Uitwerking Tentamen Calculus 2
20 januari 2004

1. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{3}{9}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\frac{x+1}{3}\right)}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u\Big/_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{3}.$

Alternatief:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{i}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x+1+3i} - \frac{1}{x+1-3i}\right)dx = \frac{i}{6}\big(\log(x+1+3i) - \log(x+1-3$$
$$= \frac{1}{6}\big(\arg(x+1+3i) - \arg(x+1-3i)\big)\Big/_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{6}((\pi-0)-(-\pi-0)) = \frac{\pi}{3}\ .$$

Bijne iedereen heeft deze alternatieve route gevolgd, en daarbij het verschil van de twee logaritmen gelijkgesteld aan de logaritme van het quotiënt $(x+1+3i)/(x+1-3i)$. Dit quotiënt gaat naar 1, en dus de logaritme ervan naar 0. Dat zou een integraal 0 opleveren, terwijl de integrand toch duidelijk overal positief is! De genoemde rekenregel gaat hier echter niet op, omdat het verschil der argumenten groter dan π wordt.

(b)

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin x\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\sin x + \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}\cos x\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\sin x\Big/_0^{\infty} - \tfrac{1}{4}e^{-2x}\cos x\Big/_0^{\infty} - \tfrac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin x\,dx$$
$$\Longrightarrow \quad \tfrac{5}{4}\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin x\,dx = \tfrac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{\infty} e^{-2x}\sin x\,dx = \tfrac{1}{5}\ .$$

Alternatief:

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin x\,dx = \operatorname{Im}\int_0^{\infty} e^{-(2-i)x}dx = \operatorname{Im}\frac{1}{2-i} = \operatorname{Im}\frac{2+i}{2^2+1^2} = \frac{1}{5}.$$

2. (a) Schrijf eerst: $x = 3\sin\varphi$, zodat $dx = 3\cos\varphi d\varphi$ en $\sqrt{9-x^2} = 3\cos\varphi$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\varphi\,d\varphi}{3\sin\varphi\cdot 3\cos\varphi} = \frac{1}{3}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{1}{3}\int\frac{d\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi}\ .$$

Dit is een bekende. Die doen we zó: Schrijf $y := \cos\varphi$, integreer, en ga terug via φ naar x:

$$-\int\frac{dy}{1-y^2} = -\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy = -\tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} = -\tfrac{1}{2}\log\frac{3+3\cos\varphi}{3-3\cos\varphi} = -\tfrac{1}{2}\log\frac{3+\sqrt{9-x^2}}{3-\sqrt{9-x^2}}\ .$$

Nu nog de grenzen invullen:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = -\tfrac{1}{6}\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right) + \tfrac{1}{6}\log\left(\frac{3+\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}}\right) = \tfrac{1}{6}\log\left(\frac{3+\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\log\left(2\cdot\frac{17+12\sqrt{2}}{7+3\sqrt{5}}\right) .$$

(b) Omdat we de integraal $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ al kennen (dit is immers $\frac{1}{2}\pi$, de halve oppervlakte van de éénheidscirkel), kunnen we de gevraagde integraal snel vinden met partiële integratie:

$$\int_{-1}^{1} x\arcsin x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\arcsin x\Big/_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\arcsin x\Big/_{-1}^{1} - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\arcsin x\Big/_{-1}^{1} = \tfrac{1}{4}\pi .$$

3. (a) Zij f de functie $u \mapsto u - \sin u$, en zij $x > 0$. Uit de tussenwaardestelling volgt dat voor zekere $y \in (0,x)$

$$f(x) = f(0) + x\cdot f'(y) = 0 + x(1-\cos y) \geq 0 .$$

Dus is $\sin x \leq x$. (Natuurlijk klopt dit ook voor $x = 0$.)

(b) Zij g de functie $u \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \cos x$, en zij eerst eens $x > 0$. Uit de tussenwaardestelling volgt dat voor zekere $y \in (0,x)$ geldt:

$$g(x) = g(0) + x\cdot g'(y) = 1 + x(y - \sin y) .$$

Op grond van (a) is $y \geq \sin y$, dus is $g(x) \geq 1$. Dat wil zeggen: $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ voor $x > 0$. Voor $x = 0$ is het natuurlijk ook waar, en omdat $\cos x$ en $\frac{1}{2}x^2$ even functies zijn, ook voor $x < 0$.

4. (a) We kunnen de som als volgt schrijven:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(n-1)}{(n-1)!}z^n = z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + z^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!} = (z+z^2)$$

De reeks convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zij $F(z)$ voor $|z| < 1$ gedefinieerd door: $F(z) := \dfrac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + z^7 + \cdots$. Dan is, eveneens voor $|z| < 1$: $z + 3z^3 + 5z^5 + 7z^7 + \cdots = zF'(z) = z\dfrac{(1-z^2) - z(-2z)}{(1-z^2)^2} = z\dfrac{1+z^2}{(1-z^2)^2}$.

5. De vergelijking $f' + xf = x^3$ is equivalent met $\left(fe^{\frac{1}{2}x^2}\right)' = x^3e^{\frac{1}{2}x^2}$. Dus moet

$$fe^{\frac{1}{2}x^2} = \int x^3e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int x^2\,d\left(e^{\frac{1}{2}x^2}\right) = x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - \int 2xe^{\frac{1}{2}x^2}\,dx = x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + C .$$

En dus:

$$f(x) = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} .$$

Hierbij is $f(x) = x^2 - 2$ een eenvoudige particuliere oplossing, en $Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ de algemene oplossing van de homogene vergelijking $f' + xf = 0$. Deze zou je misschien ook direct kunnen vinden.