Uitwerking Tentamen Calculus 1
4 november 2003

1. Voor $x \in \mathbb{R}$ geldt: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}-1}$.
Dus als $y = \operatorname{tgh} x$, dan is $y(e^{2x}+1) = e^{2x}-1$. Dat wil zeggen: $e^{2x}(1-y) = 1+y$. We kunnen dus x in y uitdrukken met: $x = \frac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

2. (a) De functie $f : t \mapsto e^{\lambda t}$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $f'' + 5f' + \frac{17}{2}f = 0$ dan en slechts dan als $\lambda^2 + 5\lambda + \frac{17}{2} = 0$. Dit is equivalent met $\lambda = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5^2 - 34} = -\frac{1}{2}(5 \pm 3i)$. De meest algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus
$$f(t) = Ae^{\frac{1}{2}(-5+3i)t} + Be^{\frac{1}{2}(-5-3i)t} = e^{-\frac{5}{2}t}\big((A+B)\cos\tfrac{3}{2}t + i(A-B)\sin\tfrac{3}{2}t\big)\ .$$
Deze oplossing voldoet aan $f(0) = 0$ als $A + B = 0$ en is ook nog reëel als A zuiver imaginair is, zeg $A = C/2i$. De gevraagde oplossing is dus
$$f(t) = C \cdot e^{-\frac{5}{2}t} \cdot \sin\tfrac{3}{2}t\ , \qquad (C \in \mathbb{R}).$$
(b) Ditmaal voldoet alleen $f(t) = e^{\lambda t}$ met $\lambda = -3$. De algemene oplossing wordt in dit geval: $f(t) = (At+B)e^{-3t}$; $f(0) = 0$ levert $B = 0$ en $f(t)$ is reëel als $A \in \mathbb{R}$. Oplossing:
$$f(t) = At \cdot e^{-3t}\ , \qquad (A \in \mathbb{R}).$$

3. Voor $z \in \mathbb{C}$ geldt
$$\sinh z = \tfrac{4}{3} \iff e^z - e^{-z} = \tfrac{8}{3} \iff e^{2z} - \tfrac{8}{3}e^z - 1 = 0 \iff (e^z - 3)\left(e^z + \tfrac{1}{3}\right) = 0.$$
Dus $\sinh z = \frac{4}{3}$ als $e^z = 3$ of $e^z = -\frac{1}{3}$. Schrijf nu z als $x + iy$ met x en y reëel. Dan is
$$\begin{aligned} e^z = 3 &\iff e^x(\cos y + i\sin y) = 3 \iff \sin y = 0,\quad \cos y = 1 \quad\text{en}\quad e^x = 3 \\ &\iff z = \log 3 + 2k\pi i \quad \text{voor zekere } k \in \mathbb{Z}. \\ e^z = -\tfrac{1}{3} &\iff e^x(\cos y + i\sin y) = -\tfrac{1}{3} \iff \sin y = 0,\quad \cos y = -1 \quad\text{en}\quad e^x = \tfrac{1}{3} \\ &\iff z = -\log 3 + (2k+1)\pi i \quad \text{voor zekere } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4. Zij $p(z) := z^4 - 8z^3 + 19z^2 + 8z - 20$. Omdat $p(1) = 0$ is $p(z)$ deelbaar door $z - 1$, en omdat $p(-1) = 0$ is $p(z)$ deelbaar door $z + 1$. Als we $(z-1)(z+1) = z^2 - 1$ uitdelen, dan vinden we:
$$p(z) = (z-1)(z+1)(z^2 - 8z + 20)\ .$$
De kwadratische veelterm $z^2 - 8z + 20$ heeft nulpunten $4 - 2i$ en $4 + 2i$. Conclusies:
(a) De nulpunten van p zijn 1, -1, $4 - 2i$ en $4 + 2i$;
(b) $p(z) = (z-1)(z+1)(z-4+2i)(z-4-2i)$.

5. (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5-2n}{3n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n} - 2}{3 - \frac{7}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n} - 2\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{7}{n}\right)} = -\frac{2}{3}$. Bij de tweede stap wordt de regel gebruikt dat de limiet van een quotiënt gelijk is aan het quotiënt van de limieten, mits deze bestaan. In de derde stap wordt de standaardlimiet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gebruikt.
(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n-4}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$ $e^{-4} \cdot e^1 = e^{-3}$.
Bij de tweede stap wordt de regel gebruikt dat de limiet van een product gelijk is aan het product van de limieten, mits deze bestaan. Bij de derde stap wordt gebruikt dat voor $x \in \mathbb{R}$ geldt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
(c) Zij $h := \frac{1}{n}$. Dan is $\sqrt{n^2+n} = \sqrt{1+h}/h$ en $\sqrt{n^2-1} = \sqrt{1-h^2}/h$. Schrijf nu $f(h) := \sqrt{1+h}$ en $g(h) := \sqrt{1-h^2}$. Omdat $f(0) = 1$ en $g(0) = 1$, geldt:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}\right) = \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h} - \frac{g(h)-g(0)}{h}\right) = f'(0) - g'(0) = \tfrac{1}{2} - 0 = \tfrac{1}{2}\ .$$