Pinks vermoeden over semiabelse variëteiten

Milan Lopuhaä

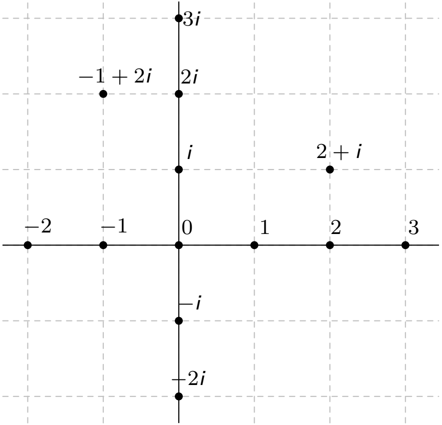
[1]Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

[2]Leiden University Center for Linguistics

8 Augustus 2014

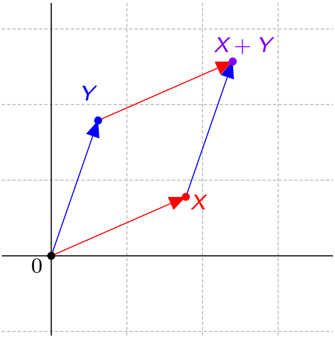
Complexe getallen

- 'Getallen' van de vorm $a + bi$, met a en b reële getallen.
- voorbeelden: $2 + i$, $-1 + 2i$.
- Weer te geven in een tweedimensionaal assenstelsel.



Complexe getallen

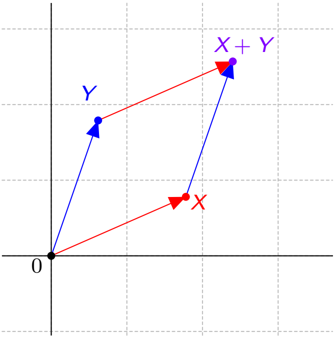
Optellen

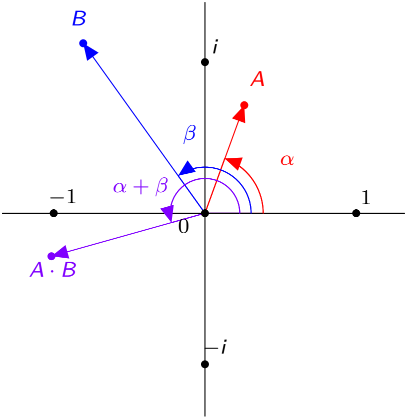


Complexe getallen

Vermenigvuldigen

Optellen

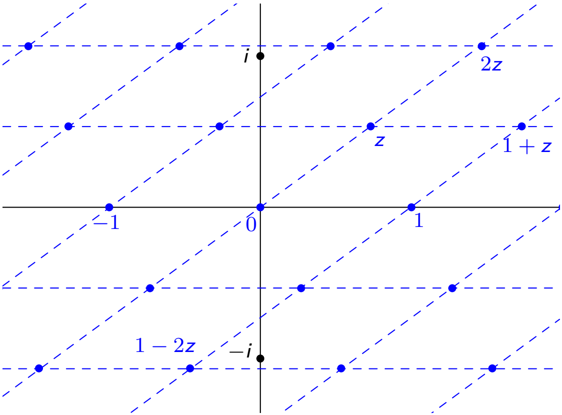




(dus $i^2 = -1$)

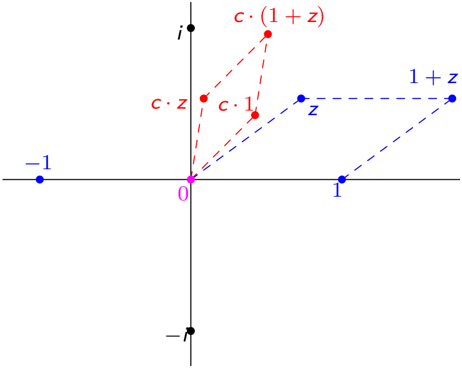
Roosters

Bij een complex getal z in het bovenhalfvlak hoort het rooster L_z van alle complexe getallen van de vorm $a + bz$ met a en b *geheel*.



Roosters vermenigvuldigen

Door L_z met een constante c te vermenigvuldigen, krijgen we een nieuw rooster $c \cdot L_z$.



Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Voor $c = 0, 1, 2, 3, ...$ gaat het altijd goed.

Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Voor $c = 0, 1, 2, 3, ...$ gaat het altijd goed.
- In het bijzonder moet $c \cdot 1 = c$ een element zijn van L_z; c zit dus in het originele rooster.

Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Voor $c = 0, 1, 2, 3, ...$ gaat het altijd goed.
- In het bijzonder moet $c \cdot 1 = c$ een element zijn van L_z; c zit dus in het originele rooster.
- Voor de meeste roosters zijn de gehele getallen de enige mogelijkheden voor c.

Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Stel $c = a + bz$ met a, b geheel, $b \neq 0$, en $c \cdot L_z$ een deel van L_z.

Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Stel $c = a + bz$ met a, b geheel, $b \neq 0$, en $c \cdot L_z$ een deel van L_z.
- Dan is $c \cdot z$ een element van L_z, dus $c \cdot z = d + ez$ voor zekere gehele d, e.

Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Stel $c = a + bz$ met a, b geheel, $b \neq 0$, en $c \cdot L_z$ een deel van L_z.
- Dan is $c \cdot z$ een element van L_z, dus $c \cdot z = d + ez$ voor zekere gehele d, e.
- Dus $az + bz^2 = d + ez$, oftewel $bz^2 + (a - e)z + d = 0$.

Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Stel $c = a + bz$ met a, b geheel, $b \neq 0$, en $c \cdot L_z$ een deel van L_z.
- Dan is $c \cdot z$ een element van L_z, dus $c \cdot z = d + ez$ voor zekere gehele d, e.
- Dus $az + bz^2 = d + ez$, oftewel $bz^2 + (a - e)z + d = 0$.
- Er bestaat dus een niet-gehele c zodat $c \cdot L_z$ een deel is van L_z dan en slechts dan als z een nulpunt is van een vergelijking van de vorm $pX^2 + qX + r = 0$ met p, q, r geheel en $p \neq 0$; noem deze z *speciaal*.

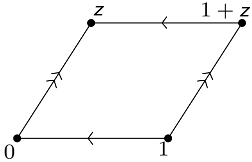
Speciale roosters

Vraag: voor welke z en c is $c \cdot L_z$ een deel van L_z?

- Stel $c = a + bz$ met a, b geheel, $b \neq 0$, en $c \cdot L_z$ een deel van L_z.
- Dan is $c \cdot z$ een element van L_z, dus $c \cdot z = d + ez$ voor zekere gehele d, e.
- Dus $az + bz^2 = d + ez$, oftewel $bz^2 + (a - e)z + d = 0$.
- Er bestaat dus een niet-gehele c zodat $c \cdot L_z$ een deel is van L_z dan en slechts dan als z een nulpunt is van een vergelijking van de vorm $pX^2 + qX + r = 0$ met p, q, r geheel en $p \neq 0$; noem deze z *speciaal*.
- Het bijbehorende rooster heeft *complexe vermenigvuldiging*.

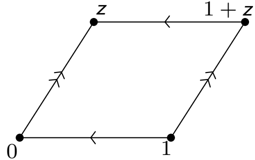
Het bovenhalfvlak als moduliruimte

- Uit een parallellogram van een rooster kan een torus gemaakt worden.
- Bij elk punt van het bovenhalfvlak hoort dus een meetkundig object.
- Door het bovenhalfvlak te ‘bewerken’ correspondeert elk punt *precies* met een torus met bepaalde eigenschappen; het ‘bewerkte’ bovenhalfvlak heet hierom een *moduliruimte*.



Het bovenhalfvlak als moduliruimte

- Alle torussen horend bij het 'bewerkte' bovenhalfvlak vormen samen ook een meetkundig object, de *universele torus*.
- Deze is lastig te tekenen (vier-dimensionaal!)
- De moduliruimte is een voorbeeld van een *Shimuravariëteit*, en de universele torus van een *gemengde Shimuravariëteit*.



Speciale punten op meetkundige objecten

Er zijn een aantal wiskundige vermoedens (sommige al bewezen) van het type:
"*Zij A een bepaald soort meetkundig object met speciale punten, en zij Z een deelobject van A. Als Z 'veel' speciale punten bevat, dan heeft Z 'bijzondere' eigenschappen*"

Speciale punten op meetkundige objecten

Er zijn een aantal wiskundige vermoedens (sommige al bewezen) van het type:
"*Zij A een bepaald soort meetkundig object met speciale punten, en zij Z een deelobject van A. Als Z 'veel' speciale punten bevat, dan heeft Z 'bijzondere' eigenschappen*"
Bijvoorbeeld:

- Manin-Mumford (Abelse variëteiten met torsiepunten)
- Mordell-Lang (Semiabelse variëteiten met de delingsgroep van een eindig voortgebrachte ondergroep)
- André-Oort (Shimuravariëteiten met speciale punten).
  quasi-voorbeeld: bovenhalfvlak met eerder besproken speciale punten.

Pinks vermoeden

- Deze vermoedens werden ‘gecombineerd’ door Pink: hij stelde een vermoeden op (over gemengde Shimuravariëteiten) dat, wanneer het waar was, de drie andere vermoedens zou bewijzen.

Pinks vermoeden

- Deze vermoedens werden ‘gecombineerd’ door Pink: hij stelde een vermoeden op (over gemengde Shimuravariëteiten) dat, wanneer het waar was, de drie andere vermoedens zou bewijzen.
- Daarnaast stelde hij nog een ander vermoeden op, over semiabelse variëteiten, dat zou volgen uit zijn ‘grote’ vermoeden.

Pinks vermoeden

- Deze vermoedens werden ‘gecombineerd’ door Pink: hij stelde een vermoeden op (over gemengde Shimuravariëteiten) dat, wanneer het waar was, de drie andere vermoedens zou bewijzen.
- Daarnaast stelde hij nog een ander vermoeden op, over semiabelse variëteiten, dat zou volgen uit zijn ‘grote’ vermoeden.
- Voor dit vermoeden vond Bertrand echter een tegenvoorbeeld!

Pinks vermoeden

- Deze vermoedens werden ‘gecombineerd’ door Pink: hij stelde een vermoeden op (over gemengde Shimuravariëteiten) dat, wanneer het waar was, de drie andere vermoedens zou bewijzen.
- Daarnaast stelde hij nog een ander vermoeden op, over semiabelse variëteiten, dat zou volgen uit zijn ‘grote’ vermoeden.
- Voor dit vermoeden vond Bertrand echter een tegenvoorbeeld!
- ‘Gelukkig’ zat er een fout in Pink’s bewijs dat het ‘kleine’ vermoeden zou volgen uit het ‘grote’

Pinks vermoeden

- Deze vermoedens werden ‘gecombineerd’ door Pink: hij stelde een vermoeden op (over gemengde Shimuravariëteiten) dat, wanneer het waar was, de drie andere vermoedens zou bewijzen.
- Daarnaast stelde hij nog een ander vermoeden op, over semiabelse variëteiten, dat zou volgen uit zijn ‘grote’ vermoeden.
- Voor dit vermoeden vond Bertrand echter een tegenvoorbeeld!
- ‘Gelukkig’ zat er een fout in Pink’s bewijs dat het ‘kleine’ vermoeden zou volgen uit het ‘grote’
- Het ‘grote’ vermoeden zou dus nog steeds waar kunnen zijn.

Mijn scriptie

Doel: verder uitwerken van het tegenvoorbeeld van Bertrand

- Bertrand's tegenvoorbeeld gaat uit van een rooster met complexe vermenigvuldiging. Voor welke roosters werkt het in hogere dimensies?

Mijn scriptie

Doel: verder uitwerken van het tegenvoorbeeld van Bertrand

- Bertrand's tegenvoorbeeld gaat uit van een rooster met complexe vermenigvuldiging. Voor welke roosters werkt het in hogere dimensies?
- Hoe valt Bertrand's voorbeeld te interpreteren in termen van moduliruimten en Shimuravariëteiten?

Mijn scriptie

Doel: verder uitwerken van het tegenvoorbeeld van Bertrand

- Bertrand's tegenvoorbeeld gaat uit van een rooster met complexe vermenigvuldiging. Voor welke roosters werkt het in hogere dimensies?
- Hoe valt Bertrand's voorbeeld te interpreteren in termen van moduliruimten en Shimuravariëteiten?
- Hiervoor heb ik een classificatie gemaakt van alle gemengde Shimuravariëteiten die het bovenhalfvlak 'uitbreiden', zoals de universele torus, en hun speciale punten.

Mijn scriptie

Doel: verder uitwerken van het tegenvoorbeeld van Bertrand

- Bertrand's tegenvoorbeeld gaat uit van een rooster met complexe vermenigvuldiging. Voor welke roosters werkt het in hogere dimensies?
- Hoe valt Bertrand's voorbeeld te interpreteren in termen van moduliruimten en Shimuravariëteiten?
- Hiervoor heb ik een classificatie gemaakt van alle gemengde Shimuravariëteiten die het bovenhalfvlak 'uitbreiden', zoals de universele torus, en hun speciale punten.