Uitwerking Hertentamen Inleiding Kansrekening
4 maart 2003

1. Voor deze opgave kiezen we voor Ω het eenheidsvierkant $[0,1] \times [0,1]$ en voor X_1 en X_2 de stochasten $X_1(x_1, x_2) = x_1$ en $X_2(x_1, x_2) = x_2$. Verder zijn gedefinieerd: $V := X_1 + X_2$ en $W := X_1 - X_2$. Voor $j = 1$ of 2 geldt:

$$\mathbb{E}(X_j) = \int_0^1 x dx = \tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad \mathbb{E}(X_j^2) = \int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3}\ .$$

Hieruit volgt dat Var $(X_j) = \mathbb{E}(X_j^2) - \mathbb{E}(X_j)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$.

(a) $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$;
$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

(b) Omdat X_1 en X_2 onafhankelijk zijn, is Var $(V) =$ Var $(X_1 + X_2) =$ Var $(X_1)+$Var $(X_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, en omdat X_1 en $-X_2$ ook onafhankelijk zijn, is Var $(W) =$ Var $(X_1 - X_2) =$ Var $(X_1) +$ Var $(-X_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

(c) $\mathbb{E}(VW) = \mathbb{E}\big((X_1 + X_2)(X_1 - X_2)\big) = \mathbb{E}(X_1^2 - X_2^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Omdat $\mathbb{E}(W)$ ook 0 is, is $\mathbb{E}(VW) = \mathbb{E}(V)\mathbb{E}(W)$, dat wil zeggen: Cov $(V, W) = 0$.

(d) Omdat $V - W = 2X_1 \geq 0$, is $V \geq W$. Dus als $V \leq a$, dan ook $W \leq a$. Er geldt dus:

$$\mathbb{P}[V \leq a \ \text{ en } \ W \leq a] = \mathbb{P}[V \leq a] = \begin{cases} \frac{1}{2}a^2 & \text{als } 0 \leq a \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-a)^2 & \text{als } 1 \leq a \leq 2. \end{cases}$$

(Zie de eerste twee figuren hieronder, waarin de gebeurtenis $[V \leq a]$ als een donker gebiedje is aangegeven, voor $0 \leq a \leq 1$ in het eerste plaatje en voor $1 \leq a \leq 2$ in het tweede.)

(e) V en W zijn niet onafhankelijk, want als $0 < a < 1$, dan is $\mathbb{P}[W \leq a] < 1$ en $\mathbb{P}[V \leq a] > 0$, zodat

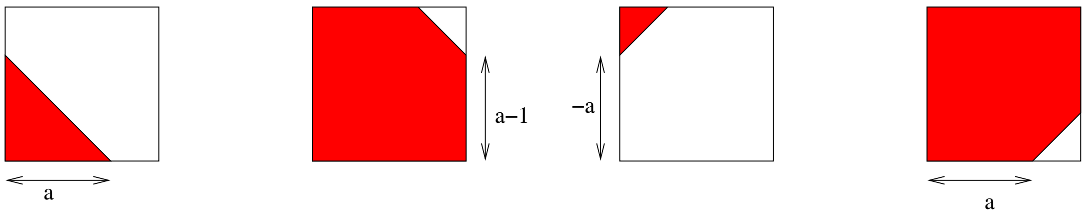
$$\mathbb{P}[V \leq a \ \text{ en } \ W \leq a] = \mathbb{P}[V \leq a] \ \neq \ \mathbb{P}[V \leq a] \cdot \mathbb{P}[W \leq a]\ .$$

(f) Eerst bepalen we de verdelingsfunctie van W (zie het derde en vierde vierkantje hieronder):

$$F_W(a) = \mathbb{P}[W \leq a] = \begin{cases} 0 & \text{als } a < -1; \\ \frac{1}{2}(1+a)^2 & \text{als } -1 \leq a \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2}(1-a)^2 & \text{als } 0 \leq a \leq 1; \\ 1 & \text{als } a > 1. \end{cases}$$

Door differentieren vinden we de dichtheidsfunctie:

$$f_W(a) = F'_W(a) = \begin{cases} 1 + a & \text{als } -1 \leq a \leq 0; \\ 1 - a & \text{als } 0 \leq a \leq 1; \\ 0 & \text{als } |a| > 1. \end{cases}$$



2. Als uitkomstenruimte Ω nemen we alle grepen van zes uit de bestekla. Dit zij er $\binom{15}{6} = 5005$.

(a) Het aantal grepen van zes dat van elke soort er precies 2 bevat is $\binom{5}{2}^3 = 1000$. De kans op twee volledige bestekken is dus $1000/5005 \approx 0{,}19980\ldots$.

(b) Noem de gebeurtenis hierboven: A en zij B de gebeurtenis dat er precies twee messen in de greep voorkomen. Dan is $\#(B) = \binom{5}{2} \cdot \binom{10}{4}$, en dus, omdat $A \subset B$, is de kans op twee hele bestekken, gegeven dat er twee messen getrokken zijn:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\#(A)}{\#(B)} = \frac{\binom{5}{2}^3}{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{4}} = \frac{\binom{5}{2}^2}{\binom{10}{4}} = \frac{100}{210} \approx 0{,}4761\ldots .$$

3. Zij N het aantal keren dat kop boven komt in 1000 worpen met de munt.

(a) Als de munt zuiver is, dan is $N \sim \text{Bin}\,(1000, \frac{1}{2})$, zodat $\mathbb{E}(N) = 500$ en $\text{Var}\,(N) = 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 250$. Dit aantal keren kop kunnen we benaderen met de normaal verdeelde stochast $500 + 5\sqrt{10}\ Z$, waarbij Z standaard-normaal is. Zo vinden we voor de kans op een verkeerde beoordeling van de munt, in de normale benadering met continuïteitscorrectie:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N \geq 525] &\approx \mathbb{P}[500 + 5\sqrt{10}\ Z > 524{,}5] = \mathbb{P}\left[\ Z > \frac{24{,}5}{5\sqrt{10}}\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{24{,}5}{5\sqrt{10}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}549) \approx 1 - 0{,}939 = 0{,}061\ .\end{aligned}$$

(b) Als de munt onzuiver is, dan is $N \sim \text{Bin}\,(1000, \frac{11}{20})$, zodat $\mathbb{E}(N) = 550$ en $\text{Var}\,(N) = 1000 \times \frac{11}{20} \times \frac{9}{20} = 247{,}5$. We kunnen N benaderen met de normaal verdeelde stochast $550 + \sqrt{247{,}5}\ Z$, waarbij Z weer standaard-normaal is. Ditmaal vinden we voor de kans op een verkeerde beoordeling van de munt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N < 525] &\approx \mathbb{P}[550 + \sqrt{247{,}5}\ Z < 524{,}5] = \mathbb{P}\left[Z < \frac{-25{,}5}{\sqrt{247{,}5}}\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{25{,}5}{\sqrt{247{,}5}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}621) \approx 1 - 0{,}947 = 0{,}053\ .\end{aligned}$$

Een beetje minder dus.