Opgaven Lineaire Programmering

donderdag 8 januari 2009.

16. Beschouw het volgende lineaire programma:

$$\begin{array}{rl} \text{maximaliseer} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \ , \\ \text{onder restricties} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ , \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ , \end{array}$$

waarbij c_1, c_2 en c_3 verschillende reële getallen zijn. Het domein D van dit programma is een gelijkzijdige driehoek in $\mathbb{R}^3$. We gaan de werking van de inwendige-punt-methode illustreren aan dit zeer eenvoudige voorbeeld (dat natuurlijk veel gemakkelijker direct kan worden opgelost).

(a) Bepaal de optimale oplossing en de optimale waarde.

Zij voor $\mu > 0$ de functie $f_\mu : D \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_\mu(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \mu \log(x_1x_2x_3) \ .$$

Zij $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{g(\mu) - c_j} = \frac{1}{\mu} \ , \qquad g(\mu) > c_1, c_2, c_3 \ .$$

(b) Druk het centrale pad $\vec{x}^*(\mu)$ van het programma (het optimale punt van f_μ) uit in c_1, c_2, c_3 en g.

(c) Toon aan dat $\vec{x}^*(\mu)$ voor $\mu \downarrow 0$ nadert tot de optimale oplossing uit (a).

Hint: Laat eerst zien dat $\lim_{\mu \downarrow 0} g(\mu) = \max(c_1, c_2, c_3)$.

17. Op het begrensde domein $D := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} \leq \vec{b} \}$ (met $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$) bekijken we de 'logaritmische barrière' $\varphi : D \to \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto -\sum_{i=1}^m \log(b_i - \langle \vec{a}_i \, , \, \vec{x} \rangle)$. (Hierbij is $\vec{a}_i$ de i-de rij van de matrix A.)

(a) Zij $\vec{u}$ een inwendig punt van D, en zij $\mathcal{E}_{\text{inw}}$ de ellipsoïde gegeven door

$$\mathcal{E}_{\text{inw}} := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{x} - \vec{u} \, , \, \varphi''(\vec{u})(\vec{x} - \vec{u}) \rangle \leq 1 \} \ ,$$

waarbij $\varphi''(\vec{u})$ de matrix van tweede afgeleiden van φ in $\vec{u}$ voorstelt. Laat zien dat $\mathcal{E}_{\text{inw}} \subset D$.

(b) Zij $\vec{u}$ het analytisch centrum van D (het punt waar φ zijn minimum aanneemt), en zij $\mathcal{E}_{\text{uitw}}$ de ellipsoïde gegeven door

$$\mathcal{E}_{\text{uitw}} := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{x} - \vec{u} \, , \, \varphi''(\vec{u})(\vec{x} - \vec{u}) \rangle \leq m(m-1) \} \ ,$$

Laat zien dat $D \subset \mathcal{E}_{\text{uitw}}$.

Hint bij (b): Laat eerst zien dat voor alle $\vec{\alpha} \in (-\infty, 1]^m$ met $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \leq m(m-1) \ .$$