Opgaven Lineaire Programmering

donderdag 18 december 2008.

13. Beschouw het volgende lineaire programma:

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer} \quad & \langle \vec{c}\,,\, \vec{x} \rangle\ , \\ \text{onder restricties} \quad & A\vec{x} \leq -\vec{c}\ , \\ & \vec{x} \geq 0\ , \end{aligned}$$

waarbij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ en $A^\top = -A$. Gegeven dat er een geldige oplossing bestaat, bepaal de optimale waarde.

14. Beschouw de volgende twee duale programma's P en P^*:

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer} \quad & \langle \vec{c}\,,\, \vec{x} \rangle\ , \\ \text{onder restricties} \quad & A\vec{x} = \vec{b}\ , \\ & \vec{x} \geq 0\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimaliseer} \quad & \langle \vec{b}\,,\, \vec{y} \rangle\ , \\ \text{onder restrictie} \quad & A^\top \vec{y} \geq \vec{c}\ , \end{aligned}$$

met zoals gebruikelijk $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ en $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Bij het werken met algoritmen is het handig te weten of de geldige gebieden D en D^* compact zijn.

(a) Laat zien dat de compactheid van D impliceert dat D^* onbegrensd is.

(b) Geldt ook de omgekeerde implicatie?

15. Beschouw het volgende maximalisatieprobleem voor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer} \quad & \langle \vec{c}\,,\, \vec{x} \rangle\ , \\ \text{onder restrictie} \quad & \|A\vec{x} - \vec{b}\|_1 \leq 1\ , \end{aligned}$$

waarbij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Formuleer dit probleem als een lineair programma P in vergelijkingsvorm.

(b) Bepaal het duale programma P^*, en laat zien dat het equivalent is met het probleem

$$\begin{aligned} \text{minimaliseer} \quad & \langle \vec{b}\,,\, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|_\infty\ , \\ \text{onder restrictie} \quad & A^\top \vec{y} = \vec{c}\ . \end{aligned}$$

(c) Geef een direct argument — zonder over lineaire programma's te praten — dat als $\vec{x}$ een geldige oplossing is het eerste probleem, (d.w.z. $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_1 \leq 1$), en $\vec{y}$ een geldige oplossing is van het tweede probleem, (d.w.z. $A^\top \vec{y} = \vec{c}$), er geldt:

$$\langle \vec{c}\,,\, \vec{x} \rangle \leq \langle \vec{b}\,,\, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|_\infty\ .$$

De normen $\|\vec{z}\|_1$ en $\|\vec{z}\|_\infty$ van een vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$ zijn gedefinieerd door

$$\|\vec{z}\|_1 := \sum_{i=1}^{m} |z_i|\ ; \quad \|\vec{z}\|_\infty := \max\{\, |z_i| \mid i = 1, \ldots, m \,\}\ .$$