

Fractals

Onderstaande tekst en opdrachten zijn gebaseerd op het wisschrift Fractals van Vierkant voor Wiskunde geschreven door Jantine Bloemhof.

De Poolse wiskundige Waclaw Sierpinski beschreef in 1916 de Sierpinski-driehoek en het Sierpinski-vierkant. Sierpinski werd, onder andere dankzij deze fractals, zo beroemd dat een krater op de maan naar hem is vernoemd.

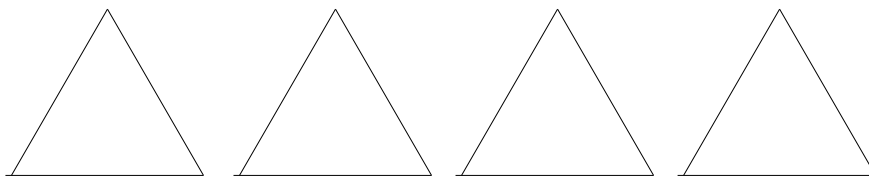
Sierpinski-driehoek

De Sierpinski-driehoek heeft als generatie 0 een witte gelijkzijdige driehoek. Elke volgende generatie ontstaat door de volgende vervangingsregels toe te passen:

1. verdeel elke witte driehoek in vier gelijke driehoeken door de middens van de zijden met elkaar te verbinden;
2. kleur telkens de middelste driehoek zwart.

De nieuwe generatie bestaat uit alle witte driehoeken die je nu gekregen hebt (de zwarte delen doen niet meer mee).

1 *Teken in onderstaand figuur de generaties 0, 1, 2 en 3 van de Sierpinski-driehoek. Kleur de zwarte delen.*



Elke generatie van de Sierpinski-driehoek bestaat uit een aantal witte driehoeken die samen een omtrek en een oppervlakte hebben. Hoe verandert het aantal driehoeken en de omtrek en de oppervlakte van alle driehoeken wanneer een volgende generatie wordt gemaakt?

2 *Vul de volgende tabel in voor de generaties 0-3 van de Sierpinski-driehoek. Schrijf de omtrek en oppervlakte als breuken.*

generatie	0	1	2	3
aantal driehoeken	1			
omtrek	3			
oppervlakte	1			

Wanneer je opgave 2 goed hebt gemaakt, blijkt dat je steeds het aantal driehoeken van een generatie kunt berekenen, door het aantal driehoeken van de generatie ervoor met een bepaald getal te vermenigvuldigen. Hetzelfde geldt voor de totale omtrek en de totale oppervlakte van de driehoeken.

3 *Vul in: om de getallen voor de volgende generatie te berekenen*

vermenigvuldig je het aantal driehoeken met

vermenigvuldig je de omtrek met

vermenigvuldig je de oppervlakte met

4 *We gaan verder met de tabel van opgave 2. Vul nu het aantal driehoeken, de omtrek en de oppervlakte in van generaties 4, 5 en 6 van de Sierpinski-driehoek.*

generatie	3	4	5	6
aantal driehoeken				
omtrek				
oppervlakte				

5 *Hoe zie je aan een Sierpinski-driehoek wat zijn generatie is?*

Je hebt zelf de eerste drie generaties van de Sierpinski-driehoek getekend. Je zou nog wat langer door kunnen gaan en ook generatie 4, 5, 6, ... kunnen tekenen. In de praktijk wordt dit steeds lastiger: je moet hele kleine driehoekjes gaan tekenen! Je kunt er wel in je hoofd over nadenken wat er zou gebeuren als je door zou blijven gaan.

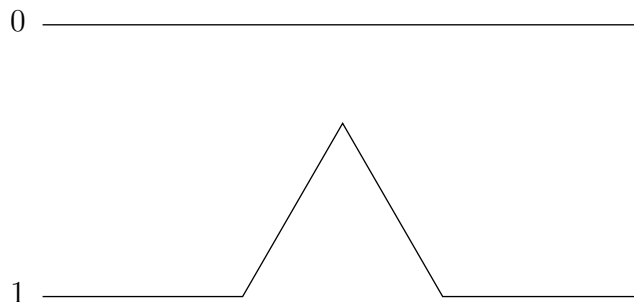
6 *Probeer je eens voor te stellen dat je heel precies kunt tekenen en heel lang de tijd hebt en maar door blijft gaan met het tekenen van nieuwe generaties van de Sierpinski-driehoek. Wat gebeurt er dan met het aantal driehoeken? En met de omtrek en de oppervlakte?*

Koch-kromme

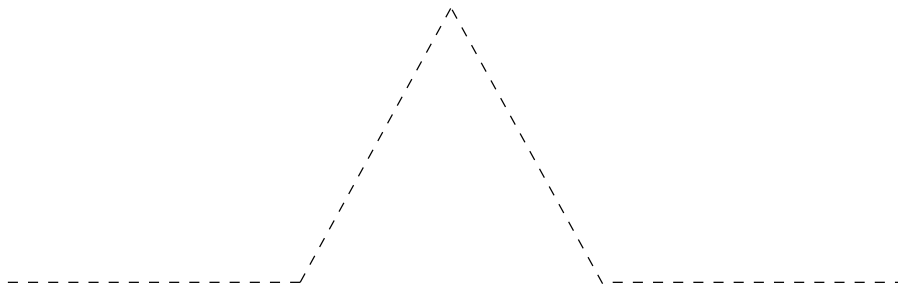
Generatie 0 van de Koch-kromme bestaat uit één lijnstuk. Elke volgende generatie van de Koch-kromme ontstaat door de volgende vervangingsregels toe te passen:

1. verdeel elk lijnstuk in drie even grote lijnstukken;
2. verwijder het middelste lijnstuk;
3. vul het lege stuk op met twee lijnstukken die even lang zijn als het verwijderde lijnstuk; doe dat zo dat de twee lijnstukken en het verwijderde deel samen een gelijkzijdige driehoek vormen.

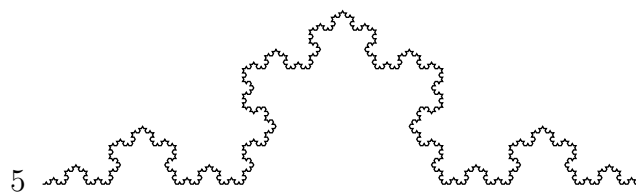
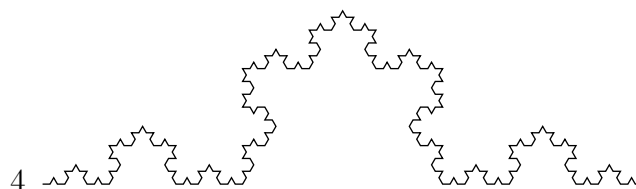
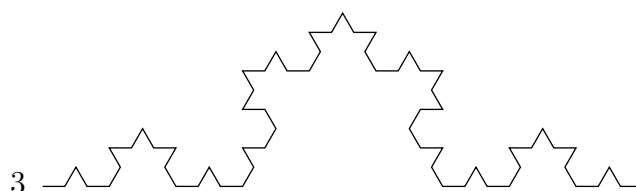
Hier zie je de eerste twee generaties:



7 *Teken generatie 2 van de Koch-kromme.*



Hier zie je generaties 3, 4 en 5:



8 *Wat gebeurt er met de lengte van de generaties van de Koch-kromme?*