

PROEFTENTAMEN CALCULUS 1

1. Welke van de onderstaande gevolgtrekkingen gaan op voor *elk* complex getal z ?

(a) $z^2 = \bar{z} \implies z^3 = 1$;

(b) $z^3 = 1 \implies z^2 = \bar{z}$;

(c) $z^3 - iz^2 - iz = 1 \implies z^8 = 1$.

Bewijs je antwoorden.

2. Bereken de volgende limieten

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

3. Bereken de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\sqrt[5]{n^5 + 3} - n \right).$$

Hint: Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[5]{x}$, dan is $f'(1) = \frac{1}{5}$.

4. We beschouwen de reeks $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$ met $z = \frac{1+i}{2}$. Laat S de som van deze reeks aanduiden.

(a) Laat zien dat z^4 een negatief rationaal getal is, en bepaal de som $V := 1 + z^4 + z^8 + z^{12} + z^{16} + \dots$

(b) Geef in een tekening de eerste acht partiële sommen aan van de reeks $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + \dots$

(c) Toon aan dat $S = (1 + z + z^2 + z^3)V$, en bereken hieruit S .

(d) Bereken S ook direct uit de formule voor de som van een meetkundige reeks met complexe rede.