

HERTENTAMEN VOORTGEZETTE KANSREKENING

vrijdag 7 juli 2006, 9:00–12:00.

1. De stochasten X en Y zijn onafhankelijk en uniform verdeeld over het interval $[0, 1]$. Zij verdelen dit interval in drie stukken met de lengten

$$\min(X, Y), \quad \max(X, Y) - \min(X, Y) \quad \text{en} \quad 1 - \max(X, Y).$$

We proberen een driehoek te maken waarvan de zijden deze drie lengten hebben. Wat is de kans dat dit lukt?

2. Op n verschillende tekens, die op een rij staan, wordt een willekeurige permutatie toegepast. Met $p(n, k)$ geven we de kans aan dat er precies k tekens op hun plaats blijven staan.

(a) Bepaal $p(5, 2)$.

(b) Bereken voor elke $k \in \mathbb{N}$ de limiet

$$L(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} p(n, k).$$

(c) Bepaal de som

$$\sum_{k=0}^{\infty} L(k).$$

3. Beschouw de Markovketen X_0, X_1, X_2, \dots met toestandenruimte $S := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en overgangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Noem alle fuiken van deze Markovketen, en geef aan welke daarvan priem-fuiken zijn.

(b) Bereken de kans dat de keten, bij een start vanuit $X_0 = 2$, eindigt in de toestand 4.