Opgaven Lineaire Programmering

donderdag 4 december 2008.

8. Beschouw de volgende polyeder in $\mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{P} := \{ \vec{x} \in [-1,1]^5 \mid A\vec{x} = \vec{b} \} ,$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

De volgende punten liggen in $\mathcal{P}$:

(a) $\vec{x} = (0,0,1,0,0)$;

(b) $\vec{x} = (1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1)$;

(c) $\vec{x} = (0,1,1,-1,0)$.

Geef in elk van deze gevallen aan of $\vec{x}$ een hoekpunt is van $\mathcal{P}$. Zo nee, schrijf dan $\vec{x}$ als een convexe combinatie van andere punten van $\mathcal{P}$. Zo ja, geef een vector $\vec{c}$, zó dat $\vec{x}$ de unieke oplossing is van het lineaire programma

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer} \quad & \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ \text{onder restricties} \quad & A\vec{x} = \vec{b} \\ & -\mathbb{1} \le \vec{x} \le \mathbb{1} . \end{aligned}$$

($\mathbb{1}$ is de vector $(1,1,1,1,1) \in \mathbb{R}^5$.)

9. Druk voor elk van de volgende lineaire programma's de optimale waarde en de optimale oplossing voor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ uit in de vector $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Geef voor elk programma het tableau behorende bij het optimum. (Het vinden van de tableaux bij (c) en (d) is een bonusopgave.)

(a)

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer} \quad & \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ \text{onder de restrictie} \quad & 0 \le \vec{x} \le \mathbb{1} . \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{minimaliseer} \quad & \langle \mathbb{1}, \vec{x} \rangle + \langle \mathbb{1}, \vec{y} \rangle \\ \text{onder de restricties} \quad & \vec{x} - \vec{y} = \vec{c} , \\ & \vec{x} \ge 0, \vec{y} \ge 0 . \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer} \quad & \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ \text{onder de restricties} \quad & \langle \mathbb{1}, \vec{x} \rangle = k \\ & 0 \le \vec{x} \le \mathbb{1} . \end{aligned}$$

Hierbij is k een geheel getal met $1 \le k \le n$.

(d)

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer} \quad & \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ \text{onder de restrictie} \quad & 0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 1 . \end{aligned}$$