

TENTAMEN CALCULUS 1

maandag 8 november 2004

14.00 uur — 17.00 uur

Schrijf boven elk vel je naam, studentnummer en studierichting.

1. Laat de functie $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door: $f(x) := 3\sqrt{x-2}$.

(a) Laat zien dat als $x \in [3, 6]$, ook $f(x) \in [3, 6]$.

(b) Laat zien dat voor $x \in [3, 6]$ geldt: $f(x) \geq x$.

We definiëren nu een rij a_0, a_1, a_2, \dots door: $a_0 := 4$ en $a_{n+1} := 3\sqrt{a_n - 2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Toon aan dat deze rij convergeert.

(d) Bepaal de limiet.

2. Met D duiden we de (omtrek van de) éénheidscirkel in het complexe vlak aan, met uitzondering van het getal 1. Dus

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 ; z \neq 1 \right\} .$$

We definiëren een functie $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ door: $g(z) := \frac{1+z}{1-z}$.

(a) Laat zien dat $g(z)$ zuiver imaginair is voor alle $z \in D$.

(b) Bereken die $z \in D$ waarvoor geldt dat $g(z) = 2i$.

(c) Wat is precies het bereik van g ? (Bewijs je antwoord.)

3. Bepaal de volgende limieten. (Laat zien waarom je antwoorden juist zijn.)

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - n}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\left(6n+1\right)\frac{\pi}{3}\right)$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x - 4}$;

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

4. Zij c een reëel getal, en bekijk de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c-5)^n}{n2^n} .$$

(a) Voor welke waarden van c is deze reeks absoluut convergent?

(b) Voor welke waarden van c is hij convergent?

Motiveer je antwoorden.