Hertentamen Voortgezette Kansrekening

woensdag 23 januari 2008
14.00 uur — 17.00 uur

Schrijf boven elk vel je naam en studentnummer.

1. Laat a en b positieve constanten zijn, en veronderstel dat $a > b$. Het paar stochasten (X, Y) is continu verdeeld in $\mathbb{R}^2$ met dichtheidsfunctie

$$f(x,y) := \begin{cases} ab\, e^{-(ax+by)} & \text{als } x, y \geq 0; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Zijn X en Y onafhankelijk?
   (b) Zij $Z := \min(X, Y)$. Bepaal de verdelingsfunctie van Z.
   (c) Druk $\mathbb{P}[X + Y \geq 1]$ uit in a en b.

2. Een bepaald soort bacterie plant zich voort volgens het volgende schema. Ieder uur splitst ieder individu zich in een Poisson(λ)-verdeeld aantal individuen. (λ is een positieve parameter.) Op tijdstip 0 bevindt zich één bacterie in een kweekschaaltje. Het aantal bacteriën dat zich na k uur in het schaaltje bevindt, noemen we: N_k. Zij $G_k : [0,1] \to [0,1] : s \mapsto \mathbb{E}(s^{N_k})$ de bijbehorende kansgenererende functie. Zij $G := G_1$.
   (a) Laat zien dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt: $G_{k+1}(s) = G_k(G(s))$.
   (b) Druk $\mathbb{E}(N_k)$ uit in λ en k.
   (c) Zij $p_k := \mathbb{P}[N_k = 0]$, de kans dat de populatie in het schaaltje na k uur uigestorven is. Laat zien dat

$$p_k = G^{(\circ)k}(0) \ ,$$

   waarbij $G^{(\circ)2} := G \circ G$, $G^{(\circ)3} := G \circ G \circ G$, etcetera.
   (d) De rij $p_1, p_2, p_3, \ldots$ is niet-dalend. Leg uit waarom. Zij heeft dus een limiet: de kans (zeg: p) dat de populatie ooit uitsterft. Geef in elke van de gevallen $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ en $\lambda > 1$ aan of deze uitsterfkans p gelijk is aan 1, gelijk is aan 0, of daar tussenin ligt.
   Hint: Schets de grafiek van G voor verschillende λ's.
   (e) Beschouw nu het geval $\lambda = 1$. Vergelijk de limiet $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}(N_k)$ met de limiet $p = \lim\limits_{k\to\infty} p_k$, en toon aan dat

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(N_k | N_k \neq 0) = \infty \ .$$

3. Beschouw de Markovketen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ met toestandenruimte $S := \{0, 1, 2, 3\}$ en overgangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) \\ P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & P(3,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & q & 0 \\ q & 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 & p \\ 0 & p & q & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

   waarbij $p, q \in (0,1)$ met $p + q = 1$. (Beeld deze gegevens uit in een plaatje.)
   (a) Is deze Markovketen irreducibel? Bepaal de priemfuik(en).
   (b) Bepaal alle evenwichtsverdelingen.
   (c) Bepaal de limiet $\lim_{n\to\infty} P^n$.