Groepentheorie voor natuurkundigen

G.J. Heckman
Mathematisch Instituut KUN
Nijmegen

Voorjaar 2002

Inhoud

§1. Groepen en ondergroepen.

§2. Nevenklassen en conjugatieklassen.

§3. Normaaldelers en homomorfismen.

§4. Representaties.

§5. Karakters.

§6. Karaktertabellen van enkele groepen.

§7. Moleculaire trillingen.

Groepentheorie is de wiskundige taal die ten grondslag ligt aan het begrip symmetrie. In de eerste 6 paragrafen wordt uitgelegd hoe deze taal in beginsel moet worden gesproken. In de slotparagraaf wordt een toepassing besproken afkomstig van Wigner in 1930 ter bepaling van het vibratiespectrum van een symmetrisch molecuul zoals NH_3, CH_4 of C_{60}. Er zijn veel andere toepassingen van groepentheorie in de natuurkunde te noemen bijvoorbeeld in de kristallografie of de theorie van elementaire deeltjes. Niet voor niets dragen een aantal groepen de namen van bekende natuurkundigen zoals Galilei, Lorentz, Poincaré, Heisenberg en de Sitter. Een goed boek over dit onderwerp is S. Sternberg, Group theory and physics, Cambridge University Press, 1994. Met name voor een vervolgstudie op hetgeen in deze syllabus wordt uitgelegd is dit boek een aanrader.

1 Groepen en ondergroepen

Definitie 1.1 Een *groep* G is een verzameling G waarin voor elk paar elementen $a, b \in G$ een element $ab \in G$ (genaamd het *product* van a en b) is voorgeschreven zodat

1. $(ab)c = a(bc)\ \forall a, b, c \in G$,
2. $\exists e \in G$ met $ea = ae = a\ \forall a \in G$,
3. $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G$ met $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

De afbeelding $G \times G \ni (a, b) \mapsto ab \in G$ heet de *productregel* of *vermenigvuldiging* van de groep G. De eerste eigenschap heet de *associativiteit* van de vermenigvuldiging. Het element $e \in G$ heet het *eenheidselement* van G, en a^{-1} heet de *inverse* van a. Het aantal elementen van een groep G heet de *orde* van G, en wordt genoteerd $|G|$. Twee elementen $a, b \in G$ *commuteren* als $ab = ba$. Een groep waarvan elk tweetal elementen commuteert heet *abels* of *commutatief.*

Opmerking 1.2 Soms wordt het product ab van a en b ook aangegeven met $a \cdot b$ of ook $a + b$, maar deze laatste notatie alleen voor een abelse groep en $a + b$ heet dan de som van a en b. Evenzo spreekt men dan over het nulelement n (i.p.v. de eenheid e) en de tegengestelde $-a$ (i.p.v. de inverse a^{-1}).

Opmerking 1.3 De volgende uitspraken kunnen eenvoudig worden afgeleid uit de definitie van een groep G.

1. Er is precies één eenheidselement e.
2. Elk element a heeft precies één inverse a^{-1}.
3. $\forall a, b \in G$ geldt $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
4. De uitkomst van een product van drie of meer elementen is onafhankelijk van hoe de haakjes geplaatst zijn (en om deze reden zullen we in een herhaald product dan ook geen haakjes meer schrijven).

Voorbeeld 1.4 Zij $F = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. De *optelgroep van* F is als verzameling F met groepsbewerking optellen.

Voorbeeld 1.5 Zij $F = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. De *vermenigvuldigingsgroep* $F^\times$ *van* F is als verzameling $F^\times = F - \{0\}$ met groepsbewerking vermenigvuldigen.

Voorbeeld 1.6 Zij $F = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ en V een vectorruimte over F van dimensie $n < \infty$. De verzameling

$$GL(V) = \{A : V \to V; A \text{ is lineair}, \det(A) \neq 0\}$$

vormt een groep met als productregel samenstellen van lineaire afbeeldingen. Deze groep $GL(V)$ heet de *algemene lineaire groep* van V (in het engels general linear group). Nemen we $V = F^n$ dan krijgen we

$$GL_n(F) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(F); \det(A) \neq 0\}$$

met als productregel matrixvermenigvuldigen. De groep $GL_n(F)$ is de algemene lineaire groep over F in dimensie n. Merk op dat $GL_1(F) = F^\times$.

Voorbeeld 1.7 Zij $V_4 = \{e, a, b, c\}$ een verzameling van 4 elementen. Nemen we als productregel $a^2 = b^2 = c^2 = e$, $ab = ba = c$, $bc = cb = a$, $ca = ac = b$ dan wordt V_4 een (abelse) groep van order 4. De groep V_4 heet wel de *viergroep van Klein.*

Voorbeeld 1.8 De *symmetrische groep* S_n is als verzameling de collectie van permutaties van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$. Een permutatie $\sigma \in S_n$ wordt weergegeven door een matrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

en de orde van S_n is dus $n!$. De productregel voor S_n is samenstellen van permutaties, dus bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en we zien dat S_n voor $n \geq 3$ niet abels is.

Definitie 1.9 Een *ondergroep* H van een groep G is een deelverzameling $H \subset G$ waarvoor geldt

1. $e \in H$,
2. $a, b \in H \Longrightarrow ab \in H$,
3. $a \in H \Longrightarrow a^{-1} \in H$.

We noteren $H < G$ voor een ondergroep H van G. Als $H < G$ dan is H op natuurlijke manier weer een groep door beperking van de productregel in G tot elementen van H.

Voorbeeld 1.10 Voor elke groep G zijn $\{e\}$ en G ondergroepen. Dit zijn de triviale ondergroepen van G. Voor $a \in G$ is de deelverzameling

$$\langle a \rangle = \{a^j; j \in \mathbb{Z}\}$$

ondergroep van G, de zogenaamde *cyclische ondergroep* van G voortgebracht door a. Hierbij is $a^0 = e$, en $a^j = a\,a \ldots a$, $a^{-j} = a^{-1}a^{-1} \ldots a^{-1}$ beide met $j \geq 1$ factoren, zodat $a^i a^j = a^{i+j}$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$. De *orde van een element* $a \in G$ is per definitie de orde van de ondergroep $\langle a \rangle$, en indien eindig gelijk aan het kleinste getal $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ met $a^n = e$. Een groep G heet *cyclisch* als $\exists a \in G$ met $G = \langle a \rangle$, en a heet dan een *voortbrenger* van G.

Voorbeeld 1.11 De volgende ondergroepen van de algemene lineaire groep komen regelmatig voor.
$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); \det A = 1\}$ *speciale lineaire groep*
$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); A^t A = I_n\}$ *orthogonale groep*
$SO_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$ *speciale orthogonale groep*
$SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); \det A = 1\}$ *speciale lineaire groep*
$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); A^* A = I_n\}$ *unitaire groep*
$SU_n(\mathbb{C}) = SL_n(\mathbb{C}) \cap U_n(\mathbb{C})$ *speciale unitaire groep.*
Hierbij is $A^* = \overline{A}^t$ de geadjungeerde matrix van A. Merk op dat $O_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) \cap U_n(\mathbb{C})$ en evenzo $SO_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) \cap SU_n(\mathbb{C})$.

Voorbeeld 1.12 Voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ een vast getal beschouwen we de orthogonale matrices

$$r = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/n & -\sin 2\pi/n \\ \sin 2\pi/n & \cos 2\pi/n \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dan is r de matrix van een rotatie van $\mathbb{R}^2$ over een hoek $2\pi/n$, en t de matrix van een spiegeling van $\mathbb{R}^2$ met de x-as als spiegel. Men controleert eenvoudig dat

$$r^n = e,\ t^2 = e,\ tr^j = r^{n-j}t$$

waarmee men kan inzien dat

$$\begin{aligned} C_n &= \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\} \\ D_n &= \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, t, rt, r^2t, \ldots, r^{n-1}t\} \end{aligned}$$

ondergroepen van $SO_2(\mathbb{R})$ en $O_2(\mathbb{R})$ zijn respectievelijk. De groep C_n is de cyclische groep van orde n met voortbrenger r, en is de groep van alle rotaties van het vlak die de verzameling $X_n = \{(\cos 2\pi j/n, \sin 2\pi j/n); j \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq n-1\}$ van hoekpunten van een regelmatige n-hoek (mits $n \geq 3$) permuteren. De groep D_n heet de *diëdergroep* van orde $2n$, en

$$D_n = \{a \in O_2(\mathbb{R}); aX_n = X_n\}$$

is de volle (dus bestaande uit rotaties en spiegelingen) symmetriegroep van de regelmatige n-hoek.

Stelling 1.13 De eindige ondergroepen van $SO_2(\mathbb{R})$ zijn de cyclische groepen C_n van orde n. De eindige ondergroepen van $O_2(\mathbb{R})$ welke niet bevat zijn in $SO_2(\mathbb{R})$ zijn (na een geschikte rotatie van $\mathbb{R}^2$) de diëdergroepen D_n van orde $2n$.

Bewijs. Schrijf $r(\theta)$ met $0 \leq \theta < 2\pi$ voor de matrix van een rotatie van $\mathbb{R}^2$ over een hoek θ. Is $G < SO_2(\mathbb{R})$ van orde n dan nummeren we de elementen $r_1, \ldots, r_n$ van G zodat $r_j = r(\theta_j)$ met $0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi$. Omdat $G \ni r_{i+1}r_i^{-1}r_j = r(\theta_{i+1})r(-\theta_i)r(\theta_j) =$

$r(\theta_{i+1} - \theta_i + \theta_j)$ concluderen we $\theta_{i+1} - \theta_i + \theta_j \geq \theta_{j+1}$ $\forall i, j$ waarbij $\theta_{n+1} = 2\pi$. Maar $\theta_{i+1} - \theta_i \geq \theta_{j+1} - \theta_j$ $\forall i, j$ betekent $\theta_{i+1} - \theta_i = 2\pi/n$ $\forall i$. Dit bewijst de eerste uitspraak dat $G = C_n$.

Veronderstel nu dat $G < O_2(\mathbb{R})$ van eindige orde en niet bevat in $SO_2(\mathbb{R})$. Kies $s \in G$ met $\det(s) = -1$. Met t als in Voorbeeld 1.12 is $\det(st) = 1$, en dus $st = r(\theta)$ voor zekere $0 \leq \theta < 2\pi$. Hieruit volgt dat $s = r(\theta)t = r(\theta/2)r(\theta/2)t = r(\theta/2)tr(-\theta/2)$ een spiegeling van $\mathbb{R}^2$ is met als spiegel $r(\theta/2)\mathbb{R}e_1 = \mathbb{R}(\cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2)$. We weten al dat $G \cap SO_2(\mathbb{R}) = C_n$ voor zekere n. Is $a \in G - C_n$ dan is $as \in C_n$ en dus $G - C_n = C_n s := \{s, rs, \ldots, r^{n-1}s\}$. Er volgt dat

$$G = C_n \cup C_n s = C_n \cup C_n r(\theta/2)tr(-\theta/2) = r(\theta/2)D_n r(-\theta/2)$$

waarmee de tweede uitspraak is bewezen. □

Opgaven

1.1. Zij $Y_4 = \{(2,0), (0,1), (-2,0), (0,-1)\}$ de verzameling hoekpunten van een ruit in het vlak $\mathbb{R}^2$, en zij $G = \{a \in O_2(\mathbb{R}); aY_4 = Y_4\}$ de symmetriegroep van deze ruit. Ga na dat $G = D_2$, en bij geschikte benaming $G = V_4$. Dit bewijst dat de productregel op V_4 inderdaad associatief is, en dus een groep V_4 definieert.

1.2. Bepaal alle ondergroepen van C_2, C_4 en V_4.

1.3. Laat G_1, G_2 groepen met eenheden e_1, e_2 respectievelijk. Definieer een natuurlijke productregel op het cartesisch product $G_1 \times G_2 := \{(a_1, a_2); a_1 \in G_1, a_2 \in G_2\}$. Wat is de eenheid in $G_1 \times G_2$ en wat is de inverse van $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$? Deze groep $G_1 \times G_2$ heet het direct product van G_1 en G_2.

1.4. Beschrijf de elementen van D_4 in meetkundige termen. Bepaal alle ondergroepen van D_4 van orde 4.

1.5. Stel G een groep met $a^2 = e$ $\forall a \in G$. Bewijs dat G abels is.

1.6. Bewijs de volgende uitspraken:
   1. $C_m < C_n \iff m$ is een deler van n.
   2. Elke ondergroep van C_n is van de vorm C_m met m een deler van n (gebruik Stelling 1.13).
   3. Elke ondergroep van C_n is triviaal $\iff n = 1$ of $n = p$ priem.

2 Nevenklassen en conjugatieklassen

Definitie 2.1 Een *relatie* R op een verzameling X is een deelverzameling $R \subset X \times X$. Voor $(x, y) \in R$ schrijven we ook xRy en we zeggen dat x in relatie R tot y staat. Een relatie R op X heet een *equivalentierelatie* als

1. $xRx\ \forall x \in X$ (reflexiviteit),
2. als xRy dan yRx (symmetrie),
3. als xRy en yRz dan xRz (transitiviteit).

Een equivalentierelatie wordt meestal aangegeven met $\sim$, en voor $x \sim y$ zeggen we x is equivalent met y. De verzameling $[x] = \{y \in X; y \sim x\}$ heet de equivalentieklasse van x en x heet een *representant* van $[x]$. De verzameling X is een disjuncte vereniging van de equivalentieklassen.

Voorbeeld 2.2 Zij X de verzameling van alle mensen. Hetzelfde geslacht hebben is een equivalentierelatie met twee equivalentieklassen: mannen en vrouwen. In hetzelfde land wonen is ook een equivalentierelatie met als equivalentieklassen de nationaliteiten. Afstammen van is geen equivalentierelatie want deze relatie is niet symmetrisch.

Definitie 2.3 Zij G een groep en $H < G$. Voor $a, b \in G$ definiëren we

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Men controleert eenvoudig dat dit een equivalentierelatie is. De equivalentieklassen heten de *linkernevenklassen* in G naar H. De linkernevenklasse met representant a noteren we aH. De verzameling van linkernevenklassen in G naar H heet de *factorruimte* van G naar H, en noteren we G/H. Het aantal elementen van G/H heet de *index* van H in G, en wordt genoteerd $[G : H]$.

Stelling 2.4 Voor $H < G$ eindige groepen geldt $[G : H] = |G|/|H|$ zodat de orde van H steeds deler is van de orde van G.

Bewijs. Voor $x \in G$ wordt de afbeelding $L_x : G \to G$ (linksvermenigvuldiging met x) gedefinieerd door $L_x(a) = xa\ \forall a \in G$. De afbeelding L_x heeft een inverse (namelijk $L_{x^{-1}}$) en is dus bijectief. Voorts is $xa \sim xb \iff (xa)^{-1}xb = a^{-1}x^{-1}xb = a^{-1}b \in H \iff a \sim b$ en dus voert L_x de linkernevenklasse aH over in de linkernevenklasse $(xa)H$. Ieder tweetal linkernevenklassen bevat dus evenveel elementen, en wel $|H|$ veel (want $H = eH$). Aangezien G een disjuncte vereniging is van de linkernevenklassen naar H krijgen we $|G| = [G : H] \cdot |H|$. $\square$

Gevolg 2.5 In een eindige groep G is de orde van ieder element deler van $|G|$.

Toepassing 2.6 In elke groep G is het eenheidselement e het unieke element van orde 1. Als $|G| = p$ priem dan heeft elke $a \in G$ $a \neq e$ orde p en dus $G = \langle a \rangle$. Een groep van priemorde is dus altijd cyclisch.

Opmerking 2.7 Voor $H < G$ kan men op volstrekt analoge wijze *rechternevenklassen* Ha van a naar H invoeren. In het algemeen zal de opsplitsing van G in linkernevenklassen verschillen van die in rechternevenklassen. Maar soms kunnen beide opsplitsingen samenvallen bijvoorbeeld als G abels is, of als H index 2 in G heeft (zodat $G = H \cup (G - H)$ de opsplitsing in linker- en rechternevenklassen is).

Definitie 2.8 Zij G een groep. Twee elementen $a, b \in G$ heten *geconjugeerd* als $b = xax^{-1}$ voor zekere $x \in G$. Geconjugeerd zijn is een equivalentierelatie (controleer!) en de bijbehorende equivalentieklassen heten de *conjugatieklassen* van G. Voor $a \in G$ noteren we met $[a]$ de conjugatieklasse van a in G.

Voorbeeld 2.9 Is G een abelse groep dan is $[a] = \{a\}$ voor elk element $a \in G$.

Voorbeeld 2.10 Beschouw de diëdergroep $D_n = C_n \cup C_n t$ als in Voorbeeld 1.12. De groep $C_n = \{r^j; j = 0, \ldots, n-1\}$ is abels zodat $r^i r^j r^{-i} = r^j$, en $r^i t r^j t r^{-i} = r^i r^{-j} r^{-i} = r^{-j}$. Dus vinden we voor de conjugatieklassen van rotaties in D_n

$$[r^j] = \{r^j, r^{-j}\}.$$

Voor de bepaling van $[t]$ rekent men eenvoudig na dat $r^i t r^{-i} = r^i t t t r^{-i} = r^{2i} t$. Nu is

$$\langle r^2 \rangle = \begin{cases} \{e, r^2, \ldots, r^{2m}, r^{2m+2} = r, \ldots, r^{2m-1}\} = C_n & \text{als } n = 2m+1 \text{ oneven} \\ \{e, r^2, \ldots, r^{2m-2}\} = C_m & \text{als } n = 2m \text{ even} \end{cases}$$

zodat

$$[t] = \begin{cases} C_n t & \text{als } n = 2m+1 \text{ oneven} \\ C_m t & \text{als } n = 2m \text{ even} \end{cases}$$

Voor de conjugatieklassen van spiegelingen in D_n vinden we dan

$$C_n t = \begin{cases} [t] & \text{als } n \text{ oneven} \\ [t] \cup [rt] & \text{als } n \text{ even} \end{cases}$$

Het onderscheid voor de conjugatieklassen van spiegelingen tussen n oneven en n even heeft ook een meetkundige reden. Voor $n = 3$ is D_3 de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek, en de 3 spiegelingen om de zwaartelijnen zijn geconjugeerd. Voor $n = 4$ is D_4 de symmetriegroep van een vierkant en de 4 spiegelingen komen in 2 soorten. Er zijn 2 spiegelingen in lijnen door overstaande hoekpunten, en ook 2 spiegelingen in lijnen door middens van overstaande zijden.

Voorbeeld 2.11 Beschouw de symmetrische groep S_n van permutaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$. Voor k verschillende getallen $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ noteren we met $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ de permutatie $\sigma \in S_n$ waarvoor $\sigma(i_j) = i_{j+1}$, $\sigma(i_k) = i_1$ en $\sigma(i) = i$ als $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

Zo'n σ heet een *kring* of *cykel* ter lengte $k \leq n$. Deze schrijfwijze voor een kring is niet uniek want $(i_1\, i_2 \ldots i_k) = (i_2\, i_3 \ldots i_k\, i_1) = \ldots = (i_k\, i_1 \ldots i_{k-1})$. Kringen van lengte 1 zijn alle gelijk aan het eenheidselement. Kringen van lengte 2 heten *verwisselingen* of *transposities.* Twee kringen $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ en $(j_1\, j_2 \ldots j_l)$ heten *disjunct* als $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \emptyset$. Het is duidelijk dat disjuncte kringen commuteren. Neem bijvoorbeeld de permutatie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 10 & 12 & 1 & 11 & 9 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

Dan is duidelijk dat

$$\sigma = (1\ 4\ 3\ 2\ 7)(5\ 10\ 8\ 11)(6\ 12)$$

een product is van disjuncte kringen.

Stelling 2.12 Elke permutatie in S_n is te schrijven als product van disjuncte kringen, en deze schrijfwijze is uniek op volgorde van de factoren en het al of niet weglaten van kringen ter lengte 1 na.

Twee kringen $(i_1 \ldots i_k)$ en $(j_1 \ldots j_k)$ van dezelfde lengte k zijn altijd geconjugeerd in S_n. Inderdaad $(j_1 \ldots j_k) = \sigma(i_1 \ldots i_k)\sigma^{-1}$ voor iedere $\sigma \in S_n$ met $\sigma(i_1) = j_1, \sigma(i_2) = j_2, \ldots, \sigma(i_k) = j_k$. Hoe σ de verzameling $\{1, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$ bijectief afbeeldt op $\{1, \ldots, n\} - \{j_1, \ldots, j_k\}$ is verder irrelevant. Een dalend rijtje gehele getallen $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r \geq 1$ met $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ heet een *partitie* van n.

Definitie 2.13 Schrijf $\sigma \in S_n$ als $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ product van disjuncte kringen ter lengte $k_1, \ldots, k_r$. Nemen we kringen ter lengte 1 ook mee, en ordenen we de factoren naar dalende lengte, dan is $k_1 + \cdots + k_r = n$ en $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r \geq 1$. De partitie $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ van n heet de *kringstructuur* of het *cykeltype* van $\sigma \in S_n$.

Stelling 2.14 De conjugatieklassen in S_n zijn de permutaties met dezelfde kringstructuur.

Voor $n = 3$ zijn er 3 partities (3), $(2, 1)$ en $(1, 1, 1)$ met bijbehorende conjugatieklassen $\{(123), (132)\}$, $\{(12), (13), (23)\}$ en $\{e\}$ in S_3. Voor $n = 4$ hebben we de volgende tabel.

$(k_1, \ldots, k_r)$	representant van de klasse	cardinaliteit van de klasse
(4)	(1234)	$6 = 4!/4$
(3,1)	(123)	$8 = 4.2$
(2,2)	(12)(34)	3
(2,1,1)	(12)	$6 = \binom{4}{2}$
(1,1,1,1)	e	1

Opgaven

2.1. Bepaal voor $G = D_3$ de linker- en rechternevenklassen naar de ondergroep $H = \{e, t\}$. Merk op dat $aH \neq Ha$ tenzij $a \in H$.

2.2. Bewijs voor de symmetrische groep S_n dat

1. Een kring van lengte k heeft orde k.
2. Als $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ product van disjuncte kringen van lengte $k_1, \ldots, k_r$ respectievelijk, dan is de orde van σ gelijk aan $\mathrm{kgv}(k_1, \ldots, k_r)$ met kgv = kleinste gemene veelvoud.

Hoeveel conjugatieklassen met elementen van orde 5 heeft S_{24}?

2.3. Tabeleer de partities van 5, en geef voor elke partitie van 5 een representant en de cardinaliteit van de bijbehorende conjugatieklasse in S_5.

2.4. Bepaal de conjugatieklassen van D_5 en D_6.

2.5. Stel $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset SL_2(\mathbb{C})$ met

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Controleer de rekenregels

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

en concludeer $Q < SL_2(\mathbb{C})$. De groep Q heet de *quaterniongroep.*

2. Bepaal de conjugatieklassen van Q.

2.6. Zij G een eindige groep.

1. Bewijs dat de verzameling $\{a \in G;\ a \text{ heeft orde} \geq 3\}$ uiteenvalt in paren, en dus even cardinaliteit heeft.
2. Concludeer dat een groep van even orde altijd een element van orde 2 heeft.

2.7. Bewijs dat een conjugatieklasse in het direct product $G_1 \times G_2$ van de groepen G_1 en G_2 (zoals gedefinieerd in Opgave 1.3) steeds het cartesisch product is van een klasse in G_1 en een klasse in G_2.

3 Normaaldelers en homomorfismen

In de vorige paragraaf hebben we voor $H < G$ de linkernevenklasse aH en de rechternevenklasse Ha van $a \in G$ naar H ingevoerd en gezien dat i.h.a. $aH \neq Ha$ (Opgave 2.1).

Definitie 3.1 Een ondergroep $N < G$ heet *normaaldeler* van G als $aN = Na \; \forall a \in G$, en we noteren $N \triangleleft G$.

Voor een abelse groep G is iedere ondergroep $N < G$ automatisch normaaldeler. Ondergroepen van index 2 in een willekeurige groep G zijn ook steeds normaaldeler (vgl. Opmerking 2.7). De conditie $aN = Na \; \forall a \in G$ is equivalent met $aN \subset Na \; \forall a \in G$, en dus ook met

$$aba^{-1} \in N \quad \forall a \in G, \; \forall b \in N.$$

De volgende stelling is dus duidelijk.

Stelling 3.2 De ondergroep $N < G$ is normaaldeler precies dan als N een vereniging is van conjugatieklassen van G.

Voorbeeld 3.3 Het *centrum* $Z(G) = \{b \in G; ab = ba \; \forall a \in G\}$ van G is normaaldeler van G, want het centrum van G zijn precies die elementen in G waarvoor de conjugatieklasse slechts uit 1 element bestaat.

Voorbeeld 3.4 We hebben $C_n \triangleleft D_n$ als ondergroep van index 2 (vanwege Opmerking 2.7).

Stelling 3.5 Als G een groep en $N \triangleleft G$ dan is de factorruimte G/N op natuurlijke manier weer een groep met als productregel $aN \cdot bN = abN$. De groep G/N heet de *factorgroep.*

Bewijs. Voor $A, B \subset G$ noteren we $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$. Dan is $AB \subset G$ en het is duidelijk dat $(AB)C = A(BC)$ voor $A, B, C \subset G$. Voor $a, b \in G$ geldt

$$(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = abN$$

waaruit volgt dat de productregel in G/N goed gedefinieerd is (onafhankelijk van de keuze van de representanten in de nevenklassen). De associativiteit van de productregel in G/N is ook duidelijk. Men gaat direct na dat $eN = N$ eenheidselement in G/N is, en de inverse wordt gegeven door $(aN)^{-1} = a^{-1}N$. $\square$

Voorbeeld 3.6 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ heeft als somregel optellen modulo 12 (= rekenen op de klok).

Voorbeeld 3.7 Men controleert eenvoudig dat voor de groep $D_4 = \{e, -e, r, -r, t, -t, s := rt, -s = tr\}$ het centrum $Z(D_4)$ gelijk is $\{\pm e\}$. De factorgroep $D_4/Z(D_4)$ is de viergroep V_4. Stel maar $a = \{\pm r\}$, $b = \{\pm t\}$, $c = \{\pm s\}$ en controleer de productregel van V_4.

Definitie 3.8 Zij G en H beide groepen. Een afbeelding $\varphi : G \to H$ heet een *homomorfisme* als $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\ \forall a, b \in G$. Is φ bovendien bijectief dan heet φ een *isomorfisme*, en de groepen G en H heten *isomorf* hetgeen we noteren $G \cong H$.

Voorbeeld 3.9 De afbeelding $e \mapsto e$, $a \mapsto (12)(34)$, $b \mapsto (13)(24)$, $c \mapsto (14)(23)$ geeft een injectief homomorfisme $V_4 \to S_4$.

Voorbeeld 3.10 De *permutatiematrix* van $\sigma \in S_n$ is de $n \times n$ orthogonale matrix met een 1 op de plaatsen $(\sigma(j), j)$ voor $j = 1, \ldots, n$ en een 0 elders. Het is de matrix van de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $e_j \mapsto e_{\sigma(j)}$ voor alle j. De afbeelding $S_n \to O_n(\mathbb{Z})$ die aan een permutatie zijn permutatiematrix toevoegt is een injectief homomorfisme.

Stelling 3.11 Laat G en H beide groepen, en $\varphi : G \to H$ een homomorfisme. Dan is

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi) &:= \{\varphi(a); a \in G\} < H \\ \mathrm{Ker}(\varphi) &:= \{a \in G; \varphi(a) = e\} \lhd G \end{aligned}$$

en $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

Bewijs. We bewijzen eerst dat het beeld $\mathrm{Im}(\varphi) < H$. Allereerst is $\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e)$ en dus $\varphi(e) = e \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Stel $x, y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ dus $x = \varphi(a)$, $y = \varphi(b)$ voor zekere $a, b \in G$. Dan geldt $xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ dus $xy \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Stel $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$ dus $x = \varphi(a)$ voor zekere $a \in G$. Dan geldt $\varphi(a^{-1})x = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e) = e$, en evenzo $x\varphi(a^{-1}) = e$. Dus $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = x^{-1} \in \mathrm{Im}(\varphi)$, en $\mathrm{Im}(\varphi) < H$ volgt.
We bewijzen vervolgens dat $\mathrm{Ker}(\varphi) \lhd G$. Allereerst is $e \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ want $\varphi(e) = e$. Als $a, b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ dan is $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = ee = e$, en dus $ab \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Als $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ dan is $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = e^{-1} = e$, en dus $a^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Tenslotte geldt voor $a \in G$ en $b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ dat $\varphi(aba^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)e\varphi(a)^{-1} = \varphi(a)\varphi(a)^{-1} = e$, en dus $aba^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Hiermee is bewezen dat $\mathrm{Ker}(\varphi) \lhd G$.
We bewijzen tenslotte dat de factorgroep $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ isomorf is met $\mathrm{Im}(\varphi)$. Daartoe definiëren we een afbeelding $\overline{\varphi} : G/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Im}(\varphi)$ door $\overline{\varphi}(a\,\mathrm{Ker}(\varphi)) = \varphi(a)$. Men controleert eenvoudig dat $\overline{\varphi}$ een goed gedefinieerde afbeelding (onafhankelijk van de keuze van de representant a in de nevenklasse $a\,\mathrm{Ker}(\varphi)$) is en het isomorfisme $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$ realiseert. $\square$

Voorbeeld 3.12 De afbeelding $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ is een surjectief homomorfisme met $\mathrm{Ker}(\det) = SL_n(\mathbb{R})$. Dus $SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$ en $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$.

Voorbeeld 3.13 De afbeelding $\varepsilon : S_n \to C_2$ die aan een permutatie de determinant van de bijbehorende permutatiematrix toevoegt is een homomorfisme. Inderdaad de samenstelling van 2 homomorfismen is altijd weer een homomorfisme. De *alternerende groep* A_n is de kern van dit *tekenhomomorfisme* $\varepsilon : S_n \to C_2$. Voor $n \geq 2$ is $A_n \triangleleft S_n$ van index 2, en voor $\sigma \in S_n$ geldt $\sigma \in A_n$ precies dan als de verzameling

$$\{(i,j); i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

even cardinaliteit heeft.

Definitie 3.14 Als G een groep met $N \triangleleft G$ en $K < G$ zodat $G = NK$ en $N \cap K = \{e\}$ dan heet G het *semidirect product* van de normaaldeler N met de ondergroep K. We noteren $G = N \rtimes K$.

Opmerking 3.15 De conditie $G = NK$ betekent dat elk element $a \in G$ te schrijven is als $a = nk$ voor zekere $n \in N$, $k \in K$. De conditie $N \cap K = \{e\}$ betekent dat deze productschrijfwijze uniek is. Inderdaad als $n_1 k_1 = n_2 k_2$ met $n_1, n_2 \in N$ en $k_1, k_2 \in K$ dan $n_2^{-1} n_1 = k_2 k_1^{-1}$ en dus volgt uit $N \cap K = \{e\}$ dat $n_1 = n_2$ en $k_1 = k_2$. Voor de productafbeelding

$$p : N \times K \to G,\ p(n,k) = nk \ \text{ voor } \ n \in N, k \in K$$

geldt dus

$$\begin{aligned} G = NK \quad &\Longleftrightarrow \quad p \text{ is surjectief} \\ N \cap K = \{e\} \quad &\Longleftrightarrow \quad p \text{ is injectief.} \end{aligned}$$

Heeft G eindige orde en geldt $N \cap K = \{e\}$ dan is de conditie $G = NK$ equivalent met $|G| = |N| \cdot |K|$.

Voorbeeld 3.16 De volgende voorbeelden

1. $G = D_n$, $N = C_n$, $K = \{e, t\}$
2. $G = S_n$, $N = A_n$, $K = \{e, (12)\}$
3. $G = S_4$, $N = V_4$ als in Voorbeeld 3.9, $K = S_3$
4. $G = A_4$, $N = V_4$, $K = A_3$

geven alle een semidirect product $G = N \rtimes K$. De condities $N \cap K = \{e\}$ en $|G| = |N| \cdot |K|$ zijn steeds eenvoudig te controleren.

Stelling 3.17 Als $G = N \rtimes K$ een semidirect product is met $N \triangleleft G$, $K < G$ dan is $G/N \cong K$.

Bewijs: Iedere (linker = rechter) nevenklasse in G naar N heeft een unieke representant in K, zodat de afbeelding $G/N \to K$, $kN \mapsto k$ bijectief is. Vanwege de definitie van de productregel op G/N (als in Stelling 3.5) is deze afbeelding ook een homomorfisme, en dus $G/N \cong K$. $\square$

Opmerking 3.18 Als $G = NK$ en $N \cap K = \{e\}$ met zowel $N \triangleleft G$ als ook $K \triangleleft G$ dan heet G het *direct product* van N en K, en we schrijven $G = N \times K$.

Voorbeeld 3.19 De figuur in $\mathbb{R}^3$ met als hoekpunten $\{A = (1, 1, 1), B = (1, -1, -1), C = (-1, 1, -1), D = (-1, -1, 1)\}$ heet een *tetraëder*. De symmetriegroep T_d van de tetraëder wordt gedefinieerd als

$$T_d = \{a \in O_3(\mathbb{R}); \{aA, aB, aC, aD\} = \{A, B, C, D\}\}.$$

De natuurlijke afbeelding

$$T_d \to S_4,\ a \mapsto \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ aA & aB & aC & aD \end{pmatrix}$$

die aan een tetraëdersymmetrie de bijbehorende permutatie van de hoekpunten toevoegt is een homomorfisme. Dit homomorfisme is injectief want een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^3$ ligt vast door wat het op de basis $\{A, B, C\}$ doet. Omdat alle hoekpunten lengte $\sqrt{3}$ hebben en elk tweetal hoekpunten inproduct -1 heeft, is voor elk voorgeschreven drietal $\{A', B', C'\} \subset \{A, B, C, D\}$ de lineaire afbeelding $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ orthogonaal. Voor het vierde hoekpunt geldt dan $D = -(A + B + C) \mapsto -(A' + B' + C') = -D'$ met $D' \in \{A, B, C, D\}$ en $D' \neq A', B', C'$. Het homomorfisme $T_d \to S_4$ is dus ook surjectief en de conclusie is $T_d \cong S_4$. De *tetraëdergroep* T is per definitie de rotatiesymmetriegroep van de tetraëder, dus $T = T_d \cap SO_3(\mathbb{R})$. Men gaat eenvoudig na dat $T \cong A_4$.

Opgaven

3.1. Bewijs dat $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_n$.

3.2. Zij Q de quaterniongroep als in Opgave 2.5. Bepaal het centrum Z van Q, en bewijs dat $Q/Z \cong V_4$. Zijn D_4 en Q isomorf?

3.3. Zij G de collectie van afbeeldingen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de vorm $x \mapsto ax + b$ met $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$.
   1. Controleer dat G met productregel samenstellen van afbeeldingen een groep is, de zogenaamde $(ax + b)$-groep.
   2. Stel $t(b) : x \mapsto x + b$, $h(a) : x \mapsto ax$ voor $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $T = \{t(b); b \in \mathbb{R}\}$ normaaldeler en $H = \{h(a); a \in \mathbb{R}^\times\}$ ondergroep van G zijn.
   3. Bewijs dat $G = T \rtimes H$.

3.4. Bewijs dat de $(ax + b)$-groep isomorf is met de ondergroep van $SL_2(\mathbb{R})$ bestaande uit bovendriehoek matrices.

3.5. Zij $w \in \mathbb{R}^3$ met $|w| = 1$. De *spiegeling* van $\mathbb{R}^3$ met als *spiegel* $w^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3; v \cdot w = 0\}$ is de lineaire afbeelding $S_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met $S_w(v) = -v$ als $v \in \mathbb{R}w$, $S_w(v) = v$ als $v \in w^\perp$.
   1. Bewijs dat $S_w(v) = v - 2(v \cdot w)w$ voor $v \in \mathbb{R}^3$.
   2. Bewijs dat $S_w(u) \cdot S_w(v) = u \cdot v$ voor $u, v \in \mathbb{R}^3$ zodat $S_w \in O_3(\mathbb{R})$.
   3. Wat zijn de spiegelingen in de symmetriegroep T_d van de tetraëder?

3.6. Zij $w \in \mathbb{R}^3$ met $|w| = 1$, en $\varphi \in \mathbb{R}$. De *draaiing* van $\mathbb{R}^3$ met as w en hoek φ is de lineaire afbeelding $D_{w,\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met $D_{w,\varphi}(v) = v$ als $v \in \mathbb{R}w$, $D_{w,\varphi}(v) = (\cos\varphi)v + (\sin\varphi)w \times v$ als $v \in w^\perp$.
   1. Bewijs dat $D_{w,\varphi}(v) = (\cos\varphi)v + (\sin\varphi)w \times v + (1 - \cos\varphi)(v \cdot w)w$ voor $v \in \mathbb{R}^3$.
   2. Bepaal de matrix van $D_{w,\varphi}$ ten opzichte van een orthonormale basis $\{u, v, w\}$ met $w = u \times v$.
   3. Wat zijn de draaiingen in de symmetriegroep T_d van de tetraëder? Bepaal hun as en hoek.

3.7. Bewijs dat op isomorfie na er 2 verschillende groepen van orde 4 zijn, namelijk de cyclische groep C_4 van orde 4 en de viergroep V_4.

3.8. Bepaal de conjugatieklassen van de alternerende groep A_4.

4 Representaties

Voor het vervolg van dit college zullen we steeds stilzwijgend veronderstellen dat G een EINDIGE groep en V een vectorruimte over de complexe getallen van EINDIGE dimensie is.

Definitie 4.1 Een *representatie* (ρ, V) van een groep G op een vectorruimte V is een homomorfisme $\rho : G \to GL(V)$. Zijn (ρ, V) en (σ, W) beide representaties van G dan heet een lineaire afbeelding $A : V \to W$ *intertwiner* als $\sigma(a)A = A\rho(a)\ \forall a \in G$. Is A bovendien bijectief zodat $\sigma(a) = A\rho(a)A^{-1}\ \forall a \in G$ dan heten (ρ, V) en (σ, W) *equivalente representaties* van G. We noteren dit $\rho \simeq \sigma$.

Voorbeeld 4.2 Definieer $\rho : G \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ door $\rho(a) = 1\ \forall a \in G$. Dit is de zogenaamde *triviale representatie* van G.

Voorbeeld 4.3 Zij $G = \langle a \rangle$ een cyclische groep van orde n. Definieer $\rho_k : G \to GL_1(\mathbb{C})$ door $\rho_k(a^j) = \exp(2\pi ijk/n)$ voor $j, k = 1, \ldots, n$. Dan is ρ_k representatie van G op $\mathbb{C}$.

Voorbeeld 4.4 Zij $G < O_n(\mathbb{R})$ een eindige ondergroep dan krijgen we vanwege $O_n(\mathbb{R}) < GL_n(\mathbb{C})$ een natuurlijke representatie $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ van G op $\mathbb{C}^n$. Dit is de zogenaamde *standaardrepresentatie* van G op $\mathbb{C}^n$. De cyclische groep C_n en de diëdergroep D_n hebben een standaardrepresentatie op $\mathbb{C}^2$, en de symmetriegroep T_d van het tetraëder heeft een standaardrepresentatie op $\mathbb{C}^3$.

Voorbeeld 4.5 Voor $\sigma \in S_n$ zij $\rho(\sigma) \in O_n(\mathbb{Z}) < GL_n(\mathbb{C})$ de bijbehorende permutatiematrix. Dan is $\rho : S_n \to GL_n(\mathbb{C})$ een representatie van S_n op $\mathbb{C}^n$.

Definitie 4.6 Zij (ρ, V) een representatie van G op V. Een lineaire deelruimte U van V heet een *invariante lineaire deelruimte* als $\rho(a)u \in U\ \forall a \in G, \forall u \in U$. Via beperking tot U krijgen we een natuurlijke representatie $\rho_U : G \to GL(U)$. De representatie ρ_U heet een *deelrepresentatie* van ρ. Heeft ρ een deelrepresentatie ρ_U met $0 \subsetneqq U \subsetneqq V$ dan heet ρ *reducibel*. De representatie ρ heet *irreducibel* als $V \neq 0$ en V heeft geen andere invariante deelruimte dan de triviale invariante deelruimten 0 en V. Dus irreducibel is hetzelfde als niet reducibel plus $\dim V \geq 1$.

Stelling 4.7 Zij (ρ, V) een representatie van G op V. Dan kunnen we V opsplitsen als een directe som $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ (d.w.z. $V = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ en $U_i \cap U_j = \{0\}$ als $i \neq j$) van irreducibele invariante deelruimten $U_1, \ldots U_k$. We noteren $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ als directe som van de irreducibele deelrepresentaties $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ (met $\rho_j = \rho_{U_j}$).

Bewijs. Kies een willekeurig hermitisch inproduct $(\cdot \mid \cdot)'$ op V, en definieer een nieuw hermitisch inproduct $(\cdot \mid \cdot)$ op V door uitmiddelen over G, d.w.z.

$$(v|w) = |G|^{-1} \sum_{a \in G} (\rho(a)v|\rho(a)w)' \quad \text{voor } v, w \in V.$$

Men controleert direct dat $(\cdot \mid \cdot)$ weer een hermitisch inproduct op V is. Bovendien geldt

$$(\rho(a)v|\rho(a)w) = (v|w) \quad \forall a \in G, \forall v, w \in V.$$

Is U een invariante deelruimte van V dan kan aangetoond worden dat het orthoplement

$$U^{\perp} = \{v \in V; (u|v) = 0 \; \forall u \in U\}$$

van U m.b.t. $(\cdot \mid \cdot)$ weer een invariante deelruimte van V is. Stel maar $v \in U^{\perp}$ dus $(u|v) = 0$ $\forall u \in U$. Dan is $(u|\rho(a)v) = (\rho(a^{-1})u|v) = 0 \; \forall u \in U$, $\forall a \in G$ zodat $\rho(a)v \in U^{\perp} \; \forall a \in G$. We krijgen dus

$$V = U \oplus U^{\perp}, \; \rho = \rho_U \oplus \rho_{U^{\perp}}$$

een directe som van twee invariante deelruimten en deelrepresentaties respectievelijk. Is U een echte (d.w.z. niet triviale) invariante deelruimte van V dan is $U^{\perp}$ dat ook, en ρ is directe som van twee echte deelrepresentaties. Zijn U en $U^{\perp}$ niet beide irreducibel dan herhalen we bovenstaande constructie van een invariant complement voor de reducibele factoren. We kunnen zo doorgaan totdat $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ met louter irreducibele factoren. $\square$

Voorbeeld 4.8 De representaties van C_n

$$\rho_k : C_n \to GL_1(\mathbb{C}), \; \rho_k(r^j) = \exp(2\pi ijk/n)$$

zijn alle irreducibel. Inderdaad elke representatie $\rho : G \to GL(V)$ met $\dim V = 1$ is irreducibel. De standaardrepresentatie

$$\rho : C_n \to GL_2(\mathbb{C}), \; \rho(r^j) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi j/n & -\sin 2\pi j/n \\ \sin 2\pi j/n & \cos 2\pi j/n \end{pmatrix}$$

is reducibel. Inderdaad

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

zodat $\mathbb{C}(e_1 - ie_2)$ en $\mathbb{C}(e_1 + ie_2)$ beide invariante deelruimten zijn. Er geldt $\rho = \rho_1 \oplus \rho_{n-1}$. Deze opsplitsing van $\mathbb{C}^2$ in invariante deelruimten is uniek voor $n \geq 3$, want $\rho(r)$ heeft dan 2 verschillende eigenwaarden. De spiegeling $t \in D_n$ laat geen van beide lijnen

$\mathbb{C}(e_1 - ie_2)$ en $\mathbb{C}(e_1 + ie_2)$ invariant, maar in feite verwisselt ze. We concluderen dat de standaardrepresentatie

$$\rho : D_n \to GL_2(\mathbb{C}),\ \rho(r) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/n & -\sin 2\pi/n \\ \sin 2\pi/n & \cos 2\pi/n \end{pmatrix},\ \rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

irreducibel is voor $n \geq 3$. Men gaat eenvoudig na dat voor $n = 1$ of 2 de standaardrepresentatie van D_n op $\mathbb{C}^2$ reducibel is.

Definitie 4.9 Zij $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ een representatie van G op $\mathbb{C}^n$. De *duale representatie* $\rho^* : G \to GL_n(\mathbb{C})$ van G op $\mathbb{C}^n$ wordt gedefinieerd door

$$\rho^*(a) = (\rho(a)^{-1})^t \quad \text{voor } a \in G.$$

Men gaat direct na dat $\rho^*(ab) = \rho^*(a)\rho^*(b)\ \forall a, b \in G$ zodat ρ^* inderdaad weer een representatie is van G op $\mathbb{C}^n$. Als $\rho^* \simeq \rho$ dan heet ρ een *zelfduale representatie.*

Voorbeeld 4.10 Als $\rho : G \to U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); A^*A = 1\}$ een *unitaire representatie* van G op $\mathbb{C}^n$ dan geldt $\rho^*(a) = (\rho(a)^{-1})^t = (\rho(a)^*)^t = (\overline{\rho(a)}^t)^t = \overline{\rho(a)}$ voor $a \in G$. Een *orthogonale representatie* $\rho : G \to O_n(\mathbb{R})$ van G op $\mathbb{R}^n$ is dus steeds gelijk aan zijn duaal. Zo is dan ook de standaardrepresentatie van de symmetriegroep van een meetkundig object in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ (bv C_n, D_n, T of T_d) altijd zelfduaal.

Definitie 4.11 Beschouw $\mathbb{C}^n$ met standaardbasis $e_1, \ldots, e_n$ en $\mathbb{C}^m$ met standaardbasis $f_1, \ldots, f_m$. Dan is $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ de vectorruimte over $\mathbb{C}$ met standaardbasis $e_i \otimes f_k$ voor $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Als $v = \sum x_i e_i \in \mathbb{C}^n$ en $w = \sum y_k f_k \in \mathbb{C}^m$ dan definiëren we het *tensorproduct* $v \otimes w \in C^n \otimes \mathbb{C}^m$ van v en w door $v \otimes w = \sum x_i y_k e_i \otimes f_k$.
Als $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ en $B = (b_{kl}) \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ defiëren we het *tensorproduct* $A \otimes B \in \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{C})$ van A en B als de matrix

$$A \otimes B = a_{ij} b_{kl} \quad \text{op plaats } (i, k), (j, l).$$

Hierbij zijn (i, k) de rij- en (j, l) de kolomindex van $A \otimes B$ met $1 \leq i,\ j \leq n$ en $1 \leq k$, $l \leq m$. De volgende regels zijn eenvoudig te controleren

1. $(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw$
2. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
3. Als A^{-1}, B^{-1} bestaan dan $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
4. $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr(B)}$.

Definitie 4.12 Zijn $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ en $\sigma : G \to GL_m(\mathbb{C})$ representaties van G op $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ respectievelijk dan is het *tensorproduct* $\rho \otimes \sigma$ van ρ en σ de representatie op $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ gedefinieerd door

$$\rho \otimes \sigma(a) = \rho(a) \otimes \sigma(a) \quad \text{voor } a \in G.$$

Men gaat eenvoudig na $\rho \otimes \sigma : G \to GL_{nm}(\mathbb{C})$ weer een representatie is.

Stelling 4.13 (**Lemma van Schur**) Als $\rho : G \to GL(V)$ een irreducibele representatie van G op V is dan is iedere intertwiner $A : V \to V$ een scalair d.w.z. $A = \lambda I$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{C}$.

Bewijs. Zij $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde van A met eigenruimte $U := \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Omdat $\rho(a)A = A\rho(a)\ \forall a \in G$ volgt eenvoudig dat U een invariante lineaire deelruimte is. Aangezien $U \neq 0$ (want λ is eigenwaarde van A) en (ρ, V) irreducibel is concluderen we dat $U = V$. □

Gevolg 4.14 Als $\rho : G \to GL(V)$ een irreducibele representatie van een abelse groep G op V is dan geldt $\dim V = 1$.

Bewijs. Uit het abels zijn van G volgt dat $\rho(a) : V \to V$ intertwiner voor $a \in G$, en dus $\rho(a) = \lambda(a)I$ vanwege het Lemma van Schur met $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ een homomorfisme. Elke lineaire deelruimte van V is dus invariant, en uit de irreducibiliteit van ρ volgt dan dat $\dim V = 1$. □

Voorbeeld 4.15 De irreducibele representaties van C_n zijn van de vorm

$$\rho_k : C_n \to GL_1(\mathbb{C}),\ \rho_k(r^j) = \exp(2\pi ijk/n)$$

voor $k = 1, \ldots, n$. Inderdaad iedere irreducibele representatie ρ heeft dimensie 1, en ligt volledig vast door het beeld $\rho(r) \in \mathbb{C}^\times = GL_1(\mathbb{C})$ voor te schrijven. Vanwege $r^n = e$ volgt $\rho(r)^n = 1$ en dus $\rho = \rho_k$ voor zekere $k = 1, \ldots, n$.

Opgaven

4.1. Ga na dat de standaardrepresentatie van de quaterniongroep Q (zie Opgave 2.5) op $\mathbb{C}^2$ irreducibel is.

4.2. Zij $D_2 = \{e, r, s, t\}$ met $r = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de diëdergroep van orde 4. Bepaal alle irreducibele representaties van D_2. Ontbind de standaardrepresentatie van D_2 op $\mathbb{C}^2$ in irreducibele representaties.

4.3. Zij $\rho : S_n \to GL_n(\mathbb{C})$ de representatie van S_n met $\rho(\sigma)$ de permutatiematrix van σ. Ga na dat

$$U_1 = \{(x, x, \ldots, x) \in \mathbb{C}^n; x \in \mathbb{C}\}$$
$$U_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n; x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

beide invariante deelruimten zijn. Concludeer dat $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ met ρ_j de beperking van ρ tot U_j. Herken je de representatie ρ_1? De representatie ρ_2 heeft dimensie $(n-1)$ en heet de *spiegelingsrepresentatie* van S_n.

4.4. Ga na dat voor S_2 de spiegelingsrepresentatie samenvalt met de tekenrepresentatie.

4.5. Zij $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ en $\rho : S_4 \to GL(V)$ de spiegelingsrepresentatie van S_4 op V. Stel $A = (3, -1, -1, -1)/2$, $B = (-1, 3, -1, -1)/2$, $C = (-1, -1, 3, -1)/2$ en $D = (-1, -1, -1, 3)/2$.
   1. Ga na dat $\{A, B, C, D\}$ de hoekpunten van een tetraëder in $V \cap \mathbb{R}^4$ zijn.
   2. Ga na dat $\rho(\sigma)$ voor $\sigma \in S_4$ de verzameling $\{A, B, C, D\}$ in zichzelf overvoert.
   3. Concludeer dat de spiegelingsrepresentatie van S_4 equivalent is met de standaardrepresentatie van $S_4 = T_d$.

4.6. Beschouw V_4 als ondergroep van $T_d = S_4$ op de gebruikelijke wijze (als in Voorbeeld 3.9), en zij ρ de bijbehorende standaardrepresentatie van V_4 op $\mathbb{C}^3$. Ontbind $\mathbb{C}^3$ in irreducibele invariante deelruimten.

5 Karakters

Voor $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ rekent men direct na dat

$$\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB),$$

en voor $\det(B) \neq 0$ volgt dus ook

$$\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

Hieruit volgt voor een lineaire afbeelding $A : V \to V$ het spoor van de matrix van A ten opzichte van een basis van V niet afhangt van de basiskeuze, en dus is $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{C}$ goed gedefinieerd.

Definitie 5.1 Zij $\rho : G \to GL(V)$ een representatie van G op V. Het *karakter* van ρ is de complexwaardige functie χ_ρ op G gedefinieerd door

$$\chi_\rho(a) = \mathrm{tr}(\rho(a)) \quad \text{voor } a \in G.$$

Opmerking 5.2 Voor $\rho : G \to GL(V)$ en $\sigma : G \to GL(W)$ beide representaties van G gaat men eenvoudig na dat

1. Als $\rho \simeq \sigma$ dan $\chi_\rho = \chi_\sigma$.
2. $\chi_\rho(bab^{-1}) = \chi_\rho(a)\ \forall a, b \in G$ dus het karakter is constant op conjugatieklassen.
3. $\chi_\rho(e) = \dim V$.
4. $\chi_{\rho^*}(a) = \chi_\rho(a^{-1}) = \overline{\chi_\rho(a)}\ \forall a \in G$.
5. $\chi_{\rho\oplus\sigma}(a) = \chi_\rho(a) + \chi_\sigma(a)\ \forall a \in G$.
6. $\chi_{\rho\otimes\sigma}(a) = \chi_\rho(a)\chi_\sigma(a)\ \forall a \in G$.

In de loop van deze paragraaf zullen we inzien dat de omkering van 1. ook geldt, dus $\rho \simeq \sigma$ dan en slechts dan als $\chi_\rho = \chi_\sigma$. Het karakter karakteriseert dus de representatie op equivalentie na, vandaar de naam.

Zij $L(G)$ de lineaire ruimte van complexwaardige functies op G. Voor $\varphi, \psi \in L(G)$ stellen we

$$(\varphi|\psi) = |G|^{-1} \sum_{x \in G} \varphi(x)\overline{\psi(x)}.$$

Dit is een inproduct op $L(G)$: lineair in φ, antilineair in ψ en $(\varphi|\varphi) > 0$ als $\varphi \neq 0$.

Stelling 5.3 (**Schur orthogonaliteitsrelaties**) Zijn $\rho : G \to GL(V)$ en $\sigma : G \to GL(W)$ beide irreducibele representaties van G dan geldt

$$(\chi_\rho|\chi_\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad \rho \simeq \sigma \\ 0 & \text{als} \quad \rho \not\simeq \sigma \end{cases}$$

Bewijs. Zij $\tau : G \to GL(U)$ een willekeurige representatie van G. Stellen we

$$U^G = \{u \in U; \tau(a)u = u \ \forall a \in G\}$$

dan is U^G een invariante lineaire deelruimte. Definieer een lineaire afbeelding $P : U \to U$ door

$$Pu = |G|^{-1} \sum_{x \in G} \tau(x)u \quad \text{voor } u \in U.$$

Dan is $\tau(a)P = P \ \forall a \in G$ en dus ook $P^2 = P$. De operator P is dus een projectieoperator, met als beeld $\mathrm{Im}(P) = U^G$. We vinden dus

$$(\chi_\tau \mid 1) = |G|^{-1} \sum_{x \in G} \mathrm{tr}(\tau(x)) = \mathrm{tr}(P) = \dim U^G.$$

We zullen deze formule toepassen voor een speciale representatie τ van G.
Zij $\mathrm{Hom}(V, W)$ de vectorruimte van lineaire afbeeldingen $A : V \to W$. Definieer een representatie $\mathrm{Hom}(\rho, \sigma)$ van G op $\mathrm{Hom}(V, W)$ door

$$\mathrm{Hom}(\rho, \sigma)(a)A = \sigma(a)A\rho(a)^{-1}$$

voor $a \in G$, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Men controleert eenvoudig dat $\mathrm{Hom}(\rho, \sigma)$ een representatie is, en dat

$$\mathrm{Hom}(V, W)^G = \{\text{intertwiners } A : V \to W\}.$$

Met behulp van het Lemma van Schur volgt nu

$$\dim \ \mathrm{Hom}(V, W)^G = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad \rho \simeq \sigma \\ 0 & \text{als} \quad \rho \not\simeq \sigma \end{cases}$$

We passen nu de formule $(\chi_\tau \mid 1) = \dim U^G$ toe op de representatie $\tau = \mathrm{Hom}(\rho, \sigma)$. Men gaat eenvoudig na dat $\mathrm{Hom}(\rho, \sigma) \simeq \rho^* \otimes \sigma$ zodat

$$(\chi_{\mathrm{Hom}(\rho,\sigma)} \mid 1) = (\overline{\chi}_\rho \chi_\sigma \mid 1) = (\chi_\sigma \mid \chi_\rho) = (\chi_\rho \mid \chi_\sigma).$$

Dit bewijst de stelling. $\square$

Gevolg 5.4 Zij $\rho : G \to GL(V)$ een representatie van G op V. Zij $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ en $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ een opsplitsing van (ρ, V) in irreducibele factoren (volgens Stelling 4.7). Zij (σ, W) een irreducibele representatie van G. Dan is het aantal irreducibele factoren in (ρ, V) dat equivalent is met (σ, W) gelijk aan $(\chi_\rho \mid \chi_\sigma)$, en dus onafhankelijk van de gekozen opsplitsing. Het getal $(\chi_\rho \mid \chi_\sigma) \in \mathbb{N}$ heet de *multipliciteit* waarmee σ in ρ voorkomt.

Bewijs. Aangezien $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \cdots + \chi_{\rho_k}$ volgt de bewering uit de orthogonaliteitsrelaties van Schur. $\square$

Gevolg 5.5 Twee representaties van G met hetzelfde karakter zijn equivalent.

Bewijs. Dit is duidelijk uit het vorige gevolg. $\square$

Notatie 5.6 Laat $\chi_1, \ldots, \chi_s$ de verschillende irreducibele karakters van G zijn behorend bij de irreducibele representaties $\rho_1, \ldots, \rho_s$ van G op vectorruimten $V_1, \ldots, V_s$ van dimensie $n_1, \ldots, n_s$ respectievelijk. Omdat karakters constant zijn op conjugatieklassen volgt uit de orthogonaliteitsrelaties dat $s \leq$ aantal conjugatieklassen in $G < \infty$.

Stelling 5.7 Een representatie $\rho : G \to GL(V)$ is irreducibel dan en slechts dan als $(\chi_\rho \mid \chi_\rho) = 1$.

Bewijs. Schrijf $\rho \simeq m_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus m_s\rho_s$ als directe som van de irreducibele representaties van G met multipliciteiten $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Dan is $(\chi_\rho \mid \chi_\rho) = \sum_1^s m_j^2 = 1$ als $m_i = 1$ voor zekere i en $m_j = 0$ als $j \neq i$. $\square$

Voorbeeld 5.8 Zij ρ de representatie van S_4 op $\mathbb{C}^4$ met $\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$ voor $\sigma \in S_4$ en $i = 1, \ldots, 4$. Het karakter χ van ρ laat zich eenvoudig berekenen als

$$\chi(e) = 4,\ \chi((12)) = 2,\ \chi((123)) = 1,\ \chi((12)(34)) = \chi((1234)) = 0.$$

Met behulp van de tabel aan het einde van §2 vinden we $(\chi|\chi) = (4^2 + 6.2^2 + 8.1^2)/24 = 2$ en $(\chi|1) = (4 + 6.2 + 8.1)/24 = 1$. De conclusie is dat ρ de directe som is van de triviale representatie en een irreducibele representatie van dimensie 3.

Definitie 5.9 Zij δ_x voor $x \in G$ de functie op G waarvoor $\delta_x(y) = \delta_{x,y}$ voor $y \in G$. Als $\varphi \in L(G)$ dan is $\varphi = \sum_x \varphi(x)\delta_x$ zodat $\{\delta_x; x \in G\}$ een basis is van $L(G)$. De *reguliere representatie* $\lambda : G \to GL(L(G))$ van G op $L(G)$ wordt gedefinieerd door

$$\lambda(a)\delta_x = \delta_{ax} \quad \text{voor } a, x \in G.$$

Men controleert eenvoudig dat λ een representatie is.

Stelling 5.10 Het karakter χ_λ van de reguliere representatie λ van G op $L(G)$ wordt gegeven door

$$\chi_\lambda = |G|\delta_e = \sum_1^s n_j\chi_j.$$

Bewijs. Ten opzichte van de basis $\{\delta_x; x \in G\}$ van $L(G)$ is de matrix van $\lambda(a)$ een permutatiematrix met op de hoofddiagonaal louter nullen als $a \in G$, $a \neq e$ en louter enen als $a = e$. Dus $\chi_\lambda = |G|\delta_e$ is duidelijk. Schrijf $\lambda \simeq m_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus m_s\rho_s$ als directe som van de irreducibele representaties $\rho_1, \ldots, \rho_s$ van G met multipliciteiten $m_1, \ldots, m_s$. Dan is $\chi_\lambda = \sum m_j\chi_j$ met $m_j = (\chi_\lambda|\chi_j) = |G|^{-1}.|G|.\chi_j(e) = n_j$. Iedere irreducibele representatie komt dus net zo vaak in λ voor als zijn dimensie. $\square$

Gevolg 5.11 $|G| = n_1^2 + \cdots + n_s^2$.

Bewijs. Evalueer de identiteit $|G|\delta_e = \sum\limits_1^s n_j\chi_j$ te e. □

Definitie 5.12 Een functie $\varphi \in L(G)$ heet *klassefunctie* als $\varphi(ba) = \varphi(ab)$ voor alle $a, b \in G$. Noteer $C(G)$ voor de lineaire deelruimte van $L(G)$ van klassefuncties. Dan is $\dim C(G)$ gelijk aan het aantal conjugatieklassen. Karakters zijn klassefuncties, en de volgende stelling zegt dat $C(G)$ als lineaire ruimte wordt opgespannen door de karakters.

Stelling 5.13 (**volledigheid van irreducibele karakters**) De irreducibele karakters $\chi_1, \ldots, \chi_s$ van G zijn een orthonormale basis van $C(G)$ of anders gezegd $s = \#$ irreducibele karakters $= \#$ conjugatieklassen.

Bewijsschets. We schetsen het bewijs in stappen.
Stap 1: Als $\rho : G \to GL(V)$ een representatie en $\varphi \in L(G)$ dan definiëren we de operator $\rho(\varphi) : V \to V$ door

$$\rho(\varphi) = \sum_x \varphi(x)\rho(x) \in \mathrm{Hom}(V, V).$$

Stap 2: Als $\varphi \in C(G)$ dan is $\rho(\varphi) \in \mathrm{Hom}(V, V)^G$ intertwiner.
Stap 3: Voor de reguliere representatie λ van G op $L(G)$ geldt dat $\lambda(\varphi)\delta_e = \varphi$ voor elke $\varphi \in L(G)$.
Stap 4: Als $\rho : G \to GL(V)$ een irreducibele representatie en $\varphi \in C(G)$ dan is $\rho(\varphi) = \lambda I$ vanwege Stap 2 en het Lemma van Schur. De scalar λ berekent men door aan beide zijden het spoor te nemen

$$\lambda = (\dim V)^{-1}.\mathrm{tr}(\rho(\varphi)) = (\dim V)^{-1}.\sum_x \varphi(x)\mathrm{tr}(\rho(x)) = \frac{|G|(\varphi|\chi_{\rho^*})}{\dim(V)}.$$

Stap 5: Zij $\psi \in C(G)$ en $(\psi|\chi_1) = \ldots = (\psi|\chi_s) = 0$. Dan is $\rho(\psi) = 0$ voor elke irreducibele representatie ρ van G vanwege Stap 4. Maar dan ook $\rho(\psi) = 0$ voor een willekeurige representatie ρ van G via ontbinding van ρ in irreducibele factoren.
Stap 6: Zij $\psi \in C(G)$ en $(\psi|\chi_1) = \ldots = (\psi|\chi_s) = 0$. Dan geldt met λ de reguliere representatie van G dat $\psi = \lambda(\psi)\delta_e$ (pas Stap 3 toe) $= 0$ (pas Stap 5 toe met $\rho = \lambda$).
Hiermee is de volledigheid van irreducibele karakters bewezen. □

Opgaven

5.1. Zij ρ de standaardrepresentatie van de diëdergroep $D_n = C_n \cup C_n t$ op $\mathbb{C}^2$ en χ het karakter van ρ.
   1. Bereken $\chi(r^j)$ en $\chi(r^j t)$ voor $j = 0, \ldots, n-1$.
   2. Ga na dat $(\chi|\chi) = 1$ als $n \geq 3$. Hiermee is een ander bewijs gegeven van de irreducibiliteit van ρ voor $n \geq 3$ dan de expliciete berekening in Voorbeeld 4.8.

5.2. Zij ρ de standaardrepresentatie van de tetraëdergroep $T = A_4$ op $\mathbb{C}^3$ en χ het karakter van ρ.

1. Ga na dat $(\chi|\chi) = 1$ en concludeer dat ρ irreducibel is.
2. Bewijs (door Gevolg 5.11 te gebruiken) dat $s = 4$ en (bij geschikte nummering) $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $n_4 = 3$.
3. Bepaal de multipliciteit waarmee ρ voorkomt in $\rho \otimes \rho$.

5.3. Bewijs de irreducibiliteit van de standaardrepresentatie van de quaterniongroep A (vergelijk Opgave 4.1) met karaktertheorie.

5.4. Zij $G_1 \times G_2$ het direct product van de groepen G_1 en G_2 (zoals gedefinieerd in Opgave 1.3). Voor $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$ en $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ beide representaties definiëren we

$$\rho_1 \times \rho_2 : G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$$

door $\rho_1 \times \rho_2(a_1, a_2) = \rho_1(a_1) \otimes \rho_2(a_2)$ voor $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$.

1. Bewijs dat $\rho_1 \times \rho_2$ een representatie van $G_1 \times G_2$ op de vectorruimte $V_1 \otimes V_2$ is. Deze representatie $\rho_1 \times \rho_2$ heet het *uitwendig product* van de representaties ρ_1 en ρ_2.
2. Bewijs dat $\chi_{\rho_1 \times \rho_2}(a_1, a_2) = \chi_{\rho_1}(a_1)\chi_{\rho_2}(a_2)$ voor $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$.
3. Laat $\rho_{11}, \ldots, \rho_{1s_1}$ de inequivalente irreducibele representaties van G_1 en $\rho_{21}, \ldots,$ ρ_{2s_2} die van G_2. Bewijs dat $\rho_{1i} \times \rho_{2j}$ voor $i = 1, \ldots, s_1$ en $j = 1, \ldots, s_2$ onderling inequivalente irreducibele representaties van $G_1 \times G_2$ zijn. Hint: Bereken $(\chi_{\rho_{1i} \times \rho_{2j}} \mid \chi_{\rho_{1k} \times \rho_{2l}})$ voor $i, k = 1, \ldots, s_1$ en $j, l = 1, \ldots, s_2$.
4. Bewijs door gebruikmaking van Opgave 2.7 dat iedere irreducibele representatie van $G_1 \times G_2$ equivalent is met $\rho_1 \times \rho_2$ voor zekere irreducibele representaties ρ_1 van G_1 en ρ_2 van G_2.

5.5. Bewijs dat een representatie $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ irreducibel is dan en slechts dan als de duale representatie ρ^* irreducibel is.

6 Karaktertabellen van enkele groepen

Zij G een eindige groep met conjugatieklassen $C_1 = \{e\}$, $C_2, \ldots, C_s$ en representanten $a_1 = e, a_2 \in C_2, \ldots, a_s \in C_s$. Laat $\chi_1, \ldots, \chi_s$ de irreducibele karakters van G zijn met $\chi_1(a) = 1\ \forall a \in G$ het triviale karakter. De karaktertabel van G is het schema

$$\begin{array}{c|cccc} G & e & a_2 & \ldots & a_s \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \chi_2 & n_2 & \chi_2(a_2) & \ldots & \chi_2(a_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_s & n_s & \chi_s(a_2) & \ldots & \chi_s(a_s) \end{array}$$

dus op de rij met index χ_i schrijven we de waarden $n_i = \chi_i(e), \chi_i(a_2), \ldots, \chi_i(a_s)$ van het irreducibel karakter χ_i op de diverse conjugatieklassen.

Voorbeeld 6.1 Voor de cyclische groep C_n (met $n = 1, \ldots, 5$) krijgen we de karaktertabellen

$$\begin{array}{c|c} C_1 & e \\ \hline \chi_1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} C_2 & e & r \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} C_3 & e & r & r^2 \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \chi_3 & 1 & \omega^2 & \omega \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} C_4 & e & r & r^2 & r^3 \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & i & -1 & -i \\ \chi_3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \chi_4 & 1 & -i & -1 & i \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} C_5 & e & r & r^2 & r^3 & r^4 \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 \\ \chi_3 & 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta & \zeta^3 \\ \chi_4 & 1 & \zeta^3 & \zeta & \zeta^4 & \zeta^2 \\ \chi_5 & 1 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta \end{array}$$

met $\omega = \exp(2\pi i/3)$ en $\zeta = \exp(2\pi i/5)$. Merk op dat $\chi_3 = \chi_2^2$, $\chi_4 = \chi_2^3$ en $\chi_5 = \chi_2^4$.

Voorbeeld 6.2 De karaktertabel van de viergroep V_4 wordt eenvoudig gevonden als

$$\begin{array}{c|cccc} V_4 & e & a & b & c \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \chi_3 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \chi_4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Voorbeeld 6.3 Voor de diëdergroep D_n (met $n = 3, 4, 5, 6$) vinden we de karaktertabellen

D_3	e	r	t
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

D_4	e	r	r^2	t	$s = rt$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0

D_5	e	r	r^2	t
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1
χ_3	2	$-\tau'$	$-\tau$	0
χ_4	2	$-\tau$	$-\tau'$	0

D_6	e	r	r^2	r^3	t	$s = rt$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1
χ_5	2	1	-1	-2	0	0
χ_6	2	-1	-1	2	0	0

met $\tau = -(\zeta^2 + \zeta^{-2}) = (1+\sqrt{5})/2$ als oplossing van $\tau^2 = \tau + 1$ en evenzo $\tau' = -(\zeta + \zeta^{-1}) = (1-\sqrt{5})/2$. Het karakter χ_2 heet de *tekenrepresentatie* van D_n. Voor $n = 3, 5$ is χ_3 het karakter van de standaardrepresentatie. Voor $n = 5$ ontbinden we χ_3^2 als som van irreducibele karakters: $(\chi_3^2|\chi_1) = (\chi_3^2|\chi_2) = 1$ en $(\chi_3^2|\chi_3) = 0$. We vinden dus $\chi_3^2 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4$ met χ_4 een nieuw karakter. Berekening geeft $(\chi_4|\chi_4) = 1$, zodat χ_4 het resterend irreducibel karakter van D_5 is.
Veronderstel nu dat $n = 2m$ even. De ondergroep $C_m = \langle r^2 \rangle$ is normaaldeler van D_n en $D_n/C_m = V_4$ als we stellen $a = rC_m$, $b = tC_m$, $c = rtC_m$. We krijgen dus 4 irreducibele karakters $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ van D_n van dimensie 1 die afkomen van V_4 (zie Voorbeeld 6.2). Voor $n = 4, 6$ is χ_5 het karakter van de standaardrepresentatie. Voor $n = 6$ vinden we het resterende irreducibel karakter χ_6 door $\chi_6 = \chi_3\chi_5$ als karakter van $\rho_3 \otimes \rho_5$.

Voorbeeld 6.4 Voor de alternerende groep A_4 vinden we de karaktertabel (met $\omega = \exp(2\pi i/3)$)

A_4	e	$(12)(34)$	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

Het irreducibel karakter χ_4 is het karakter van de standaardrepresentatie van de tetraëdergroep $T = A_4$ op $\mathbb{C}^3$. De relatie $|G| = n_1^2 + \cdots n_s^2$ geeft $3 = n_1^2 + \cdots n_{s-1}^2$ zodat $s = 4$ en $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Omdat $A_4 = V_4 \rtimes A_3$ zodat $A_4/V_4 \cong A_3 \cong C_3$ vinden we de karakters χ_1, χ_2, χ_3 uit de karaktertabel van C_3.

Voorbeeld 6.5 Voor de symmetrische groep S_4 vinden we de karaktertabel

S_4	e	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

De conjugatieklassen van S_4 zijn bepaald aan het slot van §2, en hebben $1, 6, 3, 8, 6$ elementen respectievelijk. Het karakter χ_2 is de tekenrepresentatie van S_4. Omdat $S_4 = V_4 \rtimes S_3$ zodat $S_4/V_4 \cong S_3 \cong D_3$ vinden we het karakter χ_3 uit de karaktertabel van D_3. Het irreducibel karakter χ_4 is het karakter van de standaardrepresentatie van $T_d \cong S_4$ op $\mathbb{C}^3$. Het resterend irreducibel karakter $\chi_5 = \chi_2\chi_4$ is het karakter van het $\rho_5 = \rho_2 \otimes \rho_4$.

Voorbeeld 6.6 Zij $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met $s(x) = -x$ de *centrale inversie* van $\mathbb{R}^3$. De verzameling

$$O_h = T_d \cup T_d s = T_d \cup sT_d$$

is dan ondergroep van $O_3(\mathbb{R})$ en is de symmetriegroep van een kubus met hoekpunten $\{\pm A, \pm B, \pm C, \pm D\}$ als in Voorbeeld 3.9. Ook is O_h de symmetriegroep van een octaëder met hoekpunten $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$. De *octaëdergroep* O is per definitie de rotatiesymmetriegroep van de octaëder, dus $O = O_h \cap SO_3(\mathbb{R})$. Het is duidelijk dat $O_h = O \times \{e, s\}$ een direct product is. Men kan inzien dat $O \cong S_4$ als permutatiegroep van de 4 diagonalen in de kubus.
Als $\rho : O \to GL(V)$ een irreducibele representatie is dan krijgen we 2 irreducibele representaties ρ_+ en ρ_- van O_h op V gedefinieerd door

$$\rho_+(a) = \rho_-(a) = \rho(a),\ \rho_+(as) = \rho(a),\ \rho_-(as) = -\rho(a)$$

voor $a \in O$. De bijbehorende karakters χ_+ en χ_- worden gegeven door

$$\chi_+(a) = \chi_-(a) = \chi(a),\ \chi_+(as) = \chi(a),\ \chi_-(as) = -\chi(a)$$

voor $a \in O$. Alle irreducibele karakters van O_h worden op deze wijze verkregen. De hier beschreven method is een speciaal geval van een algemene constructie zoals uiteengezet in Opgave 5.4. De karaktertabel van de groep O_h wordt dus

O_h	a_j	$a_j s$
$\chi_{i,+}$	X	X
$\chi_{i,-}$	X	$-X$

met X de karaktertabel van $O \cong S_4$ (zoals bepaald in Voorbeeld 6.5).

Voorbeeld 6.7 Beschouw de icosaëder met hoekpunten de 12 punten $(\pm\tau, \pm 1, 0)$, $(0, \pm\tau, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm\tau)$ met $\tau = 2\cos(\pi/5) = (1+\sqrt{5})/2$ en $\tau^2 = \tau + 1$ als in Voorbeeld 6.3. Er zijn 30 ribben van gelijke lengte 2 en 20 gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, In elk hoekpunt komen 5 ribben samen. De icosaëder heeft dus tweevoudige, drievoudige en vijfvoudige rotatiesymmetrie.

Stelling 6.8 De 15 lijnen door middens van overstaande ribben vallen uiteen in 5 orthogonale drietallen, en de icosaëder heeft als rotatiesymmetriegroep $I \cong A_5$ de groep van even permutaties van deze 5 drietallen. De groep I heet de *icosaëdergroep*.

We bepalen de karaktertabel van A_5. Er zijn 5 conjugatieklassen met representanten e, $a = (12)(34)$, $b = (123)$, $c = (12345)$, $d = c^2 = (13524)$ met elk 1, 15, 20, 12, 12 elementen respectievelijk. Merk op dat conjugatie met een oneven permutatie uit S_5 de klassen van c en d verwisselt. De karaktertabel van A_5 wordt nu

A_5	e	a	b	c	d
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	τ	τ'
χ_3	3	-1	0	τ'	τ
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

Het spoor van een rotatie van $\mathbb{R}^3$ van orde 2 en 3 is gelijk aan $-2+1=-1$ en $-1+1=0$ respectievelijk. Voor een rotatie van orde 5 is het spoor gelijk aan $\zeta+\zeta^{-1}+1 = -(\zeta^2+\zeta^{-2}) = \tau = (1+\sqrt{5})/2$ of $\zeta^2+\zeta^{-2}+1 = (\zeta+\zeta^{-1}) = \tau' = (1-\sqrt{5})/2$. Voor de karakters χ_2 en χ_3 vinden we de waarden als in de tabel. Eenvoudige berekening geeft $(\chi_2|\chi_2) = (\chi_3|\chi_3) = 1$ zodat χ_2 en χ_3 inderdaad irreducibele karakters zijn. De representatie ρ_4 is de beperking van de spiegelingsrepresentatie (zie Opgave 4.3) van S_5 op $\mathbb{C}^4$ tot de ondergroep A_5. Men rekent direct na dat $(\chi_4|\chi_4) = 1$ en dus is χ_4 een irreducibel karakter. Bereken nu $(\chi_2\chi_3|\chi_4) = (36+12+12)/60 = 1$, en dus is $\chi_5 := \chi_2\chi_3 - \chi_4$ het karakter van een representatie ρ_5. Controleer tenslotte dat $(\chi_5|\chi_5) = (25+15+20)/60 = 1$ en dus is χ_5 het resterend irreducibel karakter.
De volledige symmetriegroep

$$I_h = I \cup Is \cong A_5 \times C_2$$

van het icosaëder heeft 10 irreducibele karakters $\chi_{1,\pm}, \dots \chi_{5,\pm}$ en de karaktertabel van I_h wordt verkregen uit die van I op dezelfde wijze als de karaktertabel van O_h wordt verkregen uit die van O (zie Voorbeeld 6.6).

Opgaven

6.1. Bepaal de karaktertabel van de quaterniongroep Q (zie Opgave 2.5, 3.2 en 4.1). Merk op dat bij een geschikte nummering en benaming de karaktertabellen van D_4 en Q gelijk zijn (terwijl $D_4 \ncong Q$).

6.2 Controleer voor D_5 de berekeningen dat $(\chi_3^2|\chi_1) = (\chi_3^2|\chi_2) = 1$ en $(\chi_3^2|\chi_3) = 0$.

6.3 Kies een spiegeling $t \in T_d$ en zij $K = \{e, t, s, ts\} \subset O_h$.
1. Bewijs dat $O_h = T \rtimes K$.
2. Bewijs dat $T_d = T \cup tT$ isomorf is met $O = T \cup stT$, en dus beide isomorf met S_4.
3. Bewijs dat $T_h = T \cup sT$ isomorf is met $A_4 \times C_2$ (en dus niet isomorf met S_4).
4. Bewijs dat $O_h = O \cup sO$.

De conclusie is dus dat $G_h = G \cup sG \cong G \times C_2$ voor $G = T, O, I$.

6.4 Bepaal voor de groep A_5 de ontbinding van het karakter χ_2^2 als som van irreducibele karakters.

7 Moleculaire trillingen

Beschouw een molecuul M in $\mathbb{R}^3$ bestaande uit n atomen genummerd $1, \ldots, n$. Veronderstel dat $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ een evenwichtspositie voor M is, waarbij $q_j \in \mathbb{R}^3$ de positie van het j^{de} atoom is. We onderzoeken kleine uitwijkingen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ vanuit deze evenwichtspositie q, dus M bevindt zich dan in positie $q + x$. De kinetische energie K bij uitwijking $x = x(t)$ op tijd t wordt

$$K = \tfrac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$$

waarbij we $\mathbb{R}^{3n}$ voorzien van het inproduct $\langle x, y \rangle = \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = m_1(x_1, y_1) + \cdots + m_n(x_n, y_n)$ met m_j de massa van het j^{de} atoom en $(\cdot, \cdot)$ het inproduct op $\mathbb{R}^3$. De potentiële energie V is in eerste benadering een kwadratisch polynoom

$$V = \tfrac{1}{2}\langle x, Hx \rangle$$

met $H : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ een symmetrische operator dus $\langle Hx, y \rangle = \langle x, Hy \rangle$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}^{3n}$. Inderdaad het lineaire deel van V is 0 omdat $x = 0$ evenwichtspositie van M is, en kubische en hogere orde termen van V worden verwaarloosd omdat x een kleine uitwijking. De operator H heet de Hessiaan van V. De bewegingsvergelijking wordt dan volgens Newton

$$\ddot{x} + Hx = 0.$$

Is $f_1, \ldots, f_{3n}$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^{3n}$ ten opzichte waarvan H diagonaliseert met eigenwaarden $k_1, \ldots, k_{3n}$ en schrijven we $x = z_1 f_1 + \cdots z_{3n} f_{3n}$ dan wordt de bewegingsvergelijking

$$\ddot{z}_j + k_j z_j = 0 \quad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, 3n.$$

Definieer de *translatiedeelruimte* T en de *rotatiedeelruimte* R van $\mathbb{R}^{3n}$ door

$$T = \{(v, \ldots, v) \in \mathbb{R}^{3n};\ v \in \mathbb{R}^3\}$$
$$R = \{([u, q_1], \ldots, [u, q_n]) \in \mathbb{R}^{3n};\ u \in \mathbb{R}^3\}$$

met $[u, v] = u \times v$ het uitproduct op $\mathbb{R}^3$. Veronderstellen we dat de potentiële energie V invariant is onder translaties en rotaties van M als geheel dan volgt $V(x) = 0$ voor $x \in T + R$. Veronderstellen we dat $q_1, \ldots, q_n$ niet op een rechte lijn in $\mathbb{R}^3$ liggen, dan kan men laten zien dat $\dim R = 3$ en $T \cap R = 0$ zodat $\dim(T + R) = 6$. We kunnen de orthonormale basis $f_1, \ldots, f_{3n}$ van $\mathbb{R}^{3n}$ wel zodanig kiezen dat $f_{3n-5}, \ldots, f_{3n}$ een basis is van $T + R$, en dus $k_j = 0$ voor $j = 3n - 5, \ldots, 3n$. Tenslotte veronderstellen we dat q een stabiele evenwichtspositie van M is, hetgeen betekent dat $k_j > 0$ voor $j = 1, \ldots, 3n - 6$. De bewegingen waarbij M als geheel niet verschuift of draait zijn dus superposities van $(3n - 6)$ harmonische eigentrillingen met frequenties $\nu_j = \sqrt{k_j}$ voor $j = 1, \ldots, 3n - 6$. Voor een kwantitatieve bepaling van deze frequenties moet men de symmetrische operator $H : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ expliciet kennen. Heeft M in positie q een voldoende rijke symmetrie,

dan stelt kennis van deze symmetriegroep ons in staat een aantal opmerkelijke kwalitatieve conclusies te trekken.
Veronderstel dat het i^{de} atoom en het j^{de} atoom alleen dan gelijke massa hebben als ze identiek zijn. Nemen we het zwaartepunt $\sum_1^n m_j q_j / \sum_1^n m_j$ van M als oorsprong van $\mathbb{R}^3$ dan wordt de symmetriegroep G van M in evenwichtspositie q gegeven door

$$G = \{a \in O(\mathbb{R}^3); \forall i \ \exists j \text{ met } m_i = m_j \text{ en } aq_i = q_j\}.$$

Als ondergroep van $O(\mathbb{R}^3)$ heeft G een standaardrepresentatie $\pi : G \to GL(\mathbb{C}^3)$ met karakter χ. Elk element $a \in G$ geeft een permutatie $\sigma_a \in S_n$ door $\sigma_a(i) = j$ als $aq_i = q_j$. We definiëren de natuurlijke representatie Π van G op $\mathbb{R}^{3n}$ door

$$\Pi(a)(x_1, \ldots, x_n) = \left(ax_{\sigma_a^{-1}(1)}, \ldots, ax_{\sigma_a^{-1}(n)} \right)$$

voor $a \in G$ en $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$.

Stelling 7.1 (Regel van Wigner). Het karakter X van de natuurlijke representatie Π van G op $\mathbb{R}^{3n}$ wordt gegeven door

$$\mathrm{X}(a) = \#\{i; \sigma_a(i) = i\} \cdot \chi(a).$$

Bewijs. We vatten $\Pi(a)$ op als een $n \times n$ matrix met als matrixelementen 3×3 matrices. Op de hoofddiagonaal staat op plaats (i, i) de matrix $\pi(a)$ als $\sigma_a(i) = i$ en 0 als $\sigma_a(i) \neq i$. De regel is dus duidelijk. □

De translatiedeelruimte T van $\mathbb{R}^{3n}$ is een invariante deelruimte want

$$\Pi(a)(v, \ldots, v) = (av, \ldots, av) \in T$$

voor $a \in G$ en $v \in \mathbb{R}^3$. De deelrepresentatie Π_T is dus equivalent met π en heeft karakter $\mathrm{X}_T = \chi$. De rotatiedeelruimte R van $\mathbb{R}^{3n}$ is ook invariant want

$$\begin{aligned} &\Pi(a)([u, q_1], \ldots, [u, q_n]) = \\ &\left(a \left[u, q_{\sigma_a^{-1}(1)} \right], \ldots, a \left[u, q_{\sigma_1^{-1}(n)} \right] \right) = \\ &\det(a)([au, q_1], \ldots, [au, q_n]) \end{aligned}$$

omdat $a[u, v] = \det(a)[au, av]$ voor $a \in G$ en $u, v \in \mathbb{R}^3$. De deelrepresentatie Π_R is dus equivalent met $\det \otimes \pi$ en heeft karakter $\mathrm{X}_R = \det \cdot \chi$. We krijgen dus een orthogonale opsplitsing in invariante deelruimten

$$\mathbb{R}^{3n} = V \oplus T \oplus R$$

met V het opspansel van $f_1, \ldots, f_{3n-t}$. Het karakter X_V van de deelrepresentatie Π_V is dus

$$\mathrm{X}_V = \mathrm{X} - \chi - \det \cdot \chi$$

en kan berekend worden met behulp van de regel van Wigner. Aangezien de symmetriegroep G de bewegingsvergelijking behoudt krijgen we

$$\Pi(a)H = H\Pi(a) \quad \text{voor alle } a \in G.$$

De eigenruimte $V_\nu = \{v \in H; Hv = \nu^2 v\}$ is dus invariant, en de eigenruimteopsplitsing van H op de *vibratiedeelruimte* V

$$V = \bigoplus_{\nu>0} V_\nu$$

is een opsplitsing van V in invariante deelruimten.

Definitie 7.2 Als de deelrepresentatie Π_ν van G op V_ν irreducibel is voor alle $\nu > 0$ met $V_\nu \neq 0$ dan zegt men dat de operator H op V *natuurlijke ontaarding* heeft voor G. Zo niet dan spreekt men van *toevallige ontaarding.*

In de regel hebben we natuurlijke ontaarding. Een toevallige ontaarding kan worden opgeheven door een kleine nog steeds met G commuterende verstoring H' van H. Toevallige ontaarding kan er ook op wijzen dat G nog niet de volledige symmetriegroep voor het gestelde probleem is. We nemen in de rest van deze paragraaf aan dat H op V natuurlijke ontaarding voor G heeft.

Conclusie 7.3 Het *vibratiespectrum* van M is $\{\nu > 0; V_\nu \neq 0\}$ en dus de wortel uit het eigenwaardespectrum van H op V. Het aantal frequenties in het vibratiespectrum van M is dus (hoogstens) gelijk aan het aantal irreducibele factoren van de representatie $\Pi_V : G \to GL(V)$. Dit kan significant kleiner zijn dan $3n - 6$.

De frequenties in het vibratiespectrum van M kan men experimenteel vaststellen op een aantal manieren. Bij elke vorm van experiment meet men slechts bepaalde frequenties in het vibratiespectrum gegeven door een zogenaamde *selectieregel.* Het meest gebruikelijke experiment is door licht te schijnen op M en aan het verstrooide licht het infraroodspectrum te meten. De selectieregel voor infraroodspectroscopie zegt:

> De frequentie $\nu > 0$ komt voor in het *infraroodspectrum* van $M \iff$ de irreducibele representatie Π_ν van G op V_ν komt voor in de standaardrepresentatie $\pi : G \to O(\mathbb{R}^3)$.

Met karaktertheorie vertaalt deze selectieregel zich in $(\chi|\mathrm{X}_\nu) \geq 1$. Hierbij is X_ν het karakter van de representatie Π_ν van V_ν.
Een alternatieve vorm van spectroscopie werd ontdekt door Raman in 1928. De selectieregel voor Ramanspectroscopie luidt:

> De frequentie $\nu > 0$ komt voor in het *Ramanspectrum* van $M \iff$ de irreducibele representatie Π_ν van G komt voor in de tweede symmetrische macht $S^2(\pi)$ van de standaardrepresentatie $\pi : G \to O(\mathbb{R}^3)$.

Het tensorproduct $\pi \otimes \pi$ ontbindt altijd in symmetrische en antisymmetrische tensoren: $\pi \otimes \pi = S^2(\pi) \oplus A^2(\pi)$. De representatie π is zelfduaal omdat $\overline{\chi} = \chi$. Dit impliceert $A^2(\pi) = \Pi_R$ want Π_R is de representatie van G op antisymmetrische 3×3 matrices door middel van conjugatie. Het karakter van $S^2(\pi)$ is dus gelijk aan $\chi^2 - \det \cdot \chi$. De selectieregel voor de frequentie $\nu > 0$ in het Ramanspectrum wordt dus $(\chi^2 - \det \cdot \chi | \mathrm{X}_\nu) \geq 1$. Het volledige vibratiespectrum van M kan worden bepaald met behulp van neutronenverstrooiing.

Conclusie 7.4 Zij $\nu > 0$ een frequentie in het vibratiespectrum van M.
Selectieregel voor ν in infraroodspectrum: $(\chi | \mathrm{X}_\nu) \geq 1$.
Selectieregel voor ν in Ramanspectrum: $(\chi^2 - \det \cdot \chi | \mathrm{X}_\nu) \geq 1$.

Voorbeeld 7.5 Een molecuul XY_3 met het X-atoom in de oorsprong van $\mathbb{R}^3$ en de drie Y-atomen op de plaatsen $(2, 0, 0)$, $(-1, \sqrt{3}, 0)$, $(-1, -\sqrt{3}, 0)$. De symmetriegroep G is de groep $D_{3h} = D_3 \times C_2$ met $D_3 = \{e, r, r^2, t, rt, r^2t\}$ en $C_2 = \{e, s\}$ waarbij

$$r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ +\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Met de karaktertabel van D_3 zoals uitgerekend in Voorbeeld 6.3 krijgen we (met $\chi_5 = \det$)

D_{3h}	e	r	t	s	rs	ts
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	-1	0	2	-1	0
χ_4	1	1	1	-1	-1	-1
χ_5	1	1	-1	-1	-1	1
χ_6	2	-1	0	-2	1	0
χ	3	0	1	1	-2	-1
$\det \cdot \chi$	3	0	-1	-1	2	-1
X	12	0	2	4	-2	-2
X_V	6	0	2	4	-2	0
$\chi^2 - \det \cdot \chi$	6	0	2	2	2	2

Men controleert eenvoudig dat $\mathrm{X}_V = \chi_1 + 2\chi_3 + \chi_4$, $\chi = \chi_3 + \chi_4$ en $\chi^2 - \det \cdot \chi = 2\chi_1 + \chi_3 + \chi_6$ Het volledige vibratiespectrum heeft dus 4 frequenties. Hiervan zien we er 3 in het infraroodspectrum, en ook 3 in het Ramanspectrum. Het infraroodspectrum en het Ramanspectrum hebben 2 frequenties gemeen.

Voorbeeld 7.6 Het *buckminsterfullerene* molecuul C_{60} of kortweg de *buckyball* (genoemd naar de architect Buckminster Fuller) heeft 60 koolstofatomen op de hoekpunten van een afgeknot icosaëder. Op elke ribbe van het icosaëder (totaal 30 stuks) liggen dus 2 koolstofatomen die de ribbe verdelen in een verhouding $l : k : l$. De symmetriegroep G is de groep $I_h = I \times C_2$ met I de icosaëdergroep en $C_2 = \{e, s\}$ met s de centrale inversie. De 10 irreducibele karakters $\chi_{1,\pm}, \ldots, \chi_{5,\pm}$ op de conjugatieklassen met als representant $e, a, b, c, d, s, as, bs, cs, ds$ zijn beschreven in Voorbeeld 6.7. De standaardrepresentatie $\pi : I_h \to GL_3(\mathbb{C})$ is irreducibel met karakter $\chi = \chi_{2,-}$. Evenzo is $\det \otimes \pi$ ook irreducibel met karakter $\chi_{2,+}$. De tweede symmetrische macht $S^2(\pi)$ heeft karakter $S^2(\chi) = \chi^2 - \det \cdot \chi$ en men rekent direct na dat $S^2(\chi) = \chi_{1,+} + \chi_{5,+}$. De natuurlijke representatie Π van I_h op $\mathbb{R}^{180}$ heeft karakter X. Met behulp van de regel van Wigner vindt men

$$\mathrm{X}(x) = \begin{cases} 180 & \text{als } x = e \\ 4 & \text{als } x = as \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Inderdaad de enige groepselementen die minsten één koolstofatoom vastlaten zijn het eenheidselement e (en wel alle 60 koolstofatomen) of een spiegeling as (en wel precies 4 koolstofatomen op de bijbehorende spiegel). Een eenvoudige berekening geeft

$$\begin{aligned} (\mathrm{X}|\chi_{2,-}) &= (180.3 + 15.4.1)/120 = 5 \\ (\mathrm{X}|\chi_{1,+}) &= (180.1 + 15.4.1)/120 = 2 \\ (\mathrm{X}|\chi_{5,+}) &= (180.5 + 15.4.1)/120 = 8 \end{aligned}$$

en omdat $\mathrm{X}_V = \mathrm{X} - \chi - \det \cdot \chi = \mathrm{X} - \chi_{2,-} - \chi_{2,+}$ komen we tot de volgende conclusie. Het infraroodspectrum heeft 4 frequenties en het Ramanspectrum 10 frequenties.
Men kan narekenen dat het volledige vibratiespectrum 46 frequenties heeft. Het C_{60}-molecuul met deze rijke icosaëdersymmetrie werd pas in 1985 experimenteel gevonden door Kroto, Heath, O'Brien, Curl, Smalley. Voor dit werk hebben Curl, Kroto en Smalley in 1996 de Nobelprijs voor chemie ontvangen. De bovenstaande wiskundige conclusies voor het vibratiespectrum van C_{60} zijn alle experimenteel geverifieerd.

Opgaven

7.1. Bewijs dat ammoniak NH_3, waarvan de atomen in evenwichtsstand een regelmatige 3-zijdige piramide vormen met het stikstofatoom aan de top, 4 dezelfde frequenties heeft in het infraroodspectrum en het Ramanspectrum.

7.2 Methaan CH_4 heeft 4 waterstofatomen op de hoekpunten van een tetraëder en 1 koolstofatoom in het zwaartepunt. Bepaal het aantal frequenties in het infraroodspectrum en het Ramanspectrum van CH_4.

7.3 Bewijs dat $\dim R = 3$ als $rg\{q_1, \ldots, q_n\} \geq 2$ en $\dim(R + T) = 6$ als $q_1, \ldots, q_n$ niet op één lijn liggen.

7.4 Heeft een molecuul M centrale symmetrie (d.w.z. met het zwaartepunt als oorsprong zit $s(x) = -x$ voor $x \in \mathbb{R}^3$ in de symmetriegroep van M) dan zijn het infraroodspectrum en het Ramanspectrum disjunct (als we veronderstellen dat er geen toevallige ontaarding is). Waarom?

7.5 Met de notatie van Voorbeeld 7.6 definiëren we het karakter ψ op I_h door $\psi = \sum_1^5 \chi_{j,+} + \sum_1^5 \chi_{j,-}$.

1. Bereken $\psi(e)$ en $\psi(as)$.
2. Bewijs dat $(\mathrm{X}|\psi) = 48$.
3. Bewijs dat het volledige vibratiespectrum van C_{60} 46 frequenties heeft.

Index

abels	3
algemene lineaire groep	3
alternerende groep	12
associativiteit	3
buckminsterfullerene	34
buckyball	34
centrale inversie	28
centrum	11
commuteren	3
commutatief	3
conjugatieklassen	8
cyclisch	4
cyclische ondergroep	4
cykel	8
cykeltype	9
deelrepresentatie	16
diëdergroep	5
disjunct	9
draaiing	15
duale representatie	18
eenheidselement	3
equivalente representaties	16
equivalentierelatie	7
factorruimte	7
factorgroep	11
geconjugeerd	8
groep	3
homomorfisme	12
icosaëdergroep	29
index	7
infraroodspectrum	33
intertwiner	16
invariante lineaire deelruimte	16
inverse	3
irreducibel	16
isomorf	12
isomorfisme	12

karakter 21
klassefunctie 24
kring 8
kringstructuur 9

linkernevenklassen 7

multipliciteit 22

natuurlijke ontaarding 33
normaaldeler 11

octaëdergroep 28
ondergroep 4
optelgroep van 3
orde 3
orde van een element 4
orthogonale groep 5
orthogonale representatie 18

partitie 9
permutatiematrix 12
product 3
productregel 3

quaterniongroep 10

Ramanspectrum 33
rechternevenklassen 8
reducibel 16
reguliere representatie 23
relatie 7
representant 7
representatie 16
rotatiedeelruimte 31

selectieregel 33
semidirect product 13
speciale lineaire groep 5
speciale orthogonale groep 5
speciale unitaire groep 5
spiegel 15
spiegeling 15
spiegelingsrepresentatie 19
standaardrepresentatie 16
symmetrische groep 4

tekenhomomorfisme 13
tekenrepresentatie 27
tensorproduct 18
tetraëder 14
tetraëdergroep 14
toevallige ontaarding 33
triviale representatie 16
translatiedeelruimte 31
transposities 9

uitwendig product 25
unitaire groep 5
unitaire representatie 18

vermenigvuldiging 3
vermenigvuldigingsgroep 3
verwisselingen 9
vibratiedeelruimte 33
vibratiespectrum 33
viergroep van Klein 4
voortbrenger 4

zelfduale representatie 18