Uitwerking tentamen Calculus 1
8 november 2004

1. (a) De functie f is strikt stijgend, $f(3) = 3$ en $f(6) = 6$. Dus

$$3 \leq x \leq 6 \qquad \Longrightarrow \qquad f(3) \leq f(x) \leq f(6) \qquad \Longrightarrow \qquad 3 \leq f(x) \leq 6\ .$$

(b) Als $3 \leq x \leq 6$, dan is

$$x^2 - f(x)^2 = x^2 - 9(x-2) = (x-3)(x-6) \leq 0\ .$$

Omdat x en $f(x)$ beide positief zijn, volgt hieruit dat $f(x) \geq x$.

(c) Merk op dat $a_0 = 4 \in [3,6]$. Uit (a) volgt dat ook $a_1 = f(a_0) \in [3,6]$, en dus ook $a_2 = f(a_1) \in [3,6]$, enzovoort: de hele rij ligt in het interval $[3,6]$. De rij is dus begrensd.
Uit (b) volgt dan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$. De rij is dus stijgend.
Elke stijgende begrensde rij reële getallen convergeert.

(d) Laten we de limiet l noemen. Dan moet

$$f(l) = 3\sqrt{l-2} = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt{a_n - 2} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l\ .$$

(Hier is het regeltje gebruikt dat $\lim_{n\to\infty} b_n = b \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{b_n} = \sqrt{b}$.) Dus $l^2 - f(l)^2 = 0$, d.w.z. (zia (b)): $(l-3)(l-6) = 0$. l kan echter niet 3 zijn, want $a_0 = 4$ en de rij stijgt. Dus $l = 6$.

2. (a) Laat $z = x + iy$ met x en y reëel. Dan is $x^2 + y^2 = 1$ en $x \neq 1$. Dus is:

$$g(z) = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x-iy)(1-x+iy)} = \frac{1-x^2-y^2+2iy}{1-2x+x^2+y^2} = \frac{iy}{1-x}\ .$$

Dit is zuiver imaginair.

(b) We zoeken $z \in D$ met $g(z) = 2i$. De directe methode gaat zó:

$$g(z) = 2i \Longleftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = 2i \Longleftrightarrow z+1 = 2i(z-1) \Longleftrightarrow 1 + z - 2i + 2iz = 0$$
$$\Longleftrightarrow z(1+2i) = -1+2i \Longleftrightarrow z = \frac{-1+2i}{1+2i} = \frac{(-1+2i)(1-2i)}{5} = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}i\ .$$

Maar het kan ook met behulp van (a): als $x^2 + y^2 = 1$ en $x \neq 1$, dan geldt:

$$g(x+iy) = 2i \Longleftrightarrow \frac{y}{1-x} = 2 \Longleftrightarrow y = 2(1-x) \Longrightarrow 1 - x^2 = 2(1-x)^2 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ of } x = \tfrac{3}{5}\ .$$

$x = 1$ valt af, dus $x = \frac{3}{5}$, en $y = 2(1-x) = \frac{4}{5}$. Dus y is inderdaad positief, en de implicatiepijl '$\Longrightarrow$' geldt ook omgekeerd.

(c) Het bereik is de hele imaginaire as. We kunnen immers voor alle $a \in \mathbb{R}$ een getal $z \in D$ uitrekenen zó dat $g(z) = ia$ (zie onderdeel (b)):

$$g(z) = ia \Longleftrightarrow z = \frac{(-1+ia)(1-ia)}{1+a^2} = \frac{(a^2-1)+2ia}{a^2+1}\ .$$

We zien dat inderdaad $|z|^2 = \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 + \frac{4a^2}{(a^2+1)^2} = 1$, en $\frac{a^2-1}{a^2+1} \neq 1$, dus $z \in D$.

3. (a) Met de 'worteltruc': vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{n^2-3n}+n$.

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n} = \frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{n^2+3n-n^2} = \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}{3} \; .$$

Neem je nu de limiet $n \to \infty$, dan krijg je $\frac{2}{3}$.
Het gaat ook zó: Laat $f(x) := \sqrt{x}$. Dan is

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n}-n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{\frac{h}{3}} = 3f'(1) = \frac{3}{2} \; .$$

Nemen we de limiet van het omgekeerde, dan krijgen we de uitkomst: $\frac{2}{3}$.

(b) Omdat de sinusfunctie periode 2π heeft, is de rij constant, en die constante (tevens de limiet) is $\sin\pi/3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. (Aangenomen wordt dat n gehele waarden aanneemt. Voor n reëel bestaat de limiet niet.)

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2+3x-28}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+7)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x+7 = 11.$

(d) Hier is een trucje mogelijk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{i}{n}\right)^n = e^i\cdot e^{-i} = 1 \; .$$

Maar als je dat niet ziet, moet je wat harder werken. Hier is een bewijs:
Kies $\varepsilon > 0$. Laat $x := \frac{1}{2}\log(1+\varepsilon)$. Omdat $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, is er een $B \in \mathbb{R}$ zó dat voor $n > B$ geldt: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^{2x}$. Zij nu A de grootste van de twee getallen B en $\frac{1}{x}$. Dan geldt voor alle $n > A$:

$$1 \le \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^{2x} = 1+\varepsilon \; .$$

4. We bekijken de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c-5)^n}{n2^n} \; .$$

Als $3 < c < 7$, dan is deze absoluut convergent, want dan worden de termen begrensd door die van de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c-5}{2}\right)^n$.
Als $c < 3$ of $c > 7$, dan is de reeks divergent, want de termen vormen zelf een divergente rij.
Als $c = 7$, dan staat er de divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Die is natuurlijk ook niet absoluut convergent.
Als $c = 3$, dan staat er de alternerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, waarvan de termen naar 0 gaan. Deze reeks is dus convergent. Hij is echter *niet* absoluut convergent, want de absolute waarden vormen de divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.