Tentamen Calculus 1

dinsdag 8 november 2005, 9:00–12:00.

Schrijf boven elk vel je naam, studentnummer en studierichting (W of N).

1. Ontbind de volgende complexe veelterm in lineaire factoren.
$$z^4 + z^3 - z^2 + 15z \ .$$

2. Bereken de som van de reeks
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} + 10}{10^n} \ .$$

3. Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking
$$f''(t) + 2f'(t) + 10f(t) = 0 \ ,$$
met begincondities $f(0) = 0$ en $f'(0) = 6$.

4. Zij $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$. Bereken de volgende getallen exact.
   (a) $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$;
   (b) $\cos 2\varphi$ en $\sin 2\varphi$;
   (c) $\cos 3\varphi$ en $\sin 3\varphi$.
   Gegeven is dat φ/π irrationaal is.
   (d) Bewijs dat er oneindig veel geheeltallige oplossingen zijn van de vergelijking
   $$a^2 + b^2 = c^2$$
   waarbij a en b geen factoren > 1 gemeen hebben.

5. We bekijken de rij van Fibonacci. Dat is de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gegeven door
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad \text{en} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \text{voor } n \geq 1 \ .$$
   (a) Schrijf de eerste 10 termen van deze rij op, en bereken de quotiënten $q_n := a_{n+1}/a_n$ voor $n = 1, 2, \ldots, 9$.
   Dit leidt tot het vermoeden dat de limiet $\lim_{n\to\infty} q_n$ bestaat. (Nietwaar?)
   We gaan dat bewijzen in de volgende onderdelen.
   (b) Laat zien dat voor alle $n \geq 1$ geldt: $q_{n+2} = f(q_n)$, waarbij
   $$f : [1,2] \to [1,2] : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1} \ .$$
   (c) Bewijs dat f een stijgende functie is.
   (d) Toon aan dat de rij $q_1, q_3, q_5, q_7, \ldots$ stijgt, en dat de rij $q_2, q_4, q_6, q_8 \ldots$ daalt.
   (e) Waarom mag je nu concluderen dat beide rijen een limiet hebben?
   (f) Bewijs dat beide limieten voldoen aan de vergelijking $f(x) = x$.
   (g) Bewijs nu dat de rij $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ convergeert en bereken de limiet.
   (Deze limietverhouding staat bekend als de *Gulden Snede*.)