, $\sigma_X = 6$ cm, terwijl de lengte $Y$ van vrouwen normaal verdeeld is met $\mu_Y = 173$ cm, $\sigma_Y = 5$ cm. Hoe groot is de kans dat een willekeurig gekozen man langer is dan een willekeurig gekozen vrouw? (Het antwoord op deze vraag geeft aan bij hoeveel % van de echtparen men kan verwachten dat de man langer is dan de vrouw, als tenminste de lengte bij partnerkeuze geen rol zou spelen).

9. Laat $X$ en $Y$ onafhankelijk zijn, beide standaardnormaal verdeeld. Bepaal de verdelingsfunctie van $U = \frac{X}{Y}$.

10. Twee theaters, $A$ en $B$, strijden om de gunst van 1600 bezoekers. Veronderstel dat iedere bezoeker, totaal willekeurig en onafhankelijk van alle andere, één der theaters kiest, elk met kans $\frac{1}{2}$. Hoeveel zitplaatsen moet theater $A$ minimaal hebben opdat de kans dat in dit theater minstens één bezoeker geweigerd zal moeten worden wegens plaatsgebrek, minder is dan 1% ?

11. Een verzekeringsmaatschappij betaalt per schadegeval een vast bedrag van 1000 gulden. Het aantal verzekerden is 10.000. Voor iedere verzekerde is de kans op zo'n schadegeval in 1 jaar 0,005. De kans op meer dan één schadegeval in 1 jaar voor één verzekerde is verwaarloosbaar. Hoe hoog moet de jaarpremie zijn opdat de kans dat de maatschappij in een jaar verlies zou lijden, kleiner zij dan 0,001? ($\Phi^{-1}$(0,999) = 3,08).

12. Twee artikelen, I en II, van verschillende merken, hebben levensduur $T_1$ resp. $T_2$. $T_1$ en $T_2$ zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda_1$ resp. $\lambda_2$. Stel $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

    (a) De verwachte levensduur van een artikel van merk I is korter dan de verwachte levensduur van een artikel van merk II. Laat zien dat de kans dat een artikel van merk I tòch langer meegaat, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ is.

(b) Stel $\lambda_1 = 1$. De consumentenbond gaat een test uitvoeren waarbij 100 keer de levensduur van artikel I en die van artikel II worden vergeleken. De fabrikant van artikel II besluit daarom zijn product te verbeteren ($\lambda_2$ te veranderen), want hij wil de kans dat zijn artikel vaker dan 20 $\times$ verliest, kleiner maken dan 0,01. Door welke waarden van $\lambda_2$ wordt dit gegarandeerd?

13. * Om te bewijzen dat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}$ doen we het volgende. Zij $f(x) = ce^{-\frac{1}{2}x^2}$. Te bepalen $c$ zó dat $f$ een dichtheid wordt, d.w.z. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Neem twee onafhankelijke stochasten $X$ en $Y$, beide met dichtheid $f$.

(a) Bepaal de simultane dichtheid $f_{X,Y}$.

Zij $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

(b) Druk $F_Z$ uit in $f_{X,Y}$.

We schakelen nu over op poolcoördinaten. Zij $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

(c) Gebruik dat

$$\int\int_C e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^z \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot rd\varphi dr$$

om te bewijzen dat

$$F_z(z) = 2\pi c^2(1 - e^{-\frac{1}{2}z^2})$$

(voor $z > 0$).

(d) Bereken nu $c$. Aanwijzing: Bedenk dat

$$\lim_{n\to\infty} F_Z(z) = 1.$$

# Appendix A

# Tabel voor de normale verdeling

Voor de cijfers moet "0," worden gezet. 637 betekent dus: 0,637.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 500 | 504 | 508 | 512 | 516 | 520 | 524 | 528 | 532 | 536 |
| 0,1 | 540 | 544 | 548 | 552 | 556 | 560 | 564 | 567 | 571 | 575 |
| 0,2 | 579 | 583 | 587 | 591 | 595 | 599 | 603 | 606 | 610 | 614 |
| 0,3 | 618 | 622 | 626 | 629 | 633 | 637 | 641 | 644 | 648 | 688 |
| 0,4 | 655 | 659 | 663 | 666 | 670 | 674 | 677 | 681 | 684 | 688 |
| 0,5 | 691 | 695 | 698 | 702 | 705 | 709 | 712 | 716 | 719 | 722 |
| 0,6 | 726 | 729 | 732 | 736 | 739 | 742 | 745 | 749 | 752 | 755 |
| 0,7 | 758 | 761 | 764 | 767 | 770 | 773 | 776 | 779 | 782 | 785 |
| 0,8 | 788 | 791 | 794 | 797 | 800 | 802 | 805 | 808 | 811 | 813 |
| 0,9 | 816 | 819 | 821 | 824 | 826 | 829 | 831 | 834 | 836 | 839 |
| 1,0 | 841 | 844 | 846 | 848 | 851 | 853 | 855 | 858 | 860 | 862 |
| 1,1 | 864 | 867 | 869 | 871 | 873 | 875 | 877 | 879 | 881 | 883 |
| 1,2 | 885 | 887 | 889 | 891 | 893 | 894 | 896 | 898 | 900 | 901 |
| 1,3 | 903 | 905 | 907 | 908 | 910 | 911 | 913 | 915 | 916 | 918 |
| 1,4 | 919 | 921 | 922 | 924 | 925 | 926 | 928 | 929 | 931 | 932 |
| 1,5 | 933 | 934 | 936 | 937 | 938 | 939 | 941 | 942 | 943 | 944 |
| 1,6 | 945 | 946 | 947 | 948 | 949 | 951 | 952 | 953 | 954 | 954 |
| 1,7 | 955 | 956 | 957 | 958 | 959 | 960 | 961 | 962 | 962 | 963 |
| 1,8 | 964 | 965 | 966 | 966 | 967 | 968 | 969 | 969 | 970 | 971 |
| 1,9 | 971 | 972 | 973 | 973 | 974 | 974 | 975 | 976 | 976 | 977 |
| 2,0 | 977 | 978 | 978 | 979 | 979 | 980 | 980 | 981 | 981 | 982 |
| 2,1 | 982 | 983 | 983 | 983 | 984 | 984 | 985 | 985 | 985 | 986 |
| 2,2 | 9861 | 9864 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2,3 | 9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2,4 | 9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2,5 | 9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2,6 | 9952 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2,7 | 9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2,8 | 9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2,9 | 9981 | 9982 | 9982 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |

# Index