

Opgaven Lineaire Programmering

donderdag 4 december 2008.

8. Beschouw de volgende polyeder in \mathbb{R}^5 :

$$\mathcal{P} := \{ \vec{x} \in [-1, 1]^5 \mid A\vec{x} = \vec{b} \},$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De volgende punten liggen in \mathcal{P} :

(a) $\vec{x} = (0, 0, 1, 0, 0)$;

(b) $\vec{x} = (1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1)$;

(c) $\vec{x} = (0, 1, 1, -1, 0)$.

Geef in elk van deze gevallen aan of \vec{x} een hoekpunt is van \mathcal{P} . Zo nee, schrijf dan \vec{x} als een convexe combinatie van andere punten van \mathcal{P} . Zo ja, geef een vector \vec{c} , zó dat \vec{x} de unieke oplossing is van het lineaire programma

$$\begin{aligned} &\text{maximaliseer} && \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ &\text{onder restricties} && A\vec{x} = \vec{b} \\ &&& -\mathbb{1} \leq \vec{x} \leq \mathbb{1}. \end{aligned}$$

($\mathbb{1}$ is de vector $(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$.)

9. Druk voor elk van de volgende lineaire programma's de optimale waarde en de optimale oplossing voor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ uit in de vector $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Geef voor elk programma het tableau behorende bij het optimum. (Het vinden van de tableaux bij (c) en (d) is een bonusopgave.)

(a)

$$\begin{aligned} &\text{maximaliseer} && \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ &\text{onder de restrictie} && 0 \leq \vec{x} \leq \mathbb{1}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\text{minimaliseer} && \langle \mathbb{1}, \vec{x} \rangle + \langle \mathbb{1}, \vec{y} \rangle \\ &\text{onder de restricties} && \vec{x} - \vec{y} = \vec{c}, \\ &&& \vec{x} \geq 0, \vec{y} \geq 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} &\text{maximaliseer} && \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ &\text{onder de restricties} && \langle \mathbb{1}, \vec{x} \rangle = k \\ &&& 0 \leq \vec{x} \leq \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Hierbij is k een geheel getal met $1 \leq k \leq n$.

(d)

$$\begin{aligned} &\text{maximaliseer} && \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ &\text{onder de restrictie} && 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1. \end{aligned}$$