Uitwerking Tentamen Calculus 1
8 november 2005

1. De nulpunten 0 en -3 van de veelterm $p(z) := z^4+z^3-z^2+15z$ zijn snel gevonden. Na uitdelen van z en $z+3$ vind je de veelterm z^2-2z+5, die je kunt schrijven als $(z-1)^2+4 = (z-1-2i)(z-1-2i)$. Dus $p(z) = z(z+3)(z-1-2i)(z-1+2i)$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}+10}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n + 10\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{9}{10}} + \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = 10 + \frac{100}{9} = 21\frac{1}{9}.$

3. De functie $f(t) = e^{\lambda t}$ is oplossing van de differentiaalvergelijking $f''+2f'+10f = 0$ dan en slechts dan als $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$, dat wil zeggen als $\lambda = -1 \pm 3i$. De algemene oplossing is dus
$$f(t) = Ae^{(-1-3i)t} + Be^{(-1+3i)t}\ .$$
De beginconditie $f(0) = 0$ geeft $A + B = 0$, en de beginconditie $f'(0) = 6$ geeft $A(-1-3i) + B(-1+3i) = 6$, dat wil zeggen $A = -B = i$. Dus
$$f(t) = ie^{(-1-3i)t} - ie^{(-1+3i)t} = 2e^{-t}\sin(3t)\ .$$

4. (a) Je kunt $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$ meteen aflezen in een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5. In formules: Laat $\varphi := \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$. Dan is $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ en $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$. Omdat $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$, is $\cos\varphi = \left(1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{5}$, en dan is $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \dfrac{4}{5}$.

   (b) $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \dfrac{3^2-4^2}{5^2} = -\dfrac{7}{25}$;

   $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{2\times 3\times 4}{5^2} = \dfrac{24}{25}$.

   (c) $\cos(3\varphi) = \cos\varphi\cos(2\varphi) - \sin\varphi\sin(2\varphi) = \dfrac{-3\times 7 - 4\times 24}{5^3} = -\dfrac{117}{125}$;

   $\sin(3\varphi) = \sin\varphi\cos(2\varphi) + \cos\varphi\sin(2\varphi) = \dfrac{4\times(-7)+3\times 24}{5^3} = \dfrac{44}{125}$.

   (d) (*Bonusvraag*) Zo doorgaande krijg je een rij punten $(\cos(n\varphi), \sin(n\varphi))$ met $n = 0, 1, 2, \ldots$ op de eenheidscirkel waarvan beide coördinaten steeds rationaal zijn. De punten zijn allemaal verschillend, omdat φ/π irrationaal is. Door bij iedere waarde van n de coördinaten te vermenigvuldigen met het kgv c_n van de beide noemers, krijg je paren gehele getallen (a_n, b_n) die voldoen aan $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$. Hierbij hebben a_n en b_n geen factoren gemeen.

5. (a) De eerste tien termen van de rij van Fibonacci zijn:
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\ ;$$
en de eerste negen quotiënten $q_n := a_{n+1}/a_n$ zijn
$$\begin{array}{lllll} q_1 = 1{,}000\ldots, & q_3 = 1{,}500\ldots, & q_5 = 1{,}600\ldots, & q_7 \approx 1{,}615\ldots, & q_9 \approx 1{,}617\ldots \\ q_2 = 2{,}000\ldots, & q_4 \approx 1{,}666\ldots, & q_6 = 1{,}625\ldots, & q_8 \approx 1{,}619\ldots & \end{array}$$

   (b) $q_{n+2} = \dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = \dfrac{a_{n+2}+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} = \dfrac{(a_{n+1}+a_n)+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} = \dfrac{2\frac{a_{n+1}}{a_n}+1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}+1} = \dfrac{2q_n+1}{q_n+1} = f(q_n)$.

   (c) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ voor $x \in [1,2]$, dus f is (strikt) stijgend op $[1,2]$.

   (d) Omdat $q_1 = 1$ en $q_3 = \frac{3}{2}$, is $q_3 > q_1$. Omdat f stijgend is, is ook $q_5 = f(q_3) > f(q_1) = q_3$ en dus ook $q_7 = f(q_5) > f(q_3) = q_5$, etcetera. Dus de rij $q_1, q_3, q_5, \ldots$ stijgt.
   Anderzijds is $q_4 = \frac{5}{3} < 2 = q_2$, dus $q_6 = f(q_4) < f(q_2) = q_4$ en dus ook $q_8 = f(q_6) < f(q_4) = q_6$, etcetera. Dus de rij $q_2, q_4, q_6, \ldots$ daalt.

(e) De oneven rij is stijgend en van boven begrensd (door 2); de even rij is dalend en van beneden begrensd (door 1). Dus beide hebben een limiet, zeg L_o en L_e.

(f) Op grond van de quotiëntregel voor limieten geldt

$$L_e = \lim_{n\to\infty} q_{2n} = \lim_{n\to\infty} q_{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2q_{2n}+1}{q_{2n}+1} = \frac{2L_e+1}{L_e+1} = f(L_e)\ .$$

Hetzelfde geldt voor L_o.

(g) We lossen op:

$$f(x) = x \quad\Longleftrightarrow\quad x(x+1) = 2x+1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 - x - 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\ .$$

Omdat deze vergelijking maar één oplossing heeft op $[1,2]$, namelijk $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, moeten zowel L_o als L_e hieraan gelijk zijn. Dus de rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ convergeert naar $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618\ldots$