

Die effektive Theorie für schwere Quarks  
und ihre Renormierung  
in Parameterdarstellung

Michael Mürger  
Technische Hochschule Darmstadt

Diplomarbeit

Oktober 1992

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Allgemeine Betrachtungen . . . . .	3
1.2	Physikalische Motivation . . . . .	4
1.3	Übersicht über diese Arbeit . . . . .	6
1.4	Danksagung . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Die effektive Theorie für schwere Quarks</b>	<b>9</b>
2.1	Graphische Definition der HQET . . . . .	9
2.1.1	Decoupling schwerer Teilchen . . . . .	9
2.1.2	Der heavy-quark-Limes . . . . .	11
2.2	Asymptotische Entwicklungen . . . . .	13
2.3	Betrachtungen im Impulsraum . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Parameterdarstellungen</b>	<b>17</b>
3.1	Einführung in die Parameterdarstellung . . . . .	17
3.2	Power-Counting . . . . .	20
3.3	Analytische Eigenschaften . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Formale Betrachtung der effektiven Theorie</b>	<b>27</b>
4.1	Intermediäre Theorie in Parameterdarstellung . . . . .	27
4.2	Parameterdarstellung der effektiven Theorie . . . . .	30
4.2.1	Formale Diskussion des heavy-quark-Limes . . . . .	30
4.2.2	Direkte Herleitung . . . . .	32
4.2.3	Reduzierte Graphen . . . . .	33
<b>5</b>	<b>UV-Powercounting in der effektiven Theorie</b>	<b>37</b>
5.1	Erste Überlegungen . . . . .	37
5.2	Vollständige Diskussion . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Analytische Eigenschaften der HQET</b>	<b>45</b>
6.1	Gemischte Darstellung . . . . .	45
6.2	Parameterdarstellung . . . . .	47

<b>7</b>	<b>Renormierung divergenter Graphen</b>	<b>53</b>
7.1	BPHZ-Renormierung in Parameterdarstellung . . . . .	53
7.2	HQET: Erste Überlegungen . . . . .	57
7.3	HQET: Vollständige Formulierung . . . . .	59
7.3.1	Modifizierter R-Operator für die intermediäre Theorie . . .	59
7.3.2	BPHZ-Renormierung der HQET . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Graphentheoretische Definitionen</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Herleitung der graphischen Regeln</b>	<b>71</b>
B.1	Symanzik-Polynome $D(\underline{\alpha}), A(\underline{\alpha}, \underline{p})$ . . . . .	71
B.2	Spinpolynome $B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}), K(\underline{\alpha}, \underline{\xi})$ . . . . .	73
<b>C</b>	<b>Graphentheoretische Funktionen in Hepp-Sektoren</b>	<b>77</b>
C.1	One-Tree-Summen . . . . .	77
C.2	Pseudo-Tree-Summen . . . . .	78
<b>D</b>	<b>Explizite Rechnungen in niedrigen Ordnungen</b>	<b>81</b>
D.1	Beispiel für die effektive Parameterdarstellung . . . . .	81
D.2	Ein-Schleifen-Geschwindigkeitssingularitäten . . . . .	83
D.3	QED-Selbstenergie im HQET-Limes . . . . .	85
D.4	Beispiele für die Renormierung der HQET . . . . .	86

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Allgemeine Betrachtungen

Die Untersuchung asymptotischen Verhaltens in den verschiedensten Längen- bzw. Impuls- sowie Massenskalen ist seit den frühen Tagen der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie, spätestens jedoch seit 1954 [1, 2] Gegenstand einer großen Zahl von Untersuchungen. Die Motivation hierfür ist eine zweifache. Zum einen erhofft man sich Einsichten in das globale Verhalten von Quantenfeldtheorien über die Störungsrechnung hinaus, die, von speziellen Situationen abgesehen, bestenfalls als divergente asymptotische Entwicklung Gültigkeit besitzt. Ein Standardbeispiel hierfür ist die Exponentierung und Aufhebung der Infrarotdivergenzen in der QED bei geeigneter Konstruktion der Wirkungsquerschnitte [3]. Die Einsicht in die Existenz eines solchen Mechanismus wurde zum Ausgangspunkt für die Suche nach einer zweckmäßigeren Definition asymptotischer Zustände als sie der Fock-Raum liefert (für einen Überblick siehe z.B. [4]). Von ähnlicher Bedeutung ist die asymptotische Freiheit nichtabelscher Eichtheorien, die ebenfalls zuerst im Rahmen der Störungstheorie entdeckt wurde, und die bei der nichtstörungstheoretischen Konstruktion renormierbarer, aber nicht superrenormierbarer Quantenfeldtheorien von zentraler Bedeutung ist (s. z.B. [5]).

Bescheidener in ihrer Zielsetzung, aber von großer praktischer Bedeutung, ist die Betrachtung bestimmter Formen asymptotischen Verhaltens im Hinblick auf sich ergebende Vereinfachungen in der Struktur der untersuchten Theorie, insbesondere das Auftreten zusätzlicher exakter Symmetrien, die in der vollen Theorie nicht oder nur näherungsweise vorliegen. Ein typisches Beispiel ist die chirale Symmetrie gewisser fermionischer Modelle bei verschwindender Fermionmasse.

Gegenstand der Betrachtung sind i. d. R. Greensche Funktionen (evtl. mit Operatoreinsetzungen) bzw. Streuamplituden, bei denen man einige Argumente festhält, d. h. als Parameter betrachtet, während man die übrigen gewissen Grenzwerten zustreben läßt. Vielfach untersuchte asymptotische Regionen erge-

ben sich, wenn man einige oder alle Massenparameter gegen Null (IR-Limes, [18, 21]) oder unendlich (‘decoupling’, [11, 12]) oder einige oder alle äußeren Impulse gegen unendlich (high-energy-behavior, [14, 15]) gehen läßt. (Aufgrund der Homogenität der Amplituden gibt es Beziehungen zwischen den jeweiligen Resultaten.) Durch Parametrisierung der Massen, Impulse etc. mittels eines Skalenparameters  $\lambda$  läßt sich der betrachtete Limes in die Form  $\lambda \rightarrow \infty$  bringen. Wenn der betreffende Grenzwert (gegebenenfalls nach Abfaktorisierung einer einfachen  $\lambda$ -abhängigen Funktion) existiert, eine nichttriviale Funktion der festgehaltenen Parameter ist und sich mittels einfacherer Regeln konstruieren läßt, wollen wir von einer *effektiven Theorie* sprechen. Diese Definition verzichtet im Hinblick auf die Vorgehensweise dieser Arbeit bewußt auf die Terminologie der Renormierungsgruppe (‘Ausintegration von Freiheitsgraden’). Ein einfaches Beispiel stellt das schon erwähnte Decoupling-Theorem dar, welches besagt, daß sich Feynman-Amplituden bei der Skalierung der Masse mindestens einer inneren Linie gegen unendlich wie eine negative Potenz dieser Masse, multipliziert mit einem Polynom in  $\ln m$  verhalten. Die sich daraus ergebende effektive Theorie besteht daher lediglich im Weglassen der Graphen, die mindestens eine schwere Linie enthalten. Im Vergleich hierzu ist die effektive Theorie für schwere Quarks (HQET) [6, 8], deren Untersuchung diese Arbeit gewidmet ist, wesentlich interessanter. Diese Theorie läßt sich ganz im Sinne obiger Überlegungen als Limes einer komplizierteren Theorie auffassen [7, 9]. Sie hat im Laufe der letzten Jahre im Rahmen der phänomenologischen Hochenergiephysik als weitgehend modellunabhängige Näherung vielfältige Anwendung gefunden. Im Mittelpunkt steht hierbei die Untersuchung schwacher Zerfälle von Mesonen und Baryonen, welche schwere (d. h. c- bzw. b-)Quarks enthalten. Für einen Überblick siehe z. B. [10]. Gegenstand dieser Arbeit sind jedoch nicht diese phänomenologischen Anwendungen, sondern vielmehr anknüpfend an [7] einige Beiträge zur Klärung grundsätzlicher Fragen im Zusammenhang mit dem heavy-quark-Limes, die nach Ansicht des Verfassers näherer Betrachtung bedürfen.

## 1.2 Physikalische Motivation

Der HQET liegt die physikalisch plausible Vorstellung [8] zugrunde, daß bei gebundenen Systemen aus leichten und schweren Quarks die Gesamtmasse im wesentlichen gleich der (rein phänomenologisch definierten) Masse  $m$  des schweren Quarks ist und daß der Impuls durch

$$p^\mu = mv^\mu \tag{1.1}$$

mit der 4-Geschwindigkeit  $v^\mu$  ( $v^2 = 1$ ) des schweren Quarks zusammenhängt. Wechselwirkungen, die endliche Impulsüberträge  $q^\mu$  bewirken, haben im Grenzfall

großer Masse ( $m \rightarrow \infty$ ) keinen Einfluß auf die Geschwindigkeit:

$$v^{\mu'} = v^\mu + \frac{q^\mu}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v^{\mu'} = v^\mu. \quad (1.2)$$

Daraus folgt, daß sich das schwere Quark im Limes  $m \rightarrow \infty$  mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und lediglich als Quelle für Farbströme auftritt. Eine Änderung der Geschwindigkeit ist nur durch Wechselwirkungen möglich, die mit der Masse  $m$  skalieren. Diese Tatsache wird gelegentlich als ‘Geschwindigkeits-Superauswahlregel’ bezeichnet.

Diese Vorstellung implementieren wir, indem wir die Greenschen Funktionen der betrachteten Theorie (auf ein bestimmtes Modell legen wir uns hier nicht fest) ‘in der Umgebung der Massenschale’ im Impulsraum betrachten. Zu diesem Zweck schreiben wir den äußeren Impuls eines einlaufenden schweren Quarks der Geschwindigkeit  $v$  in der Form

$$p^\mu = mv^\mu + \tilde{p}^\mu \quad (1.3)$$

mit dem Restimpuls  $\tilde{p}$ . Entsprechend sei der auslaufende Impuls (zunächst unter der Voraussetzung, daß das schwere Quark seine Identität nicht durch schwachen Zerfall ändert) durch  $p^{\mu'} = mv^{\mu'} + \tilde{p}^{\mu'}$  gegeben. Der heavy-quark-Limes besteht nun in dem Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$ , wobei sich die Hoffnung auf seine Zweckmäßigkeit auf die folgende Beobachtung und die sich aus ihr ergebenden Konsequenzen stützt: Unter der Ersetzung  $p^\mu = mv^\mu + \tilde{p}^\mu$  mit  $v^2 = 1$  wird der Dirac-Propagator

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad \text{zu} \quad \frac{1 + \not{v} + \frac{\not{\tilde{p}}}{m}}{2v \cdot \tilde{p} + \frac{\tilde{p}^2}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1 + \not{v}}{2} \frac{1}{v \cdot \tilde{p}}. \quad (1.4)$$

Die Konvergenz für  $m \rightarrow \infty$  ist gleichmäßig bzgl. einer beliebigen Matrixnorm für Impulse  $\tilde{p} \in M$  auf kompakten Mengen  $M \subset R^4 \setminus \{\tilde{p} | v \cdot \tilde{p} = 0\}$ . Dadurch daß man Masse und Impuls in koordinierter Weise gegen Unendlich gehen läßt, erhält man einen nichttrivialen Limes, zu dem es offensichtlich kein euklidisches Analogon gibt. Die Singularität auf der Massenschale ( $p^2 = m^2$ ) wird im Limes  $m \rightarrow \infty$  zu  $v \cdot \tilde{p} = 0$ . Dies wollen wir etwas genauer betrachten. Die Pole des Dirac-Propagators liegen in der  $p^0$ -Ebene bei

$$p^0 = \pm(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Nach der Ersetzung  $p = mv + \tilde{p}$  wird daraus

$$\tilde{p}_\pm^0 = -mv^0 \pm [(mv^0)^2 + \vec{p}^2 + 2m\vec{v} \cdot \vec{p}]^{1/2} = mv^0 [-1 \pm (1 + \frac{2\vec{v} \cdot \vec{p}}{m(v^0)^2} + \frac{\vec{p}^2}{(mv^0)^2})^{1/2}] \quad (1.6)$$

mit

$$\tilde{p}_-^0 = -2mv^0 + O(1) \quad (1.7)$$

$$\tilde{p}_+^0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{p}}{v^0} + O(m^{-1}). \quad (1.8)$$

Einer der Pole verschwindet somit für  $m \rightarrow \infty$  im Unendlichen, während die positive Massenschale gewissermaßen ‘geradegebogen’ wird, indem  $p^2 = m^2$  zu  $v \cdot \tilde{p} = 0$  wird. Da  $(v \cdot \tilde{p} + i0)^\omega$  für alle  $\omega \in C$  als temperierte Distribution in  $\tilde{p}$  existiert (sogar analytisch in  $\omega$ ), ist leicht einzusehen, daß

$$\frac{1}{v \cdot \tilde{p} + \frac{\tilde{p}^2}{2m} + i0} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{v \cdot \tilde{p} + i0} \quad (1.9)$$

in der üblichen Topologie des  $\mathcal{S}'(R^4)$ . Die Verbindung zu den physikalischen Argumenten vom Beginn dieses Abschnitts zeigt sich anhand der Fouriertransformierten von  $(v \cdot \tilde{p} + i0)^{-1}$ , deren Berechnung mit Hilfe der Parameterdarstellung instruktiv ist:

$$S_v(x) = \int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} e^{-i\tilde{p} \cdot x} \frac{i}{v \cdot \tilde{p} + i0} = \int_0^\infty d\alpha e^{-0\alpha} \int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} e^{i\tilde{p} \cdot (\alpha v - x)} = \int_0^\infty d\alpha \delta^4(x - \alpha v). \quad (1.10)$$

Wie man sieht, ist der Träger von  $S_v(x)$  durch den Halbstrahl  $\alpha v$ ,  $\alpha \geq 0$  gegeben, so daß dieser Propagator tatsächlich die Ausbreitung von Teilchen mit fester Geschwindigkeit beschreibt, wobei der Parameter  $\alpha$  nichts anderes ist als das Eigenzeitintervall  $\alpha = \sqrt{x^2}$ . Integration von (1.10) über  $\alpha$  führt schließlich auf

$$\frac{\theta(x^0 v^0)}{|v^0|} \delta^3(\vec{x} - x^0 \vec{v}_3) \text{ mit } \vec{v}_3 = \frac{\vec{v}}{v^0}. \quad (1.11)$$

Wie man diesem Ausdruck ansieht, führt eine negative Nullkomponente der Vierergeschwindigkeit  $v$ , relativ zur natürlichen Orientierung der Fermionlinie, zu Propagation in negativer Zeitrichtung.

### 1.3 Übersicht über diese Arbeit

Der Hauptteil dieser Arbeit gliedert sich im einzelnen wie folgt:

- In Kapitel 2 werden die Betrachtungen des vorangegangenen Abschnitts nach einer vorbereitenden Diskussion der sog. Decoupling-Theoreme zur Grundlage einer vollständigen Formulierung der effektiven Theorie für schwere Quarks gemacht.
- Die vorliegende Behandlung der HQET stützt sich auf den bekannten Formalismus der Parameterdarstellung für herkömmliche Theorien. Im Interesse der Vollständigkeit wird dieser in Kapitel 3 soweit benötigt kurz vorgestellt, während einige Herleitungen in die Anhänge verbannt wurden.

- Kapitel 4 enthält die Herleitung graphischer Regeln für die Parameterdarstellung der effektiven Theorie. Diese werden einerseits als formaler Limes der in Kapitel 2 definierten ‘intermediären Theorie’, andererseits auf direktem Wege gewonnen. Die Umformungen in diesem Kapitel werden ohne Beachtung von Existenzfragen vorgenommen.
- In Kapitel 5 wird die formale Diskussion des heavy-quark Limes durch eine Untersuchung des UV-Verhaltens und den Beweis eines Powercounting-Theorems untermauert.
- Kapitel 6 ist der Untersuchung einiger analytischer Eigenschaften der HQET gewidmet, wobei die Singularitäten im Vordergrund stehen, die nur von den Geschwindigkeiten abhängen.
- Nach einer knappen Übersicht über die parametrische Formulierung der BPHZ-Renormierung werden in Kapitel 7 zweckmäßige Renormierungsbedingungen für die intermediäre Theorie gesucht. Aus diesen folgt ein Renormierungsverfahren für die HQET, mit dem sich anschließend die Konvergenz der renormierten Amplituden nachweisen läßt.

Auf die Zusammenfassung der Ergebnisse in Kapitel 8 folgen einige Anhänge:

- Anhang A enthält die Definition der graphentheoretischen Begriffe, die in dieser Arbeit verwendet werden.
- In Anhang B fassen wir die Herleitung der konventionellen Parameterdarstellung zusammen, wobei wiederum formal vorgegangen wird.
- Anhang C ist der Untersuchung der wichtigsten graphentheoretischen Funktionen in einem gegebenen Hepp-Sektor gewidmet.
- In Anhang D werden die Betrachtungen der Kapitel 4-7 anhand einiger expliziter Rechnungen veranschaulicht.

## 1.4 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie für die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. P. Manakos und Dr. H. Anlauf für hilfreiche Anregungen und Diskussionen.





# Kapitel 2

## Die effektive Theorie für schwere Quarks

In diesem Kapitel werden wir zunächst eine Definition der HQET auf der Grundlage individueller Feynman-Graphen angeben und in heuristischer Weise den heavy-quark-Limes in Impuls-Darstellung diskutieren.

### 2.1 Graphische Definition der HQET

#### 2.1.1 Decoupling schwerer Teilchen

Als Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen sei ein beliebiger Feynman-Graph  $\Gamma$  gegeben, dessen (innere) Linien Dirac-Fermionen bzw. Bosonen beschreiben. Letztere können sowohl skalar als auch vektoriell in beliebiger Eichung sein. Ob die Vertices des Graphen von Wechselwirkungen der effektiven Lagrange-dichte (im Sinne Zimmermanns) oder von Operatoreinsetzungen herrühren, ist in diesem Zusammenhang ebenso gleichgültig wie die spezielle Form der Kopplungen (beachte jedoch Anm. 1 in Kap. 4). Der erste Schritt zur Definition des heavy-quark-Limes besteht in einer Zerlegung der Menge  $\mathcal{I}$  der Linien in die Mengen  $\mathcal{I}_L$  bzw.  $\mathcal{I}_S$  der ‘leichten’ bzw. ‘schweren’ Linien. Während die Massen der leichten Linien durch Konstanten  $m_i > 0$  gegeben sind (zur Vermeidung von Infrarot-Problemen werden in der ganzen Arbeit nichtverschwindende Massen der leichten Teilchen vorausgesetzt), setzen wir für die schweren Linien

$$m_i = \lambda m_i^{(0)} \quad \forall i \in \mathcal{I}_S. \quad (2.1)$$

Als Vorbereitung auf die Diskussion der HQET ist es von einigem Interesse, das Verhalten der Feynman-Amplitude  $T_\Gamma$  im derart definierten Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  zu untersuchen. Für konvergente Graphen (bei denen für jeden Subgraphen  $\gamma$  der Divergenzgrad  $\delta_\gamma$ , den wir in Kap. 3 definieren werden, negativ ist) in euklidischer Metrik kann man zeigen [17, 12], daß die betrachtete Amplitude für  $\lambda \rightarrow \infty$  bei

festgehaltenen übrigen Parametern  $(\underline{p}, \underline{m}, \underline{m}^{(0)})$  durch

$$\lambda^{-P} (\ln \lambda)^{L_\Gamma} \text{ mit } P = \min_{\gamma} (-\delta_\gamma) \quad (2.2)$$

multipliziert mit einer Konstanten beschränkt ist. Hierbei ist  $L_\Gamma$  die Anzahl der unabhängigen Schleifen in  $\Gamma$  und das Minimum ist hinsichtlich aller Subgraphen  $\gamma \subset \Gamma$  zu bilden, die alle schweren Linien enthalten. Die Werte  $-\min_{\gamma}(-\delta_\gamma)$  und  $L_\Gamma$  sind als obere Grenzen zu verstehen, da es vorkommen kann, daß sich führende Beiträge gegeneinander wegheben. In jedem Fall folgt aus  $\delta_\gamma < 0$ , daß die Feynman-Amplitude  $F_\Gamma$  im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  verschwindet. Im Grenzfall unendlicher Masse entkoppeln die schweren Felder somit (zumindest in allen Ordnungen der Störungstheorie) von den Prozessen, bei denen sie nicht im Anfangs- oder Endzustand auftreten, weshalb man derartige Aussagen als Decouplingtheoreme bezeichnet. Die spezielle Rolle der Subgraphen  $\gamma$ , die alle schweren Linien enthalten, ist insofern interessant, als uns diese auch im Zusammenhang mit der HQET in Kapitel 4 wieder begegnen werden.

Bei divergenten Graphen muß man sich zunächst auf ein Renormierungsverfahren festlegen, wie z. B. die APZ-Formulierung [35, 36] der BPHZ-Renormierung [29, 30, 31], die den Arbeiten [11, 12] zugrunde liegt. Für die Graphen einer skalaren Theorie (in einer Raumzeit gerader Dimension) ergibt sich damit die Schranke [12]

$$\lambda^{-P} (\ln \lambda)^{L_\Gamma} \text{ mit } P = \max(2, \min_{\gamma} (-\delta_\gamma)). \quad (2.3)$$

Bei Vorliegen von Spin oder Ableitungskopplungen und/oder ungerader Dimension ist die 2 durch 1 zu ersetzen. Während [12] auf einer Mellin-Transformation bzgl.  $\lambda$  basiert, werden in [11] unter Verzicht auf Aussagen über das logarithmische Verhalten lediglich elementare Abschätzungen verwendet.

Die bisher zitierten Ergebnisse sind noch insofern unbefriedigend, als sie unter der Voraussetzung euklidischer Metrik hergeleitet wurden. Da  $T_\Gamma(\underline{p})$  in Minkowski-Metrik nicht für alle Werte der Impulse existiert, kann man Decoupling lediglich im Distributionssinn nachweisen. So kann man zeigen (s. [13] sowie weitere Veröffentlichungen Manoukians), daß, ggf. nach Renormierung, für jede Testfunktion  $f \in \mathcal{S}(R^{A(E-1)})$  gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\Gamma^\lambda(f) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d\underline{p} T_\Gamma^{\lambda, \varepsilon}(\underline{p}) f(\underline{p}) = 0. \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Der heavy-quark-Limes

Kennzeichnend für die im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Decoupling-Theoreme war, daß die Massen einiger innerer Linien bei festgehaltenen äußeren Impulsen gegen unendlich geschickt wurden. Da für die quantenfeldtheoretische Streutheorie nach LSZ die amputierten Greenschen Funktionen auf der Massenschale relevant sind, sind die Decoupling-Theoreme nur auf Prozesse anwendbar, bei denen sich keine schweren Teilchen im Anfangs- oder Endzustand befinden. Um diesen Mangel zu beheben, betrachten wir zunächst einen Graphen, der die Wechselwirkung eines schweren Quarks mit weiteren Teilchen beschreiben möge:

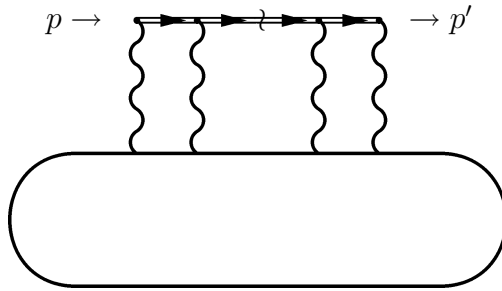


Abbildung 2.1: Feynman-Graph mit schwerer Spur

Der schraffiert gezeichnete Rest des Graphen wird i. d. R. natürlich auch äußere Linien mit dem gesamten einlaufenden Impuls  $p_{Rest}$  besitzen, die an dieser Stelle jedoch nicht von Interesse sind. Die inneren Linien des schweren Quarks haben wir durch Doppellinien dargestellt; eine ununterbrochene Kette schwerer (innerer) Linien werden wir als *schwere Spur* bezeichnen. Gemäß der Argumentation in Kap. 1.2 sollten QED- und QCD-Wechselwirkungen keinen Einfluß auf die Geschwindigkeit des schweren Quarks haben, so daß man allen Linien der entsprechenden schweren Spur die gleiche Geschwindigkeit  $v$  zuordnen kann. Anknüpfend an Kap. 1.2 wird der heavy-quark-Limes nun folgendermaßen definiert: Die Massen aller Linien der schweren Spur sind durch  $m = \lambda m^{(0)}$  gegeben, wobei die Massenskala  $m^{(0)}$  lediglich eingeführt wurde, damit der Skalenparameter  $\lambda$  dimensionslos ist. Für die äußeren Impulse des schweren Quarks setzen wir

$$p = \tilde{p} + mv = \tilde{p} + \lambda m^{(0)} v \quad (2.5)$$

$$p' = \tilde{p}' + mv = \tilde{p}' + \lambda m^{(0)} v \quad (2.6)$$

an, womit die Impulserhaltung  $p - p' + p_{Rest} = 0$  zu  $\tilde{p} - \tilde{p}' + p_{Rest} = 0$  wird. Im Fall eines Antiquarks ist für  $v$  das negative der tatsächlichen Geschwindigkeit einzusetzen. Der heavy-quark-Limes besteht nun im Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$ . Bevor wir diesen näher untersuchen, sind einige Verallgemeinerungen angebracht. Wie

im Fall mehrerer schwerer Spuren zu verfahren ist, liegt auf der Hand. Während alle Linien ein und derselben Spur die gleiche Geschwindigkeit  $v$  und Massenskala  $m^{(0)}$  besitzen, muß dies für verschiedene Spuren nicht gelten. Die Gleichung (1.4) läßt freilich die Vermutung zu, daß die konkrete Wahl der  $m_i^{(0)}$  auf den Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  keinen Einfluß hat, was jedoch zumindest im Fall divergenter Graphen der Überprüfung bedarf.

Während QED und QCD auf masselosen Eichbosonen basieren und lediglich an Ladung und Farbe der Quarks koppeln, verändern schwache Wechselwirkungen deren Identität, namentlich deren Masse, und auch der Rückstoß, den die  $W^\pm/Z^0$ -Bosonen übertragen, ist keinesfalls zu vernachlässigen. Im Rahmen einer Behandlung der schwachen WW mittels einer effektiven Theorie werden schwache Zerfälle durch Operatoreinsetzungen repräsentiert, wie z. B. :

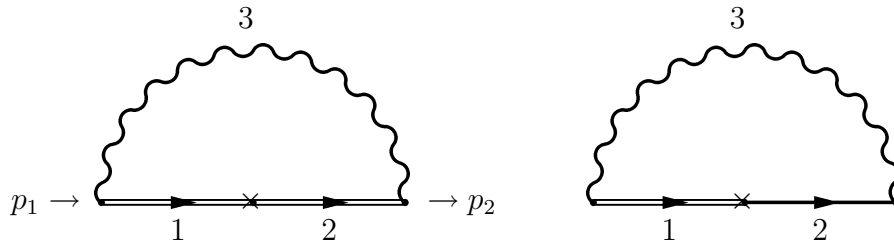


Abbildung 2.2: Durch Operatoreinsetzungen vermittelte schwache Zerfälle

Wenn man im linken Graphen wiederum

$$m_{1,2} = \lambda m_{1,2}^{(0)} \tag{2.7}$$

$$p_{1,2} = \tilde{p}_{1,2} + \lambda m_{1,2}^{(0)} v_{1,2}, \tag{2.8}$$

setzt, muß der im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  unendliche Impulsübertrag  $\lambda(m_2^{(0)} v_2 - m_1^{(0)} v_1)$  von der Operatoreinsetzung geliefert werden (der endliche Anteil  $\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1$  natürlich auch).

Nach dieser Vorbereitung können wir eine allgemeine Vorschrift für die Parametrisierung der harten ( $\sim \lambda$ ) äußeren Impulse angeben, wobei wir von nun an alle Impulse als in den Graphen  $\Gamma$  hineinlaufend definieren:

1. Zerlege die Menge  $\mathcal{I}$  in  $\mathcal{I}_L$  und  $\mathcal{I}_S$ , wobei  $\mathcal{I}_S$  sinnvollerweise nur Fermionlinien enthält.
2. Ordne jeder schweren Linie eine Geschwindigkeit  $v_i^2 = 1$  und eine Massenskala  $m_i^{(0)}$  zu. Für  $i \in \mathcal{I}_L$  gelte  $v_i \equiv 0$ .
3. Setze

$$m_i = \lambda m_i^{(0)} \quad \forall i \in \mathcal{I}_S \tag{2.9}$$

$$p_i = \tilde{p}_i - \lambda \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} m_j^{(0)} v_j \quad \forall i \in \mathcal{V} \tag{2.10}$$

Hierbei bezeichnet  $\epsilon_{ij}$  die Inzidenzmatrix des Graphen  $\Gamma$  (s. Anh. A), so daß

$$\lambda \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} m_j^{(0)} v_j \quad (2.11)$$

die Summe aller am Vertex  $i$  anfallenden harten Impulse ist, die, wenn von null verschieden, von außen ausgeglichen werden muß. Durch diese Vorschrift werden auch Graphen wie der rechte in Abb. 2.2, bei denen der harte Impuls der schweren Linie vollständig von der Operatoreinsetzung absorbiert wird, korrekt behandelt. Wegen  $\sum_i \epsilon_{ij} = 0$  wird die Impulserhaltung  $\sum_i p_i = 0$  zur Bedingung  $\sum_i \tilde{p}_i = 0$  an die Restimpulse  $\tilde{p}$ . Bzgl. Feynman-Amplituden mit der Parametrisierung (2.9-2.10) werden wir von der *intermediären Theorie* sprechen.

Noch nicht diskutiert haben wir Schleifen schwerer Quarks. Auch bei diesen geht die Masse gegen unendlich, jedoch ohne daß dies durch harte äußere Impulse kompensiert wird. Auf diese sind somit die Decouplingtheoreme anwendbar, welche das Verschwinden der betreffenden Amplitude für  $\lambda \rightarrow \infty$  besagen. Die Vermutung, daß dies auch dann gültig bleibt, wenn zusätzlich reale schwere Quarks auftreten, d. h. solche außerhalb von Fermionschleifen, ist so plausibel, daß wir schwere Schleifen von nun an ausschließen werden.

## 2.2 Asymptotische Entwicklungen

Ausgangspunkt unserer Definition des heavy-quark Limes war die Feynman-Amplitude eines Graphen  $\Gamma$  im Rahmen der herkömmlichen Störungstheorie, d. h. als Distribution in den äußeren Impulsen [24] oder als analytische Funktion der invarianten Skalarprodukte [43]. Durch die Parametrisierung (2.9-2.10) wird hieraus eine analytische Funktion der  $\tilde{p}$  und der  $\underline{v}$  bzw. eine Distribution in  $\tilde{p}$  mit den Geschwindigkeiten  $\underline{v}$  als Parametern. Bei der Untersuchung des heavy-quark Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  wird man sich zunächst für das führende asymptotische Verhalten interessieren. Falls dieses  $O(1)$  ist und ein nichttrivialer Grenzwert existiert, ist dieser z. B. im Hinblick auf Analytizität bzgl.  $\tilde{p}$  und  $\underline{v}$  zu untersuchen. Schließlich stellt sich die Frage nach der Existenz einer asymptotischen Entwicklung für große  $\lambda$ .

Ein schon frühzeitig etablierter Ansatz zur Untersuchung asymptotischen Verhaltens in störungstheoretischer Quantenfeldtheorie beruht auf einer direkten Betrachtung der Feynman-Amplituden in Impulsdarstellung. Derartige Methoden erlauben zwar die Bestimmung des führenden Potenz- [14] und logarithmischen [15, 17] Verhaltens sowie den Nachweis der Existenz einer asymptotischen Entwicklung [16] der Form

$$T_\Gamma^\lambda \sim \sum_{nm} \lambda^n \ln^m \lambda T_{\Gamma,n,m}, \quad (2.12)$$

eine explizite Angabe der Koeffizienten dieser Entwicklung ist auf diesem Weg jedoch nicht möglich.

In dieser Hinsicht wesentlich leistungsfähiger sind Verfahren, die ausgehend von einer Parameterdarstellung auf Mellintransformationen basieren [18, 19, 20]. Durch die Ersetzung (2.10) wird das Symanzik-Polynom  $A(\underline{\alpha}, \underline{p})$  (vgl. Kap. 3) zu einem Polynom 2. Grades in  $\lambda$ , so daß eine einfache Mellintransformation bzgl.  $\lambda$  wie in [18] unpraktikabel ist. Für unsere Problemstellung auf den ersten Blick geeignet ist dagegen das leistungsfähigste (für euklidische Metrik) bekannte Schema, die sog. ‘vollständige Mellin-Transformation’ [20]. Diese erlaubt, jedes zu  $A(\underline{\alpha}, \underline{p})$  beitragende invariante Skalarprodukt mit einer eigenen Potenz des Skalenparameters  $\lambda$  zu skalieren. Aber abgesehen davon, daß die Anwendung dieses Verfahrens äußerst aufwendig ist (es erfordert lineare Optimierungen, die nicht analytisch, sondern nur algorithmisch durchführbar sind, bzgl. einer großen Anzahl von Variablen), scheitert seine Anwendung an den Problemen, die sich in Minkowski-Metrik ergeben. Zum einen ist die analytische Fortsetzung in den äußeren Impulsen in der Mellindarstellung schwierig, zum anderen ist für die effektive Theorie, wie schon an (1.4) ersichtlich ist, das Herausfallen gewisser führender Terme essentiell.

Da die Feynman-Amplituden der intermediären Theorie für endliches  $\lambda$  und beliebige  $\underline{v}$  wohldefinierte temperierte Distributionen bzgl. der  $\tilde{p}$  sind, wäre ohnehin eine asymptotische Entwicklung im Distributionssinn, d. h. analog (2.12) mit  $T_\Gamma^\lambda, T_{\Gamma,n,m} \in \mathcal{S}'(R^{4(E-1)})$ , wünschenswert. Dem Verfasser ist allerdings nur eine einzige Untersuchung asymptotischen Verhaltens in Minkowski-Metrik bekannt, die konsequent in diesem Sinne durchgeführt wurde [21], wobei der dort betrachtete Fall ( $m \rightarrow 0$  in der  $\phi_4^4$ -Theorie) erheblich einfacher ist als der uns interessierende. Obwohl es denkbar erscheint, daß die dort verwendeten Methoden, insbesondere Trutes Diagonalisierung von  $A(\underline{\alpha}, \underline{p})/D(\underline{\alpha})$ , auch auf unsere Problemstellung anwendbar sind, werden wir uns bei der Behandlung der effektiven Theorie für schwere Quarks auf den Nachweis der Existenz der effektiven Theorie, d. h. des Limes  $\lambda \rightarrow \infty$ , sowie Analytizitäts- und Renormierungsaspekte beschränken.

## 2.3 Betrachtungen im Impulsraum

Ein direkter Zugang zum Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  ergibt sich aus der Beobachtung, daß die Summe der harten äußeren Impulse über alle Vertices einer schweren Spur per Konstruktion verschwindet. Es ist daher möglich, die inneren Impulse so zu parametrisieren, daß die harten Impulse nur durch die schweren Linien fließen, was auf die Ersetzung der Propagatoren durch

$$\frac{1 + \not{p}_i + \lambda^{-1} \frac{k_i}{m_i^{(0)}}}{2v_i \cdot k_i + \lambda^{-1} \frac{k_i^2}{m_i^{(0)}}} \quad (2.13)$$

führt. Formal kann man den Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  unmittelbar vollziehen, indem man zu den Propagatoren

$$\frac{1 + \not{v}_i}{2} \frac{1}{v_i \cdot k_i} \quad (2.14)$$

übergeht. Das Rechnen mit diesen kann man in feldtheoretischer Weise formalisieren, indem man für jede Geschwindigkeit  $v$ ,  $v^2 = 1$  ein heavy-quark Feld  $\Psi_v$  einführt [8]. Dieser Preis erscheint jedoch recht hoch, zumal nicht klar ist, wie diese im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  aus einem einzigen hervorgehen sollen. Wir werden daher bei den nachfolgenden Betrachtungen auf der Ebene individueller Feynman-Graphen bzw. -Amplituden bleiben und deren Eigenschaften untersuchen, zumal sich hier selbst im Fall UV-konvergenter Amplituden interessante Fragen stellen.

So ist die Konvergenz für  $\lambda \rightarrow \infty$  lediglich für Baumgraphen, bei denen keine Impulsintegrationen vorzunehmen sind, offensichtlich. Bei Graphen mit Schleifen ist dagegen keineswegs klar, ob man den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  mit den Integrationen und dem anschließenden Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  vertauschen kann. Auch die Vermutung, die effektive Theorie, definiert durch den Propagator (2.14), verhalte sich hinsichtlich des power-counting genauso wie die ursprüngliche, verdient eine nähere Untersuchung. Um dies zu verdeutlichen sei auf folgenden Sachverhalt hingewiesen: In der gewöhnlichen Theorie sind Feynman-Amplituden, die nach power-counting endlich sind, im Impulsraum mit Minkowski-Metrik und  $\varepsilon > 0$  keineswegs absolut konvergent [23], da Propagatoren wie

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.15)$$

für  $k \rightarrow \infty$  nicht in allen Richtungen des Impulsraums gleichmäßig abfallen. Wenn man, wie dies in der Renormierungstheorie üblich ist, absolute Konvergenz der Integrale fordert, muß man von Propagatoren der Form

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon(\vec{k}^2 + m^2)} \quad (2.16)$$

ausgehen. Da sich diese durch  $(k_E^2 + m^2)^{-1}$  abschätzen lassen, sind die Aussagen des euklidischen power-counting anwendbar. Wie man weiter zeigt [23], existiert der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  als lorentzkovariante Distribution. Wenn man dagegen von (2.15) ausgeht, Schwinger-Parameter einführt und formal über die Impulse integriert, erhält man, ungeachtet des genannten Problems, eine absolut konvergente Parameterdarstellung, deren  $\varepsilon \rightarrow 0$ -Limes mit dem gemäß obiger Vorschrift konstruierten übereinstimmt [24]. Für praktische Rechnungen, die ohnehin in Parameterdarstellung durchgeführt werden, ist das genannte technische Problem daher irrelevant. In der effektiven Theorie ist dies jedoch nicht der Fall. Wie wir in Kapitel 5 anhand eines Beispiels sehen werden, führt die Verwendung des schweren Propagators (2.14) auf Amplituden, die auch in Parameterdarstellung nicht absolut konvergieren!



Weiterhin könnte das Verhalten des Propagators (2.14) wie  $\|k\|^{-1}$  bei kleinen  $k$  vermuten lassen, daß die effektive Theorie im Infraroten singulärer ist als die gewöhnliche Störungstheorie. Schließlich ist eine Untersuchung der analytischen Eigenschaften von Feynman-Amplituden der HQET bzgl.  $\tilde{p}$  und  $\underline{v}$  von Interesse.

Wie schon bei gewöhnlichen Theorien erweist sich die Verwendung von Parameterdarstellungen zur Betrachtung der genannten Fragen als vorteilhaft, weshalb wir im nächsten Kapitel eine knappe Einführung in diese Methoden geben werden.

# Kapitel 3

## Parameterdarstellungen

In diesem Kapitel sollen im Interesse der Vollständigkeit kurz diejenigen Tatsachen bzgl. der Parameterdarstellung gewöhnlicher Feynman-Amplituden dargelegt werden, auf die wir bei der Diskussion der effektiven Theorie für schwere Quarks zurückgreifen werden.

Um die Anwendung der im folgenden Kapitel erhaltenen Ergebnisse im Rahmen der dimensionalrenormierung der HQET zu erleichtern, werden alle Betrachtungen zur Parameterdarstellung in beliebiger Dimension  $d$  durchgeführt. Bei der Diskussion der Renormierung der intermediären und der effektiven Theorie in Kapitel 7 werden wir uns jedoch auf den BPHZ-Formalismus in vier Dimensionen stützen.

### 3.1 Einführung in die Parameterdarstellung

Gegeben sei ein beliebiger, als zusammenhängend angenommener Feynman-Graph  $\Gamma$ . Ihm wird eine Amplitude der Form

$$T_{\Gamma}^{\varepsilon}(\underline{p}) = \int \prod_{i=1}^I d^d k_i \frac{Q_i(k_i)}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \prod_{j=1}^V \delta^d(p_j + \sum_{l=1}^I \epsilon_{jl} k_l) S_j(\underline{k}, \underline{p}) \quad (3.1)$$

$$= \delta^d\left(\sum_{i=1}^V p_i\right) \tilde{T}_{\Gamma}^{\varepsilon}(\underline{p}) \quad (3.2)$$

zugeordnet<sup>1</sup>. Die Integration erstreckt sich über die Impulse  $k_i$  aller Linien des Graphen, während die Deltafunktionen Impulserhaltung an den Vertices sicherstellen. Die  $Q_i(k_i)$  und  $S_j(\underline{k}, \underline{p})$  sind Polynome in den Impulsen der inneren (und äußeren) Linien, welche von den Spintermen der Propagatoren und den Ableitungskopplungen an den Vertices herrühren. In den nächsten beiden Kapiteln

---

<sup>1</sup>Um aus der angegebenen Amplitude den korrekten Beitrag zur Greenschen Funktion zu erhalten, müssen noch Symmetriefaktoren, Kopplungskonstanten sowie diverse Potenzen von  $i$  und  $4\pi$  hinzugefügt werden, worauf jedoch im folgenden verzichtet wird.

werden wir sie zu  $Z(\underline{k})$  zusammenfassen. Auf die Behandlung der Gammamatrizen, metrischen Tensoren etc. in  $d$  Dimensionen gehen wir an dieser Stelle nicht ein, da sich gegenüber dem bekannten Formalismus für gewöhnliche Theorien (s. z. B. [26]) nichts ändert. Für die übrigen Bezeichnungen und graphentheoretischen Begriffe wie ‘one-trees’ sei auf Anhang A verwiesen.

Man führt nun die übliche Integraldarstellung der Propagatoren

$$\frac{Q(k)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = (-i)Q\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon) + i\xi\cdot k}\Big|_{\xi=0} \quad (3.3)$$

ein und vertauscht die Reihenfolge der  $k$ - und  $\alpha$ -Integrationen (zur Rechtfertigung dieses Schrittes vgl. die Bemerkungen in Kap. 2). Wie in Anhang B.1 gezeigt wird, läßt sich die Integration über die Impulse  $\underline{k}$  ausführen, wodurch sich folgende wohlbekannte Darstellung (s. z. B. [39])

$$\tilde{T}_\Gamma^\varepsilon(\underline{p}) = Q_{I,V}\int_0^\infty\left(\prod_{i=1}^I d\alpha_i e^{-i\alpha_i(m_i^2 - i\varepsilon)}\right)\left\{Z\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)I(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi})\right\}\Big|_{\xi=0} \quad (3.4)$$

$$I(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}) = \frac{1}{D(\underline{\alpha})^{d/2}} \exp i\left[\frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p}')}{D(\underline{\alpha})} - \frac{1}{4}\sum_{m=1}^I \frac{\xi_m^2}{\alpha_m}\right] \quad (3.5)$$

mit den sog. Symanzik-Polynomen [27]

$$D(\underline{\alpha}) = \sum_{T_1} \left(\prod_{i \notin T_1} \alpha_i\right) \quad (3.6)$$

$$A(\underline{\alpha}, \underline{p}') = \sum_{T_2} \left(\prod_{i \notin T_2} \alpha_i\right) \left(\sum_{j \in K_{1/2}} p'_j\right)^2 \quad (3.7)$$

und

$$p'_i = p_i - \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} \frac{\xi_j}{2\alpha_j} \quad (3.8)$$

sowie dem konstanten Faktor  $Q_{I,V}$  ergibt. Summiert wird hierbei über alle one-trees bzw. two-trees des Graphen  $\Gamma$ . Zu jedem dieser Subgraphen ist das Produkt der  $\alpha$ -Parameter derjenigen Linien von  $\Gamma$  zu bilden, die nicht in dem jeweiligen one-(two-)tree enthalten sind. Bei der Bestimmung von  $A(\underline{\alpha}, \underline{p}')$  ist dieses  $\alpha$ -Produkt mit dem Quadrat eines folgendermaßen gebildeten Vierervektors zu multiplizieren. Jeder two-tree besteht aus genau zwei Komponenten und zerlegt so die Menge aller Vertices in zwei disjunkte Teilmengen  $K_1 \cup K_2 = \mathcal{V}(\Gamma)$  (vgl. Anh. A). Der betreffende Vierervektor ergibt sich als Summe der Vektoren  $p'_i$  über eine dieser Komponenten, wobei es wegen der Impulserhaltung ( $\sum_{i=1}^V p'_i = 0$ ) gleichgültig ist, welche man verwendet.

Die Darstellung (3.5) ist noch nicht ideal, da man zunächst die Vektoren  $p'_i$  konstruieren muß, wobei die Inzidenzmatrix explizit eingeht, die man eigentlich

zugunsten anschaulicher Regeln eliminieren wollte. In Anhang B.2 wird die Identität

$$\frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p}')}{D(\underline{\alpha})} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^I \frac{\xi_m^2}{\alpha_m} = \frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p}) + B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}) + K(\underline{\alpha}, \underline{\xi})}{D(\underline{\alpha})} \quad (3.9)$$

mit den expliziten Regeln

$$B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}) = \sum_{i=1}^I \xi_i \cdot \sum_{\substack{T_1 \\ i \in T_1}} \left( \prod_{j \notin T_1} \alpha_j \right) \left( \sum_{\substack{\rightarrow \\ i}} p \right) \quad (3.10)$$

$$K(\underline{\alpha}, \underline{\xi}) = -\frac{1}{4} \sum_L \left( \sum_k \eta_{kL} \xi_k \right)^2 \sum_{PT \supset L} \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right) \quad (3.11)$$

bewiesen. In (3.10) wird summiert über alle Linien  $i$  und alle one-trees, die die Linie  $i$  enthalten.  $\sum_{\substack{\rightarrow \\ i}} p$  steht für die partielle Summe äußerer Impulse, die im Baumgraph  $T_1$  durch die Linie  $i$  fließt. In (3.11) erstrecken sich die Summen über alle Schleifen  $L$  bzw. alle Pseudotrees, die die Schleife  $L$  enthalten und  $(\sum_k \eta_{kL} \xi_k)^2$  ist die orientierte Summe der  $\xi_k$ -Vektoren aller Linien der Schleife  $L$ .

Die Symanzik-Polynome  $D$  und  $A$  sowie die Spinpolynome  $B$  und  $K$  sind allein durch die Topologie des Graphen bestimmt und somit unabhängig von der Parametrisierung der Linienimpulse durch unabhängige Schleifenimpulse. Sie sind offensichtlich homogene Funktionen der  $\alpha$ -Parameter. So haben  $D(\underline{\alpha})$  und  $B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi})$  den Grad  $I - (V - 1) = L$ ,  $A(\underline{\alpha}, \underline{p})$  den Grad  $I - (V - 2) = L + 1$  und  $K(\underline{\alpha}, \underline{\xi})$  den Grad  $I - V = L - 1$ .

Diese und einige weitere Eigenschaften bedingen die Überlegenheit der Parameterdarstellung gegenüber der Impulsraumformulierung. Dies gilt insbesondere für die Renormierung, da sich aus den oben genannten Gründen die Auswahl einer zulässigen Wahl [31] der unabhängigen Variablen erübrigt. Noch wichtiger ist die Tatsache, daß man die Renormierung in der Parameterdarstellung durch einen R-Operator bewerkstelligen kann, der direkt auf den  $\alpha$ -Integranden wirkt und völlig unabhängig von der Topologie des Graphen ist (von der Anzahl der Linien abgesehen) [33, 34]. Renormierungsfragen werden jedoch erst in Kapitel 7 behandelt.

Im Hinblick auf die Untersuchung der analytischen Eigenschaften von Feynman-Amplituden seien noch zwei zu (3.7) bzw. (3.10) äquivalente Darstellungen angegeben, auf deren Beweis [39] wir hier verzichten.

$$A(\underline{p}, \underline{\alpha}) = D(\underline{\alpha}) \sum_{i=1}^I \alpha_i q_i^2 - \sum_{L \in \mathcal{L}} D_{\Gamma \setminus L}(\underline{\alpha}) \left( \sum_j \eta_{jL} \alpha_j q_j \right)^2 \quad (3.12)$$

$$B_i(\underline{p}, \underline{\alpha}) = D(\underline{\alpha}) q_i - \sum_{L \in \mathcal{L}} D_{\Gamma \setminus L}(\underline{\alpha}) \eta_{iL} \left( \sum_j \eta_{jL} \alpha_j q_j \right). \quad (3.13)$$

Hier ist  $\underline{q}$  eine beliebiger Satz innerer Impulse, der die Impulserhaltung

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \epsilon_{ji} q_i + p_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{V} \quad (3.14)$$

erfüllt.

## 3.2 Power-Counting

Wir beginnen, indem wir jedem (durch seine Linien  $\mathcal{I}_\gamma$  definierten) Subgraph  $\gamma$  den Divergenzgrad

$$\delta_\gamma \equiv dL(\gamma) - 2I(\gamma) + D(\gamma) \quad (3.15)$$

zuordnen, wobei  $D(\gamma)$  der Grad des Beitrags zum Spinpolynom  $Z(\underline{k})$  ist, der von den Linien und Vertices in  $\gamma$  herrührt. Hierbei spielt es keine Rolle, ob alle an einem Vertex in  $\gamma$  endenden Linien tatsächlich in  $\gamma$  liegen. Als endlich gemäß Power-Counting wird ein Graph  $\Gamma$  bezeichnet, wenn gilt :

$$\delta_\gamma < 0 \quad \forall \gamma \subset \Gamma. \quad (3.16)$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Erfüllung dieser Power-Counting-Bedingung hinreichend für die absolute Konvergenz von Feynman-Amplituden  $T_\Gamma^\varepsilon$  gemäß der Darstellung (3.4) ist [44]. (Notwendig ist sie nicht in allen Fällen. Die Zugrundelegung dieser Definition des Divergenzgrades  $\delta_\gamma$  führt bei der Renormierung auf die sog. ‘isotropen Normalprodukte’ [31, 34].)

Durch Anwenden des Differentialoperators  $Z(\partial/\partial\xi)$  und anschließendes Nullsetzen der  $\underline{\xi}$  ergibt sich ein Polynom in  $\frac{B_i(\underline{\alpha}, \underline{p})}{D(\underline{\alpha})}$  und  $\frac{K_{ij}(\underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})}$  (definiert durch  $B_i = \sum_j \xi_j \cdot B_{ij}$ ,  $K = \sum_{i,j} K_{ij} \xi_i \cdot \xi_j$ ) und somit eine rationale Funktion in  $\underline{\alpha}$  und  $\underline{p}$ .  $\tilde{T}_\Gamma^\varepsilon$  läßt sich daher als Linearkombination von Integralen folgenden Typs darstellen (die Lorentz-Indices der B’s weglassend):

$$\int_0^\infty \left( \prod_{i=1}^I d\alpha_i e^{-i\alpha_i(m_i^2 - i\varepsilon)} \right) D(\underline{\alpha})^{-d/2} \frac{B_{u_1}(\underline{\alpha}, \underline{p})}{D(\underline{\alpha})} \dots \frac{B_{u_F}(\underline{\alpha}, \underline{p})}{D(\underline{\alpha})} \frac{K_{v_1 w_1}(\underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} \dots \frac{K_{v_G w_G}(\underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} \exp i \frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p})}{D(\underline{\alpha})}. \quad (3.17)$$

Wir untersuchen zunächst die lokale Integrierbarkeit dieses Ausdrucks, wobei mögliche Schwierigkeiten offensichtlich nur von den Nullstellen der Funktion  $D(\underline{\alpha})$  herrühren können. Anhand der Definition

$$D(\underline{\alpha}) = \sum_{T_1} \left( \prod_{i \notin T_1} \alpha_i \right) \quad (3.18)$$

sieht man, daß  $D(\underline{\alpha})$  eine Summe von im Integrationsgebiet  $\overline{G} = \{\underline{\alpha} | \alpha_i \geq 0\}$  nichtnegativen Termen ist, so daß  $D(\underline{\alpha}) > 0$ , sofern alle  $\alpha_i > 0$ .  $D(\underline{\alpha})$  verschwindet daher nur, wenn  $\alpha_i = 0$  für alle  $i$  oder bestimmte Teilmengen aus  $\mathcal{I}$ , d. h. an der unteren Integrationsgrenze. Weiterhin sieht man anhand von

$$B_i(\underline{\alpha}, \underline{p}) = \sum_{\substack{T_1 \\ i \in T_1}} \left( \prod_{j \notin T_1} \alpha_j \right) \left( \sum_{\substack{i \\ \downarrow}} p \right) \quad \text{und} \quad \frac{\prod_{j \notin T_1} \alpha_j}{\sum_{T_1} \left( \prod_{k \notin T_1} \alpha_k \right)} \leq 1 \quad (3.19)$$

sofort ein, daß

$$\left\| \frac{B_i}{D} \right\| \leq \sum_{\substack{T_1 \\ i \in T_1}} \left\| \sum_{\substack{i \\ \rightarrow}} p \right\| \quad (3.20)$$

gilt, daß  $\frac{B_i}{D}$  also im ganzen Integrationsgebiet stetig und beschränkt ist. Da es (bei zusammenhängendem Graphen  $\Gamma$ ) zu jedem two-tree mindestens einen one-tree gibt, aus dem dieser durch Entfernen einer Linie hervorgeht, sieht man auf analoge Weise, daß  $\frac{A}{D}$  in  $\overline{G}$  stetig und durch  $C \|\underline{\alpha}\|_\infty$  mit  $C > 0$  beschränkt ist.

Eine entsprechende Aussage gilt für  $\frac{K_{ij}}{D}$  nicht, wie schon anhand eines 1-Schleifen-Graphen deutlich wird, da für diesen gilt:  $\frac{K_{ij}}{D} \sim \frac{1}{\sum \alpha}$ . In Abschnitt 5.2 werden wir die Singularitäten ähnlicher Funktionen ausführlich untersuchen. Für die Zwecke dieses Abschnitts ist die Beobachtung ausreichend, daß  $\frac{\alpha_i K_{ij}}{D}$  und  $\frac{\alpha_j K_{ij}}{D}$  (keine Summation) auf  $\overline{G}$  stetig und beschränkt sind, wie wir im folgenden zeigen wollen. So wie jeder Pseudo-tree durch Entfernen einer in seiner Schleife enthaltenen Linie  $k$  zu einem one-tree wird, wird sein  $\alpha$ -Produkt ( $\prod_{i \notin PT} \alpha_i$ ) durch Multiplikation mit  $\alpha_k$  zu dem  $\alpha$ -Produkt eines one-trees. Da zur Bestimmung von  $K_{ij}$  über alle Pseudo-trees zu summieren ist, die die Linie  $i$  und  $j$  enthalten, führt die Multiplikation mit  $\alpha_i$  oder  $\alpha_j$  auf eine Summe von one-tree- $\alpha$ -Produkten. Von hier ab verläuft die Argumentation wie bei  $\frac{B_i}{D}$ .

Bevor wir Aussagen über die absolute Konvergenz von (3.17) machen können, ist eine genauere Kenntnis der Mannigfaltigkeit, auf der  $D(\underline{\alpha})$  verschwindet, sowie des Verhaltens in deren Umgebung erforderlich<sup>2</sup>. Zu diesem Zweck zerlegen wir das Integrationsgebiet in die  $I!$  ‘Hepp-Sektoren’ [30]<sup>3</sup>

$$0 \leq \alpha_{\pi(1)} \leq \alpha_{\pi(2)} \leq \dots \leq \alpha_{\pi(I)} < \infty, \quad (3.21)$$

wobei  $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(I))$  eine Permutation von  $(1, 2, \dots, I)$  ist, d. h.  $\pi \in S_I$ . Von nun an konzentrieren wir uns auf einen bestimmten Sektor und führen neue Variablen  $(t_1, \dots, t_I)$  ein:

$$\alpha_{\pi(i)} = \prod_{j=i}^I t_j^2 \quad (3.22)$$

$$0 \leq t_I < \infty \quad (3.23)$$

$$0 \leq t_i \leq 1 \quad , i \leq I - 1. \quad (3.24)$$

Mit den Subgraphen  $\Gamma_i$ , die durch die Linien

$$\mathcal{I}_{\Gamma_i} = \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(i)\} \quad (3.25)$$

<sup>2</sup>Den zugrundeliegenden begrifflichen Rahmen liefert die Theorie der ‘resolution of singularities’, auf die wir jedoch nicht zurückgreifen werden.

<sup>3</sup>Eleganter ist die Zerlegung in sog. ‘labeled singularity families’ [40], die v. a. im Rahmen der analytischen und dimensionalrenormierung Anwendung findet.

aufgespannt werden, ist dies äquivalent zu

$$\alpha_i = \prod_{l=\pi^{-1}(i)}^I t_l^2 = \prod_{\substack{l=1 \\ i \in \mathcal{I}_{\Gamma_l}}}^I t_l^2. \quad (3.26)$$

In Verbindung mit unserer Aussage über  $\frac{K_{ij}}{D}$  folgen hieraus Stetigkeit und Beschränktheit von

$$\prod_{\substack{l=1 \\ i, j \in \mathcal{I}_{\Gamma_l}}}^I t_l \frac{K_{ij}(\underline{t})}{D(\underline{t})}. \quad (3.27)$$

Die Funktionaldeterminante der Transformation (3.22) ist für alle Sektoren gleich und beträgt

$$\frac{\partial(\underline{\alpha})}{\partial(\underline{t})} = 2^I \prod_{i=1}^I t_i^{2i-1}. \quad (3.28)$$

Die Zweckmäßigkeit dieser Transformation ergibt sich aus folgendem

**Lemma 1**  $D(\underline{t}) = \prod_{i=1}^I t_i^{2L(\Gamma_i)} \tilde{D}(\underline{t})$ .

$\tilde{D}(\underline{t})$  ist ein Polynom in den Variablen  $t_1$  bis  $t_{I-1}$ , welches im (kompakten) Gebiet  $0 \leq t_i \leq 1, i \leq I-1$  nicht verschwindet.

Einen Beweis dieses Lemmas geben wir in Anhang C.1.

Bei der Untersuchung der absoluten Konvergenz von (3.17) können die Faktoren  $\frac{B_i}{D}$  und  $\exp i \frac{A}{D}$  ignoriert sowie  $\frac{K_{ij}}{D}$  durch  $(\prod_{\substack{l=1 \\ i, j \in \mathcal{I}_{\Gamma_l}}}^I t_l)^{-2}$  abgeschätzt werden.

Die  $t_I$ -Integration schneiden wir zunächst bei  $C$  ab. Hinreichend für die absolute Konvergenz von

$$\int_0^C dt_I \int_0^1 dt_1 \dots dt_{I-1} \prod_{i=1}^I t_i^{2i-1-dL(\Gamma_i)-2K(\Gamma_i)}, \quad (3.29)$$

ist unter Berücksichtigung von  $i = I(\Gamma_i)$  die Bedingung

$$2I(\Gamma_i) - dL(\Gamma_i) - 2K(\Gamma_i) > 0 \quad \forall i. \quad (3.30)$$

$K(\Gamma_i)$  bezeichnet hierbei die Anzahl der Faktoren  $\frac{K_{ij}}{D}$ , deren beide Indices  $i$  und  $j$  in  $\mathcal{I}_{\Gamma_i}$  enthalten sind. Da zur Erzeugung eines solchen Faktors zwei Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial \xi}$  erforderlich sind, gilt

$$D(\Gamma_i) \geq 2K(\Gamma_i), \quad (3.31)$$

so daß die Bedingung (3.30) a fortiori in allen Sektoren und für alle  $i$  erfüllt ist, wenn für jeden Subgraphen  $\delta_\gamma < 0$  gilt. Da das Integral (3.29) als Funktion von  $C$  offensichtlich polynomial beschränkt ist, garantiert der Faktor

$$e^{-\varepsilon \sum_{i=1}^I \alpha_i} = e^{-\varepsilon t_{I_L} (1 + \sum_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^{I-1} t_j)} \quad (3.32)$$

die absolute Konvergenz von (3.29) mit  $C = \infty$  und somit von (3.17). Hiermit ist das ‘naive’ Potenz-Zählen im Rahmen konventioneller Theorien gerechtfertigt.

### 3.3 Analytische Eigenschaften

Zur expliziten Berechnung von (3.17) und Untersuchung des Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  macht man von der Homogenität aller Bestandteile von (3.17) bzgl.  $\underline{\alpha}$  Gebrauch, indem man neue Variablen einführt

$$\alpha_i = X \tilde{\alpha}_i, \quad 0 \leq X < \infty \quad (3.33)$$

$$\tilde{\underline{\alpha}} \in \Delta = \{\tilde{\underline{\alpha}} \mid \tilde{\alpha}_i \geq 0 \wedge \sum \tilde{\alpha}_i = 1\} \quad (3.34)$$

und über  $X$  integriert

$$\begin{aligned} & \Gamma(I - Ld/2 - G) i^{I-Ld/2-G} \int_{\Delta} D(\underline{\alpha})^{-d/2} \frac{B_{u_1}(\underline{\alpha}, \underline{p})}{D(\underline{\alpha})} \dots \frac{B_{u_F}(\underline{\alpha}, \underline{p})}{D(\underline{\alpha})} \\ & \frac{K_{v_1 w_1}(\underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} \dots \frac{K_{v_G w_G}(\underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} \left[ \frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p})}{D(\underline{\alpha})} - \sum \alpha_i m_i^2 + i\varepsilon \right]^{-(I-Ld/2-G)}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

wobei wir anstelle von  $\tilde{\alpha}$  wieder  $\alpha$  geschrieben haben. Für  $\underline{p} \in R^{4(E-1)}$  derart daß  $Q = \frac{A}{D} - \sum \alpha_i m_i^2$  auf  $\Delta$  negativ definit ist, kann man  $\varepsilon$  unmittelbar nullsetzen und erhält eine analytische Funktion der  $\underline{p}$ . Für andere Impulse setzt man (3.35) analytisch fort, indem man die Nullstellen von  $Q$  durch Deformation der Integrationskontouren umgeht, wobei die  $+i\varepsilon$ -Vorschrift angibt, in welcher Weise dies zu geschehen hat. Dies scheitert, wenn (vage formuliert) die Hyperkontour von den Nullmannigfaltigkeiten von  $Q$  ‘eingeklemmt’ wird (‘pinch’) oder eine Nullstelle auf dem Rand des Integrationsgebietes liegt (‘endpoint’). Notwendig für das Vorliegen einer solchen ‘Landau-Singularität’ [41, 42] bei den äußeren Impulsen  $\underline{p}$  ist die Existenz einer Lösung  $\underline{\alpha}$  der Landau-Gleichungen

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}^0 \subset \mathcal{I} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} Q(\underline{\alpha}, \underline{p}) = 0 \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I} - \mathcal{I}^0. \quad (3.37)$$

(Wegen der Homogenität von  $Q$  folgt hieraus  $Q = 0$ . Die Bedingung  $\sum \alpha_i = 1$  kann man fallenlassen, sofern man die triviale Lösung  $\alpha_i \equiv 0$  ausschließt.) Eine mathematisch befriedigende Herleitung der Landau-Gleichungen und eine Untersuchung der Riemannschen Mannigfaltigkeit erfordert homologische Methoden, auf die wir hier nicht eingehen können (s. [43] und dortige Referenzen). Überschaubarer sind dagegen die reellen Singularitäten auf dem physikalischen Blatt, da für diese die Landau-Gleichungen (3.36, 3.37) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind, sofern man sie durch die zusätzliche Forderung ergänzt, daß alle  $\alpha_i$  reell und nichtnegativ sein müssen. Dies läßt sich auf relativ elementare Weise durch explizite Angabe einer Vorschrift für die analytische Fortsetzung zeigen [25].

Die Lösung, bei der kein  $\alpha_i$  verschwindet, bezeichnet man als führende Singularität. Da die Funktion  $Q$  bei Nullsetzen der Parameter  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathcal{I}^0$  zu der des



Graphen  $\tilde{\Gamma}$  wird, der aus  $\Gamma$  durch Kontraktion der Linien in  $\mathcal{I}_0$  hervorgeht, sind die nichtführenden Singularitäten nichts anderes als die führenden Singularitäten der kontrahierten Graphen. Hierbei muß der Graph  $\Gamma$  bei Zerschneiden der Linien in  $\tilde{\mathcal{I}}$  in mindestens zwei Komponenten zerfallen, da andernfalls  $A/D$  verschwindet und somit keine Lösung der Gleichung (3.37) existiert. Unter den Mengen  $\tilde{\mathcal{I}}$ , die diese Bedingung erfüllen, bezeichnet man die minimalen als Zwischenzustände. Bei diesen bleibt der Graph zusammenhängend, wenn man nur eine Linie aus  $\tilde{\mathcal{I}}$  nicht zerschneidet. Die zugeordneten Singularitäten, die normalen Schwellen, treten auf bei

$$P^2 = \left( \sum_{i \in \tilde{\mathcal{I}}} m_i \right)^2, \quad (3.38)$$

wobei  $P$  die Summe der äußeren Impulse einer der beiden Komponenten von  $\mathcal{I}^0$  ist.

Bei der Untersuchung der Landau-Flächen erweist sich häufig eine Darstellung der Landau-Gleichungen als zweckmäßiger, die neben den Parametern  $\underline{\alpha}$  auch die Impulse  $\underline{k}$  der inneren Linien enthält. Eine solche stellt das Gleichungssystem

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \epsilon_{ji} k_i + p_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{V} \quad (3.39)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \eta_{il} \alpha_i k_i = 0 \quad \forall l \in \mathcal{L} \quad (3.40)$$

$$\alpha_i (k_i^2 - m_i^2) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (3.41)$$

dar. Die Gleichungen (3.39, 3.40), von denen maximal  $(V - C) + (I - V + C) = I$  linear unabhängig sind, stellen bei gegebenen  $(\underline{p}, \underline{\alpha})$  ein lineares Gleichungssystem für die  $I$  Impulse  $\underline{k}$  dar. Da der Betrag der Determinante dieses Systems gleich  $D(\underline{\alpha})$  ist [39, Theorem 3–11], besitzt es für  $\prod_i \alpha_i > 0$  eine eindeutige Lösung. Wie aus Gl. (3.13) unmittelbar hervorgeht, ist diese durch

$$k_i(\underline{\alpha}, \underline{p}) = \frac{B_i(\underline{p}, \underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} \quad (3.42)$$

gegeben, woraus mit (3.12) unmittelbar

$$\frac{A}{D} = \sum_i \alpha_i \left( \frac{B_i}{D} \right)^2 \quad (3.43)$$

folgt. Weiterhin kann man zeigen [39, Theorem 9–5], daß

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = \left( \frac{B_i}{D} \right)^2 - m_i^2 \quad (3.44)$$

gilt, woraus schließlich hervorgeht, daß (3.41) zu (3.37) äquivalent ist.

Die nichtführenden Singularitäten kann man auf die Betrachtung ihrer kontrahierten Graphen zurückführen, sie lassen sich jedoch auch im Rahmen des

vollen Gleichungssystems (3.39-3.41) verstehen. Wenn die Menge  $\mathcal{I}^0$  mindestens eine Schleife enthält, ist  $D(\underline{\alpha}) = 0$ , worin zum Ausdruck kommt, daß die Impulse  $\underline{k}$  nicht eindeutig durch  $(\underline{p}, \underline{\alpha})$  bestimmt sind. So kann man bei einer Schleife, für die die Parameter aller ihrer Linien verschwinden, zu den Impulsen aller Linien den gleichen Betrag  $K$  addieren, ohne daß sich dies in den Gleichungen (3.39, 3.40) widerspiegelt. Diese Unbestimmtheit spielt jedoch keine Rolle, da die Gleichungen (3.41) für diese Linien automatisch erfüllt sind.

Abschließend sei bemerkt, daß man das Gleichungssystem (3.39-3.41) auch auf direktem Weg, d. h. ohne graphentheoretischen Formalismus, aus der gemischten Darstellung

$$\int \prod_{i=1}^I d^d k_i \int_0^\infty \prod_{j=1}^I d\alpha_j \frac{\delta(1 - \sum_n \alpha_n) \prod_{l=1}^V \delta^d(p_l + \sum_m \epsilon_{lm} k_m)}{\sum_r \alpha_r (k_r^2 - m_r^2)} \quad (3.45)$$

erhalten kann. Die Gleichung (3.40) ist dann nichts anderes als die Bedingung für einen Pinch bzgl. aller unabhängigen Impulse  $\underline{k}$  nach Berücksichtigung der Impulserhaltung (3.39), während (3.41) Pinches oder Endpunkte in den Parametern  $\underline{\alpha}$  fordert.



# Kapitel 4

## Formale Betrachtung der effektiven Theorie

In diesem Kapitel sollen, ausgehend von der in Kapitel 3 vorgestellten Parameterdarstellung die formalen Aspekte des Heavy-Quark-Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  betrachtet werden, was zu graphischen Regeln für die Feynman-Amplituden der HQET führen wird. Über ihre rechentechnische Zweckmäßigkeit hinaus werden sich diese bei der Untersuchung der UV-Konvergenz und der analytischen Eigenschaften der effektiven Theorie als nützlich erweisen.

### 4.1 Intermediäre Theorie in Parameterdarstellung

Der Übergang zur intermediären Theorie gemäß Kapitel 2 besteht in den Ersetzungen

$$m_i = \lambda m_i^{(0)} \quad \forall i \in \mathcal{I}_S \quad (4.1)$$

$$p_i = \tilde{p}_i - \lambda \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} m_j^{(0)} v_j \quad \forall i \in \mathcal{V}. \quad (4.2)$$

Dadurch wird (3.8) zu

$$p'_i = \tilde{p}_i - \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} \frac{\xi'_j}{2\alpha_j} \quad (4.3)$$

mit

$$\xi'_j = \xi_j + \lambda 2\alpha_j m_j^{(0)} v_j. \quad (4.4)$$

Mit

$$-\frac{1}{4} \frac{\xi_m^2}{\alpha_m} = -\frac{1}{4} \frac{\xi_m'^2}{\alpha_m} + \lambda^2 \alpha_m m_j^{(0)2} v_j^2 + \lambda m_j^{(0)} v_j \cdot \xi_j \quad (4.5)$$

ergibt sich anstelle von Gleichung (3.5)

$$I(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{v}, \underline{\xi}) = \frac{1}{D(\underline{\alpha})^{d/2}} \exp i \left[ \sum_{j=1}^I \lambda^2 \alpha_j m_j^{(0)2} v_j^2 + \sum_{j=1}^I \lambda m_j^{(0)} v_j \cdot \xi_j \right. \\ \left. + \frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p}')}{D(\underline{\alpha})} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^I \frac{\xi_m^2}{\alpha_m} \right]. \quad (4.6)$$

Der erste Term im Exponenten hebt sich gerade gegen den Beitrag der schweren Massen in (3.4) heraus. Unter Beachtung von

$$1 - \frac{\sum_{PT, i \in PT} (\prod_{j \notin PT} \alpha_j) \alpha_i}{D(\underline{\alpha})} = \frac{\sum_{T1, i \in T1} (\prod_{j \notin T1} \alpha_j)}{D(\underline{\alpha})} \quad (4.7)$$

erhält man durch Zusammensetzen der bisherigen Resultate

$$\tilde{T}_\Gamma^{\varepsilon, \lambda}(\underline{\tilde{p}}) = Q_{I, V} \int_0^\infty \prod_{i=1}^I d\alpha_i \left\{ Z\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}}\right) \exp i \frac{B_\xi(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}, \underline{v}, \underline{\xi}) + K_{\xi\xi}(\underline{\alpha}, \underline{\xi})}{D(\underline{\alpha})} \right\}_{\underline{\xi}=0} \\ \frac{1}{D(\underline{\alpha})^{d/2}} \exp i \left[ \frac{A(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}) + B_v(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}, \underline{v}) + K_{vv}(\underline{\alpha}, \underline{v})}{D(\underline{\alpha})} - \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i m_i^2 \right] \quad (4.8)$$

mit

$$D(\underline{\alpha}) = \sum_{T1} \left( \prod_{i \notin T1} \alpha_i \right) \quad (4.9)$$

$$A(\underline{\alpha}) = \sum_{T2} \left( \prod_{i \notin T2} \alpha_i \right) \left( \sum_{j \in K1/2} \tilde{p}_j \right)^2 \quad (4.10)$$

$$B_v(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^I 2\alpha_i \lambda m_i^{(0)} v_i \cdot \sum_{\substack{T1 \\ i \in T1}} \left( \prod_{j \notin T1} \alpha_j \right) \left( \sum_{\substack{\tilde{p} \\ \tilde{p}_i}} \right) \quad (4.11)$$

$$K_{vv}(\underline{\alpha}, \underline{v}) = - \sum_L \left( \sum_j \eta_{jL} \alpha_j \lambda m_j^{(0)} v_j \right)^2 \sum_{PT \supset L} \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right) \quad (4.12)$$

$$B_\xi(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}, \underline{v}, \underline{\xi}) = \sum_{i=1}^I \xi_i \cdot B_{\xi, i} \\ = \sum_{i=1}^I \xi_i \cdot \left[ \sum_{\substack{T1 \\ i \in T1}} \left( \prod_{j \notin T1} \alpha_j \right) (\lambda m_i^{(0)} v_i + \sum_{\substack{\tilde{p} \\ \tilde{p}_i}} \right) \right. \\ \left. - \sum_{\substack{L \\ i \in L}} \left( \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \eta_{jL} \alpha_j \lambda m_j^{(0)} v_j \right) \sum_{PT \supset L} \left( \prod_{k \notin PT} \alpha_k \right) \right] \quad (4.13)$$

$$K_{\xi\xi}(\underline{\alpha}, \underline{\xi}) = -\frac{1}{4} \sum_L \left( \sum_j \eta_{jL} \xi_j \right)^2 \sum_{PT \supset L} \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right). \quad (4.14)$$

Wenn man alle Geschwindigkeiten  $v_i$  gleich null setzt, verschwinden  $B_v$ ,  $K_{vv}$  und der pseudo-tree Beitrag zu  $B_\xi$ , so daß sich wieder die herkömmliche Darstellung ergibt.

Im Rahmen der formalen Betrachtungen dieses Kapitels ignorieren wir den Faktor  $e^{-\sum_i \alpha_i}$  sowie die Frage, inwieweit die Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\lambda \rightarrow \infty$  vertauscht werden können. In diesem Sinne wollen wir zunächst die Darstellung (4.8-4.14) in eine Form bringen, die es zuläßt, den Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  im Integranden zu vollziehen. Ein Blick auf die Gleichungen (4.11-4.13) zeigt, daß der Skalenparameter  $\lambda$  fast überall, wo er auftritt, von einem schweren  $\alpha$ -Parameter begleitet wird. Daher nehmen wir für die schweren Linien folgende Substitution vor:

$$\alpha_i \rightarrow \lambda^{-1} \alpha_i \quad \forall i \in \mathcal{I}_S. \quad (4.15)$$

Infolge dieses Schrittes verschwinden die ‘großen’ Faktoren  $\lambda$  zugunsten ‘kleiner’ negativer Potenzen von  $\lambda$ .

Diese Maßnahme erweist sich auch im Hinblick auf die Betrachtung der Landau-Singularitäten in der Parameterdarstellung als zweckmäßig. Dies wird schon anhand der normalen Schwellen (s. z. B. [42]) deutlich. Für die von null verschiedenen  $\alpha$ -Parameter gilt an der Singularität

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{m_j}{m_i}. \quad (4.16)$$

Bei Zwischenzuständen, die sowohl schwere als auch leichte Linien enthalten, wird die Singularität gegen den ‘Rand’ des Integrationsgebietes  $\{\underline{\alpha} | \alpha_i \geq 0, i \in \mathcal{I}\}$  wandern, was die Analyse der analytischen Eigenschaften im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  erheblich erschwert. Durch obige Substitution wird erreicht, daß die Singularität im Raum derjenigen  $\alpha$ -Parameter, die nicht von vornherein null sind (endpoints), gegen einen inneren Punkt konvergiert.

Zunächst werden alle Faktoren der Form  $(\prod_{i \notin \gamma} \alpha_i)$  mit  $\lambda^{-X(\gamma)}$  multipliziert, wobei  $X(\gamma)$  die Anzahl der schweren Linien bezeichnet, die nicht im Subgraphen  $\gamma$  enthalten sind. Damit gilt z. B.

$$D(\underline{\alpha}) = \sum_{T_1} \left( \prod_{i \notin T_1} \alpha_i \right) \rightarrow D^\lambda(\underline{\alpha}) = \sum_{T_1} \left( \prod_{i \notin T_1} \alpha_i \right) \lambda^{-X(T_1)}. \quad (4.17)$$

Die Ausdrücke  $\alpha_j \lambda m_j^{(0)} v_j$  werden zu  $\alpha_j m_j^{(0)} v_j$ , so daß der ‘große’ Parameter  $\lambda$  nur im Faktor  $\lambda m_i^{(0)} v_i$  in Gleichung (4.13) unkompensiert auftritt. Für  $i \in \mathcal{I}_S$  gilt somit  $B_{\xi,i} = O(\lambda)$ , während alle anderen graphischen Funktionen von der Ordnung  $O(1)$  sind. Aufgrund der Definition der effektiven Theorie in Kapitel 1.2 ist klar, daß jede schwere Fermion-Linie einen Faktor  $(\lambda m_i^{(0)} + \not{k}_i)$  zu der Spinfunktion  $Z(\underline{k})$  beiträgt, so daß der Differentialoperator  $Z(\partial/\partial \underline{\xi})$  (abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren,  $\gamma$ -Matrizen etc.) die Form

$$Z\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}}\right) = \prod_{j \in \mathcal{I}_S} \left( \lambda m_j^{(0)} + \frac{1}{i} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \xi_j^\mu} \right) Z_L\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}}\right) \quad (4.18)$$

hat.  $Z_L$  enthält die Spinfaktoren der leichten Linien sowie Ableitungskopplungen. Die Beiträge zu

$$\left\{ Z \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \right) \exp i \frac{B_\xi^\lambda + K_{\xi\xi}^\lambda}{D^\lambda} \right\}_{|\underline{\xi}=0} \quad (4.19)$$

mit der höchsten Ordnung in  $\lambda$  sind offensichtlich diejenigen, die entstehen, wenn man alle schweren Differentiationen in (4.18) auf  $B_\xi^\lambda$  anwendet und somit durch

$$\prod_{j \in \mathcal{I}_S} \left( \lambda m_j^{(0)} + \frac{B_{\xi,j}^\lambda}{D^\lambda} \right) \left\{ Z_L \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \right) \exp i \frac{B_\xi^\lambda + K_{\xi\xi}^\lambda}{D^\lambda} \right\}_{|\underline{\xi}=0} \quad (4.20)$$

gegeben. Aus diesen läßt sich ein Faktor  $\lambda^{I_S}$  herausziehen, der die Funktional-Determinante  $\lambda^{-I_S}$  exakt kompensiert<sup>1</sup>. Dagegen sind alle Terme in (4.19), die mindestens einen Faktor  $K_{\xi\xi,ij}$  mit  $i$  oder  $j$  in  $\mathcal{I}_S$  enthalten, von der Ordnung  $O(\lambda^{-1})$  oder kleiner.

## 4.2 Parameterdarstellung der effektiven Theorie

### 4.2.1 Formale Diskussion des heavy-quark-Limes

Unter dem Integralzeichen läßt sich der Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  nun leicht durchführen. Zunächst reduzieren sich alle Summen der Form

$$\sum_{\gamma} \left( \prod_{i \notin \gamma} \alpha_i \right) \lambda^{-X(\gamma)} \quad \text{auf} \quad \sum_{\gamma} \prime \left( \prod_{i \notin \gamma} \alpha_i \right), \quad (4.21)$$

wobei der Strich bedeutet, daß nur über diejenigen Subgraphen  $\gamma$  zu summieren ist, die alle schweren Linien enthalten. So gilt z. B.

$$D'(\underline{\alpha}) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} D^\lambda(\underline{\alpha}) = \sum_{T1} \prime \left( \prod_{i \notin T1} \alpha_i \right). \quad (4.22)$$

Dieser Ausdruck<sup>2</sup> wie auch  $A'(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}})$ ,  $K'_{\xi\xi}(\underline{\alpha}, \underline{\xi})$  und der one-Tree Beitrag zu  $B'_\xi(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}, \underline{v}, \underline{\xi})$  hängen offensichtlich nur noch von den leichten Parametern ab!

Zu Gleichung (4.20), multipliziert mit  $\lambda^{-I_S}$ , trägt jede schwere Linie einen Faktor

$$m_j^{(0)} + \lambda^{-1} \frac{B_{\xi,j}^\lambda}{D^\lambda} \quad (4.23)$$

---

<sup>1</sup>Es ist klar, daß diese Überlegungen der Modifikation bedürfen, wenn das Polynom  $Z_L$  ebenfalls schwere Impulse enthält, wie es z. B. bei Vorliegen von Ableitungskopplungen der Form  $A_\mu \bar{\Psi} \partial^\mu \Psi$  der Fall ist. Der führende Beitrag wird sich dann mindestens wie  $O(\lambda)$  verhalten. Diese Situation wird im folgenden ausgeschlossen.

<sup>2</sup>Für Graphen mit schweren Schleifen, die wir ausgeschlossen haben, würde  $D'(\underline{\alpha}) \equiv 0$  gelten!

bei, den wir nun kurz betrachten wollen. Da der Ausdruck  $\sum_{i \in T_1} (\prod_{j \notin T_1} \alpha_j)$  nach der Substitution (4.15) für  $\lambda \rightarrow \infty$  ebenso wie  $D^\lambda$  gegen  $D'$  konvergiert, strebt (4.23) bis auf den pseudotree-Beitrag gegen  $m^{(0)}(1 + \psi_j)$ . Zu zeigen bleibt somit nur noch, daß letzterer im heavy-quark-Limes vernachlässigt werden kann. Hierzu genügt es sich klarzumachen, daß

$$\frac{\alpha_j \sum_{PT \supset L} (\prod_{k \notin PT} \alpha_k)}{\sum_{T_1} (\prod_{l \notin PT} \alpha_l)} \quad (4.24)$$

für alle  $\underline{\alpha}, \lambda$  beschränkt ist und im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  für fast alle  $\underline{\alpha}$  gegen Null konvergiert.

Damit reduziert sich die Feynman-Amplitude für  $\lambda \rightarrow \infty$  auf

$$\left\{ Z' \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \right) \exp i \frac{B'_\xi + K'_{\xi\xi}}{D'} \right\}_{|\underline{\xi}=0} \quad (4.25)$$

mit

$$Z' \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \right) \equiv \prod_{j \in \mathcal{I}_S} m_j^{(0)} (1 + \psi_j) Z_L \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_L} \right) \quad (4.26)$$

übrig. Der Index  $L$  erinnert daran, daß  $Z_L$  keine Differentiationen nach den schweren  $\underline{\xi}$  enthält (vgl. Anm. 1), was uns erlaubt, deren Beitrag zu  $B'_\xi$  und  $K'_{\xi\xi}$  wegzulassen.

Damit haben wir für  $\lambda = \infty$  die Darstellung

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\Gamma^\infty(\tilde{p}) &= Q_{L,V} \int_0^\infty \left( \prod_{i=1}^I d\alpha_i \right) \left\{ Z' \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_L} \right) \exp i \frac{B'_\xi(\underline{\alpha}, \tilde{p}, \underline{v}, \underline{\xi}) + K'_{\xi\xi}(\underline{\alpha}, \underline{\xi})}{D'(\underline{\alpha})} \right\}_{|\underline{\xi}=0} \\ &\frac{1}{D'(\underline{\alpha})^{d/2}} \exp i \left[ \frac{A'(\underline{\alpha}, \tilde{p}) + B'_v(\underline{\alpha}, \tilde{p}, \underline{v}) + K'_{vv}(\underline{\alpha}, \underline{v})}{D'(\underline{\alpha})} - \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i m_i^2 \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit

$$D'(\underline{\alpha}) = \sum_{T_1} \iota \left( \prod_{i \notin T_1} \alpha_i \right) \quad (4.28)$$

$$A'(\underline{\alpha}, \tilde{p}) = \sum_{T_2} \iota \left( \prod_{i \notin T_2} \alpha_i \right) \left( \sum_{j \in K1/2} \tilde{p}_j \right)^2 \quad (4.29)$$

$$B'_v(\underline{\alpha}, \tilde{p}, \underline{v}) = \sum_{T_1} \iota \left( \prod_{j \notin T_1} \alpha_j \right) \sum_{i \in \mathcal{I}_S} 2\alpha_i m_i^{(0)} v_i \cdot \left( \sum_{\underline{i}} \tilde{p} \right) \quad (4.30)$$

$$K'_{vv}(\underline{\alpha}, \underline{v}) = - \sum_L \left( \sum_j \eta_{jL} \alpha_j m_j^{(0)} v_j \right)^2 \sum_{PT \supset L} \iota \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right) \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} B'_\xi(\underline{\alpha}, \tilde{p}, \underline{v}, \underline{\xi}) &= \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \xi_i \cdot B_{\xi,i} = \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \xi_i \cdot \left[ \sum_{\substack{T_1 \\ i \in T_1}} \iota \left( \prod_{j \notin T_1} \alpha_j \right) \left( \sum_{\underline{i}} \tilde{p} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{L \\ i \in L}} \left( \sum_j \eta_{jL} \alpha_j m_j^{(0)} v_j \right) \sum_{PT \supset L} \iota \left( \prod_{j \notin PT} \alpha_j \right) \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$



$$K'_{\xi\xi}(\underline{\alpha}, \underline{\xi}) = -\frac{1}{4} \sum_L (\sum_{j \in \mathcal{I}_L} \eta_{jL} \xi_j)^2 \sum_{PT \supset L} \prime(\prod_{i \notin PT} \alpha_i). \quad (4.33)$$

Die schweren Parameter treten jetzt nur noch in stark reduzierter Form in Erscheinung: linear in  $B'_v$  und  $B'_\xi$  sowie quadratisch in  $K'_{vv}$ .

## 4.2.2 Direkte Herleitung

In Kapitel 2.3 hatten wir die effektive Theorie im Impulsraum durch die einfache Ersetzung der schweren Propagatoren

$$\frac{1}{\not{p} - m} \rightarrow \frac{1 + \not{v}}{2} \frac{1}{v \cdot \tilde{p}} \quad (4.34)$$

definiert. Anstelle von (3.2) betrachten wir daher

$$T_{\Gamma}^{\varepsilon, \infty}(\tilde{p}) = \int \prod_{i \in \mathcal{I}_L} \frac{d^d k_i}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \prod_{j \in \mathcal{I}_S} \frac{d^d k_j}{2m_j^{(0)} v_j \cdot k_j + i\varepsilon} \prod_{l=1}^V \delta^d(p_l + \sum_{m=1}^I \epsilon_{lm} k_m) Z'(\underline{k}_L) \quad (4.35)$$

mit  $Z'$  gemäß (4.26). Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß dem in Parameterdarstellung die Gl. (4.27-4.33) entsprechen. Für die schweren Propagatoren verwenden wir in Analogie zu (3.3) die Integraldarstellung<sup>3</sup>

$$\frac{1}{2m^{(0)} v \cdot k + i\varepsilon} = (-i) \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(2m^{(0)} v \cdot k + i\varepsilon)}, \quad (4.36)$$

so daß sich

$$\tilde{T}_{\Gamma}^{\varepsilon, \infty}(\tilde{p}) = Q_{I,V} \int_0^\infty \left( \prod_{i=1}^I d\alpha_i e^{-\varepsilon \alpha_i} \right) e^{-i \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i m_i^2} \left\{ Z' \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_L} \right) \tilde{I}(\underline{\alpha}, \tilde{p}, v, \underline{\xi}_L) \right\} \Big|_{\underline{\xi}_L=0} \quad (4.37)$$

ergibt. Ein Blick auf Gleichung (B.1) zeigt, daß  $\tilde{I}(\underline{\alpha}, \tilde{p}, v, \underline{\xi}_L)$  aus  $I(\underline{\alpha}, \tilde{p}, \underline{\xi})$  auf folgende Weise hervorgeht:

Da in den schweren Propagatoren kein Term quadratisch in  $k_i$  auftritt, sind die  $\alpha$ -Parameter aller schweren Linien ( $i \in \mathcal{I}_S$ ) gleich null zu setzen. Danach (die Reihenfolge ist wesentlich) ersetzt man bei diesen Linien  $\xi_i$  durch  $2\alpha_i m_i^{(0)} v_i$ , wodurch ihr Beitrag zum  $\alpha$ -Integranden generiert wird. Die  $\underline{\xi}$  spielen somit offensichtlich eine doppelte Rolle, denn für die leichten Linien dienen sie nach wie von zur Erzeugung des Spinpolynoms  $Z'(\underline{k}_L)$  durch Differenzieren und anschliessendes Nullsetzen.

---

<sup>3</sup>Die Faktoren  $2m_i^{(0)}$  im Propagator und in  $Z'$  heben sich gegeneinander weg, wie es sein muß, da in (4.34) keine Masse auftritt. Sie wurden lediglich eingeführt, damit die leichten und schweren Parameter gleiche Dimension haben.

Es ist nun ein Leichtes, sich davon zu überzeugen, daß

$$\tilde{I}(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}, \underline{v}, \underline{\xi}_L) = \frac{1}{D(\underline{\alpha})^{d/2}} \exp i \frac{A(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}) + B(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}}, \underline{\xi}) + K(\underline{\alpha}, \underline{\xi})}{D(\underline{\alpha})} \left. \begin{array}{l} 1. \quad \alpha_i \rightarrow 0 \\ 2. \quad \xi_i \rightarrow 2\alpha_i m_i^{(0)} v_i \end{array} \right\} \forall i \in \mathcal{I}_S \quad (4.38)$$

unmittelbar auf die Darstellung (4.27-4.33) führt, die wir als Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  der intermediären Theorie gewonnen hatten. Etwas anderes war freilich auch nicht zu erwarten. Daher drängt sich an dieser Stelle die Frage auf, warum wir überhaupt zunächst den vermeintlich umständlicheren Weg gegangen sind. Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, daß die Parameterintegrale der effektiven Theorie, verglichen mit denen der ursprünglichen, unschöne Eigenschaften aufweisen, so daß es besser ist, sie als Limes wohldefinierter Ausdrücke darzustellen. Auch bei der Renormierungsdiskussion für die effektive Theorie wird es sich als hilfreich erweisen, daß wir die intermediäre Theorie gewissermassen als regularisierte Version der effektiven Theorie zur Verfügung haben.

### 4.2.3 Reduzierte Graphen

Die oben angegebenen Regeln lassen sich leicht in graphischer Weise interpretieren, indem man jedem Graphen  $\Gamma$  den ‘reduzierten’ Graphen  $\Gamma'$  zuordnet, der entsteht, wenn man alle schweren Linien zu Punkten kontrahiert (s. Anh. A). Von jeder schweren Spur (s. Kap. 2.1.2) und den auf ihr liegenden Vertices bleibt dann nur je ein ‘schwerer Vertex’ übrig. Dies wird in Abb. 4.1 anhand eines Beispiels verdeutlicht, das in Anhang D.1 ausführlicher diskutiert wird.

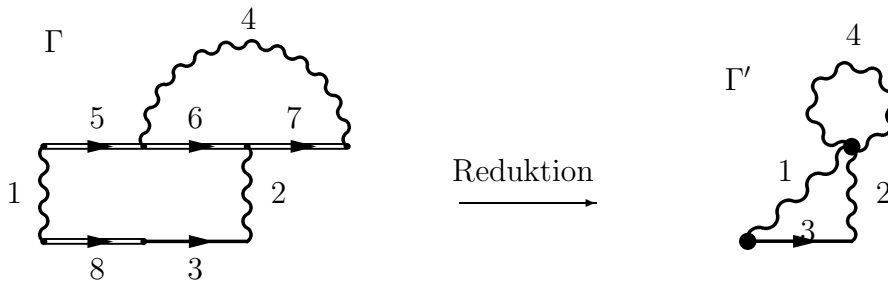


Abbildung 4.1: Graph  $\Gamma$  und reduzierter Graph  $\Gamma'$

Da wir von vornherein Graphen ausgeschlossen hatten, die schwere Schleifen enthalten (s. Kap. 2), hat der reduzierte Graph  $\Gamma'$  genauso viele Schleifen wie der ursprüngliche Graph  $\Gamma$ . Weiterhin ist leicht einzusehen, daß zwischen den one-(two-, pseudo-)trees von  $\Gamma'$  und den one-(two-, pseudo-)trees von  $\Gamma$ , die alle schweren Linien enthalten, eine eindeutige Beziehung besteht. So ist z. B.

die Summe  $\sum'_{T_1}$  äquivalent zur Summation über alle one-trees des reduzierten Graphen  $\Gamma'$ .

Während wir im Graphen  $\Gamma$  keine Tadpoles (s. Anh. A) zugelassen hatten, zeigt schon das obige Beispiel, daß  $\Gamma'$  durchaus Tadpoles enthalten kann. Diese rühren von leichten Linien her, deren beide Enden in  $\Gamma$  auf ein und denselben schweren Spur und somit in  $\Gamma'$  auf auf ein und demselben schweren Vertex liegen. Diese werden wir im folgenden als ‘pseudo-Tadpoles’<sup>4</sup> bezeichnen.

Da kein one- oder two-tree, der alle schweren Linien umfaßt, pseudo-Tadpoles enthalten kann (andernfalls würde eine Schleife vorliegen), trägt jeder pseudo-Tadpole  $t \in \mathcal{I}_L$  zu  $D'(\underline{\alpha})$ ,  $A'(\underline{\alpha}, \tilde{p})$  und  $B'_v(\underline{\alpha}, \tilde{p}, \underline{v})$  einen Faktor  $\alpha_t$  bei, der im Quotienten  $A'/D'$  bzw.  $B'_v/D'$  herausfällt. Das gleiche gilt für den Beitrag der one-trees zu  $B'_{\xi,i}$ . Wenn man noch den Graphen  $\Gamma''$  einführt, der aus  $\Gamma'$  durch Entfernen der pseudo-Tadpoles hervorgeht, gilt damit

$$\frac{A'}{D'} = \frac{A_{\Gamma''}}{D_{\Gamma''}}, \quad (4.39)$$

wobei die äußeren Impulse der schweren Vertices in  $\Gamma''$  als Summen der äußeren Impulse aller Vertices zu verstehen sind, die auf der jeweiligen schweren Spur liegen. Somit ist  $\frac{A'}{D'} = \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i m_i^2$  nichts anderes als der Exponent der Parameterdarstellung des reduzierten Graphen  $\Gamma''$ .

Die Beobachtung, daß  $A'(\underline{\alpha}, \tilde{p})$  von den  $N$  äußeren Impulsen der Vertices, die auf einer schweren Spur liegen, nur in Form von deren Summe abhängt, legt es

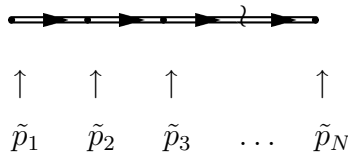


Abbildung 4.2: Äußere Impulse einer schweren Spur

nahe, diese Impulse durch

$$s_i = \sum_{j=1}^i \tilde{p}_j, \quad i = 1 \dots N \quad (4.40)$$

auszudrücken. Da  $\frac{B'}{D'}$  auch bezüglich dieser neuen Variablen eine lineare Funktion ist, kann man ihre Abhängigkeit von  $s_1 \dots s_{N-1}$  bestimmen, indem man die äußeren

<sup>4</sup>Im Falle von Eichboson-Propagatoren mit Eichparameter  $\lambda \neq 1$  liefert nur der erste Summand nach Ausmultiplizieren einen pseudo-Tadpole. Der eichabhängige Teil wird durch Einführung zweier Feynman-Parameter behandelt, da er proportional zum Produkt zweier gewöhnlicher Propagatoren ist. Bei Kontraktion aller schweren Linien entsteht somit kein Tadpole sondern eine Schleife mit zwei Linien.

Impulse der leichten Vertices und die Gesamtimpulse der schweren Spuren gleich null setzt. Da dann jede schwere Spur für sich die Impulserhaltung erfüllt, sind die Beiträge aller one-trees zu  $B'_v$  gleich. Hieraus ergibt sich, daß  $\frac{B'_v}{D'}$  von den Variablen  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  gemäß

$$\sum_{i=1}^{N-1} 2\alpha_i m_i^{(0)} v_i \cdot s_i \quad (4.41)$$

abhängt. Bei Fouriertransformation in den Ortsraum führt dies unmittelbar auf

$$\prod_{i=1}^{N-1} \delta^d(x_{i+1} - x_i - 2\alpha_i m_i^{(0)} v_i), \quad (4.42)$$

worin sich wieder ausdrückt, daß sich die schweren Quarks mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

Der Beitrag der pseudo-Tadpoles zu den pseudo-tree-Summen  $\sum'_{PT\Gamma}$  in  $K'_{vv}$ ,  $B'_\xi$ ,  $K'_{\xi\xi}$  kann auf sehr einfache Weise bestimmt werden. Da man alle pseudo-trees, die einen bestimmten pseudo-Tadpole enthalten, durch Hinzufügen desselben zu einem beliebigen one-tree erhält, ist klar daß jede pseudo-Tadpole-Linie zum Integranden in Gleichung (4.27) einfach einen Faktor

$$\frac{1}{\alpha_t^{d/2}} \exp -i \frac{(\xi_t + 2 \sum_{j \in L} \pm \alpha_j m_j^{(0)} v_j)^2}{4\alpha_t} \quad (4.43)$$

beiträgt, den man ohne jede Rechnung hinschreiben kann. Die Summation erstreckt sich über die schweren Linien, die von den beiden Enden des pseudo-Tadpoles eingeklammert werden, und die Vorzeichen sind positiv zu wählen, wenn die Linien  $t$  und  $j$  gleichen Umlaufsinn haben. Diese Gleichung erhält man auch direkt, wenn man in der Impulsdarstellung über den Schleifenimpuls integriert, der durch die pseudo-Tadpole-Linie fließt.

Die oben diskutierten Graphenregeln für die effektive Theorie stellen gegenüber denen der gewöhnlichen Theorie eine beträchtliche Vereinfachung dar. Besonders deutlich fällt diese bei Selbstenergie- und Vertexgraphen der schweren QED aus. Bei diesen gibt es nur eine schwere Spur, auf der alle Vertices liegen, so daß alle leichten Linien pseudo-Tadpoles sind und  $A'(\underline{\alpha}, \underline{\tilde{p}})$  verschwindet. So ergeben sich für die beiden Graphen aus Abb. 4.3 mit skalaren Boson-Propagatoren bzw. in Feynman-Eichung und Parametrisierung der äußeren Impulse gem. (4.40) die Darstellungen

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_{1\dots 5}}{(\alpha_4 \alpha_5)^{d/2}} e^{-i(\alpha_4 \mu_4^2 + \alpha_5 \mu_5^2) + 2i \sum_{i=1}^3 \alpha_i m_i^{(0)} v_i \cdot s_i} \exp -i \left( \frac{(\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_2 m_2^{(0)} v_2)^2}{\alpha_4} + \frac{(\alpha_2 m_2^{(0)} v_2 + \alpha_3 m_3^{(0)} v_3)^2}{\alpha_5} \right) \quad (4.44)$$



Abbildung 4.3: Zweischleifen-Selbstenergie-Graphen

bzw.

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_{1\dots 5}}{(\alpha_4\alpha_5)^{d/2}} e^{-i(\alpha_4\mu_4^2 + \alpha_5\mu_5^2) + 2i\sum_{i=1}^3 \alpha_i m_i^{(0)} v_i \cdot s_i} \exp -i \left( \frac{\alpha_2^2 m_2^{(0)2}}{\alpha_4} + \frac{(\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_2 m_2^{(0)} v_2 + \alpha_3 m_3^{(0)} v_3)^2}{\alpha_5} \right). \quad (4.45)$$

Da es mit formalen Betrachtungen nach Art dieses Kapitels natürlich nicht getan ist, werden wir uns in den folgenden Kapiteln den grundlegenden Existenzfragen zuwenden. Dabei werden wir uns wie bisher auf Graphen ohne schwere Schleifen beschränken.

# Kapitel 5

## UV-Powercounting in der effektiven Theorie

### 5.1 Erste Überlegungen

Wie wir gezeigt haben, impliziert die Erfüllung der Powercounting-Bedingung (3.16) die lokale Integrabilität und für  $\varepsilon > 0$  die absolute Konvergenz der Parameterdarstellung (3.4). Dies gilt natürlich auch in der intermediären Theorie gemäß (4.2) und nach der Substitution (4.15). Die Frage inwieweit der Übergang zur effektiven Theorie ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) mit der Integration und dem Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  vertauschbar ist, ignorieren wir zunächst und untersuchen das UV-Verhalten (d. h. kleine Parameter) der effektiven Theorie.

Infolge des Schrittes (4.15), den wir vorgenommen hatten, um die ‘großen’ Faktoren  $\lambda$  zu eliminieren, verschwinden die Beiträge zu  $D(\underline{\alpha})$  aller One-Trees, die nicht alle schweren Linien enthalten (vgl. (4.22)). Wie sich in Abschnitt 4.2.3 gezeigt hatte, entspricht  $D'(\underline{\alpha})$  gerade dem Symanzik-Polynom des reduzierten Graphen  $\Gamma'$ . Da dieser jedoch bei gleicher Schleifenzahl weniger Linien enthält, wird sein UV-Verhalten i. d. R. schlechter sein. Die äußert sich zum einen darin, daß  $D'(\underline{\alpha})$  im Raum der Parameter  $\alpha_1$  bis  $\alpha_I$  ‘mehr’ Nullstellen besitzt, zum anderen durch die Pseudo-Tree-Beiträge zu  $B'_\xi$  (4.32) und  $K'_{vv}$  (4.31). Diese führen dazu daß im Gegensatz zur ursprünglichen Theorie sowohl die  $\frac{B'_{\xi,i}}{D'}$  als auch der nach dem Nullsetzen der  $\underline{\xi}$  verbleibende Exponent in (4.27) Singularitäten besitzen.

Um möglicher Verwirrung vorzubeugen erscheint an dieser Stelle eine Bemerkung angebracht: Obwohl durch  $D(\underline{\alpha})$  dividierte Pseudo-Tree-Summen Singularitäten aufweisen (vgl. Anhang C.2), treten solche bei den oben genannten Größen in der intermediären Theorie nicht auf. Dies ist aufgrund der Stetigkeit von  $A/D$  und  $B/D$  in der ursprünglichen Theorie und der Verschiebung (4.2) klar, folgt jedoch auch aus der Darstellung (4.12, 4.13), da neben dem  $\alpha$ -Produkt des jeweiligen Pseudo-Trees der  $\alpha$ -Parameter mindestens einer Linie aus der Schleife

auftritt. Das Auftreten von Singularitäten im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  ist darauf zurückzuführen, daß bei diesem alle schweren Parameter in  $(\prod_{i \notin \gamma} \alpha_i)$  und  $D(\underline{\alpha})$  zu Null gesetzt werden, nicht jedoch in dem danebenstehenden Faktor, da dort ein  $\lambda$  steht, welches das  $\lambda^{-1}$  in (4.15) kompensiert.

Wir wollen die sich hieraus ergebenden Probleme zunächst anhand des einfachsten konvergenten Graphen der effektiven Theorie (Abb. 5.1) untersuchen. In der intermediären Theorie entspricht diesem (bis auf konstante Faktoren) der

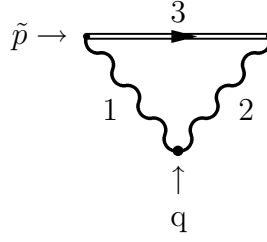


Abbildung 5.1: Beispiel für einen Graphen, dessen reduzierter Graph divergiert

Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_{1,2,3} e^{-\varepsilon \sum \alpha_i}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^{-1}\alpha_3)^2} \left[ m^{(0)} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(m^{(0)}\not{v} + \lambda^{-1}\not{p}) + \lambda^{-1}\alpha_2\not{p}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^{-1}\alpha_3} \right] \\ \exp i \left\{ \frac{\alpha_1\alpha_2q^2 + 2\alpha_1\alpha_3m^{(0)}v \cdot \tilde{p} + 2\alpha_2\alpha_3m^{(0)}v \cdot (\tilde{p} + q)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^{-1}\alpha_3} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^{-1}\alpha_1\alpha_3\tilde{p}^2 + \lambda^{-1}\alpha_2\alpha_3(\tilde{p} + q)^2 - \alpha_3^2m^{(0)2}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^{-1}\alpha_3} - (\alpha_1 + \alpha_2)\mu^2 \right\}. \quad (5.1)$$

Die eckige Klammer ignorieren wir im folgenden, da sie gleichmäßig gegen  $m^{(0)}(1 + \not{v})$  konvergiert. Gleichung (5.1) mit  $\lambda = \infty$  ist nach Abschnitt 4.2.2 genau der Ausdruck, der sich ergibt, wenn man im Impulsraum von dem schweren Propagator  $\frac{1}{v \cdot \tilde{p} + i\varepsilon}$  ausgeht und Schwinger-Parameter einführt. Da (5.1) mit  $\lambda = \infty$  offensichtlich nicht lokal integrierbar ist ( $\int_0^\infty \frac{d\alpha_{1,2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$ ), folgt mit dem Satz von Fubini, daß schon die Impulsdarstellung nicht absolut konvergent war. Dies bestätigt unsere Überlegungen von Kapitel 2.

Um nun festzustellen, wie (5.1) mit  $\lambda = \infty$  zu interpretieren ist, reicht es zunächst aus, den Fall  $\tilde{p} = q = 0$  zu betrachten, für den der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  trivial ist, da wir die Kontouren der  $\alpha$ -Integrationen rotieren und  $\varepsilon = 0$  setzen können:

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_{1,2,3}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^{-1}\alpha_3)^2} \exp - \left( \frac{\alpha_3^2 m^{(0)2}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^{-1}\alpha_3} + (\alpha_1 + \alpha_2)\mu^2 \right). \quad (5.2)$$

Für  $\lambda = \infty$  kann die Integration über  $\alpha_3$  durchgeführt werden und ergibt

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2m^{(0)}} (\alpha_1 + \alpha_2)^{1/2}, \quad (5.3)$$

so daß

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_{1,2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\mu^2} \int_0^\infty d\alpha_3 e^{-\frac{\alpha_3^2 m(0)^2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \quad (5.4)$$

als *iteriertes* Integral existiert. Es ist schließlich ein leichtes, sich durch zweifache Anwendung des Lebesgueschen Satzes über dominierte Konvergenz, zuerst auf die  $\alpha_3$ -, dann auf die  $\alpha_{1,2}$ -Integration, davon zu überzeugen, daß dieses iterierte Integral tatsächlich der Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  von (5.2) ist.

Ungeachtet der Vereinfachung  $\tilde{p} = q = 0$ , die wir oben vorgenommen hatten, liegt es nahe, folgende Vermutung zu formulieren: *Auch wenn die Parameterdarstellung der effektiven Theorie für schwere Quarks (4.27-4.33) u. U. auf Integrale führt, die nicht absolut konvergieren, existieren die iterierten Integrale, bei denen man zuerst über die schweren Parameter integriert, und stellen in wohldefinierter Weise den Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  der intermediären Theorie dar.* Die zugrundeliegende Idee ist einfach: Die Integration über die schweren Parameter läßt sich für fast alle Werte der leichten Parameter durchführen und ergibt eine Funktion derselben, die aufgrund der im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  auftretenden Singularitäten von  $K'_{vv}/D'$  bei kleinen leichten Parametern ebendort verschwindet. Dadurch liefert sie einen zusätzlichen UV-Cutoff, der die stärkeren UV-Divergenzen des reduzierten Graphen  $\Gamma'$  kompensiert. Diese Überlegung, die noch einmal die unterschiedlichen Rollen verdeutlicht, die die leichten und schweren Parameter in der effektiven Theorie spielen, ist zwar unmittelbar einleuchtend, für eine Betrachtung beliebig komplizierter Graphen jedoch wenig geeignet, da sich diese Integrationen in den wenigsten Fällen explizit durchführen lassen.

Auch im Hinblick auf den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  empfiehlt sich eine andere Vorgehensweise. Während bei der konventionellen Störungsrechnung für das UV-Verhalten die Pole von  $D^{-1}$  und  $\frac{K_{ij}}{D}$  und für die Landau-Singularitäten die Nullstellen von  $\frac{A}{D} - \sum \alpha_i m_i^2$  relevant sind (von den ‘Singularitäten zweiter Art’, die nur bei unphysikalischen Impulsen auftreten, sehen wir hier ab), ist die Situation in der effektiven Theorie komplizierter, da das Auftreten von Nullstellen und Polen bei dem Quotienten  $\frac{A'+B'_v+K'_{vv}}{D'}$  zu einer Verquickung der beiden genannten Aspekte führt. Daher werden wir im nächsten Abschnitt eine Umformung des Integrals vornehmen, die in der intermediären Theorie ( $\lambda < \infty$ ) ohne weiteres zulässig ist, und den Integranden konvergenter Graphen auch in der effektiven Theorie ( $\lambda = \infty$ ) lokal integrierbar macht.

## 5.2 Vollständige Diskussion

Für die Graphen, die im Rahmen der HQET von Interesse sind, gilt im Hinblick auf (4.18) die Beziehung

$$D(\gamma) = I_S(\gamma) + D_L(\gamma), \quad (5.5)$$



so daß (3.15) zu

$$\delta_\gamma = dL(\gamma) - 2I_L(\gamma) - I_S(\gamma) + D_L(\gamma) \quad (5.6)$$

wird. Ob und in welchem Sinn die Feynman-Amplituden der effektiven Theorie unter der Bedingung (3.16) existieren, soll in diesem Abschnitt untersucht werden.

Hierbei werden wir unter Berufung auf die obige Argumentation von vornherein mit  $\lambda = \infty$  rechnen. Aufgrund ihrer unterschiedlichen Rolle werden die leichten Parameter mit  $\alpha_1 \dots \alpha_{I_L}$  und die schweren mit  $\beta_1 \dots \beta_{I_S}$  bezeichnet. Von zentraler Bedeutung ist offensichtlich das Verhalten von

$$\frac{K'_{vv}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}{D'(\underline{\alpha})} = \sum_{a,b=1}^{I_S} \beta_a \beta_b \frac{K'_{vv,ab}(\underline{\alpha})}{D'(\underline{\alpha})}. \quad (5.7)$$

Diese Funktion ist eine quadratische Form in den  $\beta$ 's, deren Koeffizienten von  $\underline{\alpha}$  abhängen und Singularitäten bei kleinen  $\alpha$ 's aufweisen, welche v. a. im Hinblick auf die Renormierung der effektiven Theorie (vgl. Kap. 7) äußerst störend sind:

$$\frac{K'_{vv,ab}}{D'} = -m_a^{(0)} m_b^{(0)} v_a \cdot v_b \sum_L \eta_{aL} \eta_{bL} \frac{\sum'_{PT \supset L} (\prod_{i \notin PT} \alpha_i)}{\sum'_{T1} (\prod_{j \notin T1} \alpha_j)} \quad (5.8)$$

Die äußere Summation über alle Schleifen in  $\Gamma$  erstreckt sich effektiv nur über diejenigen, die die schweren Linien  $a$  und  $b$  enthalten, während  $\sum'_{PT \supset L}$  über alle Pseudo-Trees in  $\Gamma$  läuft, die alle Linien der Schleife  $L$  sowie alle schweren Linien enthalten. Wenn man der Schleife  $L$  des Graphen  $\Gamma$  die aus den leichten Linien in  $L$  bestehende Schleife  $L'$  des reduzierten Graphen  $\Gamma'$  zuordnet, gilt

$$\frac{\sum'_{PT \supset L} (\prod_{i \notin PT} \alpha_i)}{\sum'_{T1} (\prod_{j \notin T1} \alpha_j)} = \frac{\sum_{PT' \supset L'} (\prod_{i \notin PT'} \alpha_i)}{\sum_{T1'} (\prod_{j \notin T1'} \alpha_j)}, \quad (5.9)$$

wobei  $T1'$  bzw.  $PT'$  die One-/Pseudo-Trees von  $\Gamma'$  bezeichnen. Der Quotient in (5.8) ist somit allein durch  $\Gamma'$  und  $L'$  bestimmt, so daß auch für das UV-Verhalten hinsichtlich der  $\alpha$ 's allein der reduzierte Graph  $\Gamma'$  maßgebend ist. Daher werden wir im nächsten Schritt lediglich die leichten Parameter  $\underline{\alpha}$  durch Hepp-Sektoren  $\pi \in S_{I_L}$  und Speer-Variable  $t_1 \dots t_{I_L}$  parametrisieren:

$$\alpha_{\pi(i)} = \prod_{j=i}^{I_L} t_j^2, \quad (5.10)$$

$$\int_0^\infty d\underline{\alpha} d\underline{\beta} \rightarrow 2^{I_L} \int_0^\infty dt_{I_L} \int_0^1 dt_1 \dots dt_{I_L-1} \prod_{i=1}^{I_L} t_i^{2i-1} \int_0^\infty d\beta_1 \dots \beta_{I_S}. \quad (5.11)$$

In Analogie zu (3.25) definieren wir die Graphen  $\Gamma'_i$ , die jetzt natürlich Subgraphen von  $\Gamma'$  sind. Damit werden die  $\frac{K'_{vv,ab}}{D'}$  zu Funktionen von  $\underline{t}$  (homogen vom Grade  $-2$  bzgl.  $t_{I_L}$ ) mit Polen in den  $t_i$  bei  $t_i = 0$ , die es nun genauer zu betrachten gilt. Dazu wenden wir das folgende Lemma, das in Anhang C.2 bewiesen wird, auf  $\Gamma'$  und  $L'$  an:

**Lemma 2**  $\frac{\sum_{PT \supset L} (\prod_{i \notin PT} \alpha_i)}{\sum_{T1} (\prod_{j \notin T1} \alpha_j)} = (\prod_{k=i_0}^I t_k)^{-2} F(\underline{t})$ .

$i_0$  ist der kleinste Wert, für den  $\Gamma_{i_0} \supset L$  gilt, und  $F(\underline{t})$  ist ein Polynom in  $t_1 \dots t_{I-1}$ , welches die Pole bei  $t_k = 0, k \geq i_0$  nicht kompensiert.

Hiermit ergibt sich, daß  $\frac{K'_{vv,ab}}{D'}$  bei  $t_i = 0$  genau dann einen Pol besitzt, wenn für mindestens eine dazu beitragende Schleife  $L$  gilt:  $L' \subset \Gamma'_i$ . Wir nehmen nun die Substitution

$$\beta_a = \prod_{i=1}^{I_L} t_i^{R_{ia}} \beta'_a \quad (5.12)$$

vor, wodurch (5.7) zu

$$\frac{K'_{vv}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}{D'(\underline{\alpha})} = \sum_{a,b=1}^{I_S} \beta'_a \beta'_b \frac{K'_{vv,ab}(\underline{t})}{D'(\underline{t})} \prod_{i=1}^{I_L} t_i^{R_{ia}+R_{ib}} \quad (5.13)$$

wird. Für die Konstanten  $R_{ia}$  wählen wir die kleinsten Werte  $R_{ia}^0$ , die gewährleisten, daß die  $t_i^{-2}$ -Faktoren der diagonalen Beiträge zu (5.13) durch die Faktoren  $\prod_{i=1}^{I_L} t_i^{2R_{ia}^0}$  kompensiert werden:

$$R_{ia}^0 = \begin{cases} 1 & \text{wenn es eine Schleife } L \ni a \text{ gibt, derart daß } L' \subset \Gamma'_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.14)$$

Daß damit auch die nichtdiagonalen Terme ( $a \neq b$ ) in (5.13) stetig bzgl.  $\underline{t}$  sind, folgt daraus, daß jede Schleife, die zu  $K'_{vv,ab}$  beiträgt, auch zu  $K'_{vv,aa}$  und  $K'_{vv,bb}$  beiträgt und daher erst recht durch den Faktor  $\prod_{i=1}^{I_L} t_i^{R_{ia}+R_{ib}}$  regulär gemacht wird. Somit führt die Substitution (5.12) dazu, daß  $\frac{A'+B'_v+K'_{vv}}{D'}$  sowohl bzgl. der  $\underline{\beta}'$  als auch der  $\underline{t}$  im Integrationsgebiet regulär ist.

Die Funktionaldeterminante ist durch

$$\frac{\partial(\underline{\beta}, \underline{t})}{\partial(\underline{\beta}', \underline{t})} = \prod_{i=1}^{I_L} t_i^{\sum_{a=1}^{I_S} R_{ia}} = \prod_{i=1}^{I_L} t_i^{S(\Gamma'_i)} \quad (5.15)$$

gegeben, wobei  $S(\Gamma'_i)$  die Anzahl der schweren Linien bezeichnet, die in (mindestens) einer Schleife liegen, deren leichte Linien vollständig in  $\Gamma'_i$  enthalten sind. Diese Funktionaldeterminante, die die Verallgemeinerung des Faktors (5.3) ist, reflektiert den Beitrag der schweren Linien zur Verbesserung der UV-Konvergenz der Subgraphen  $\Gamma'_i$ .

Wir wollen nun zeigen, daß der Integrand der Darstellung (4.27) für den im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  führenden und einzig nichtverschwindenden Beitrag zur Feynman-Amplitude nach Einführung der Sektoren (5.10) und der Variablentransformation (5.12) tatsächlich lokal integrierbar ist. In Analogie zur Betrachtung im ersten Abschnitt dieses Kapitels können wir hierbei die betragsmäßig beschränkten Exponentialfunktionen und  $(\tilde{D}')^{-d/2}$  ignorieren, während die Funktionaldeterminante

$\frac{\partial(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}{\partial(\underline{t}, \underline{\beta}')}$  und der singuläre Faktor von  $(D')^{-d/2}$  auf

$$\prod_{i=1}^{I_L} t_i^{2i-1-dL(\Gamma'_i)+S(\Gamma'_i)} \quad (5.16)$$

führen. Zu berücksichtigen ist nun noch der Rest des Integranden, der jetzt durch ein Polynom in  $\frac{K'_{\xi\xi,ij}(\underline{\alpha})}{D'(\underline{\alpha})}$  und  $\frac{B'_{\xi,i}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, p)}{D'(\underline{\alpha})}$  gegeben ist. Im Gegensatz zur herkömmlichen Theorie sind die Ausdrücke  $\frac{B'_{\xi,i}}{D'}$  beim Power-Counting nicht vernachlässigbar, da die Pseudo-Tree-Beiträge (2. Term in (4.32)) Pole besitzen. Durch Aufspalten von  $B'_{\xi,i}$  in  $B'_{\xi,T1,i}$  und  $B'_{\xi,PT,i}$  erhalten wir eine Linearkombination von Monomials der Form

$$\frac{B'_{\xi,T1,s_1}}{D'} \dots \frac{B'_{\xi,T1,s_H}}{D'} \frac{B'_{\xi,PT,u_1}}{D'} \dots \frac{B'_{\xi,PT,u_F}}{D'} \frac{K'_{\xi\xi,v_1w_1}}{D'} \dots \frac{K'_{\xi\xi,v_Gw_G}}{D'}, \quad (5.17)$$

wobei die Indices  $s_1 \dots w_G$  für leichte Parameter (d. h.  $\alpha$ 's) stehen. Da die Faktoren  $\frac{B'_{\xi,T1,i}}{D'}$  regulär sind, wenden wir uns gleich  $\frac{B'_{\xi,PT,i}}{D'}$  zu und betrachten wir zunächst eine beliebige dazu beitragende Schleife, d. h. eine die die Linie  $i$  enthält. Lemma 2 besagt, daß  $\sum'_{PT \supset L} (\prod_{i \notin PT} \alpha_i) / \sum'_{T1} (\prod_{i \notin PT} \alpha_i)$  eine Singularität der Form  $(\prod_{k=i_0}^I t_k)^{-2}$  besitzt, wobei  $i_0$  wiederum der kleinste Wert ist, für den  $L \subset \Gamma'_{i_0}$  gilt. Dies ist jedoch noch mit  $(\sum_j \eta_{jL} \alpha_j m_j^{(0)} v_j)$ , einer Summe über alle schweren Linien  $j$  der Schleife  $L$ , zu multiplizieren. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß das darin auftretende  $\alpha_j$  in der Notation dieses Kapitels gleich  $\beta_a$  mit geeignetem  $a$  ist und der Substitution (5.12) unterliegt. Mit (5.14) folgt sofort  $R_{ia} = 1 \forall i \geq i_0$ , so daß der singuläre Beitrag der Schleife  $L$  lediglich  $(\prod_{k=i_0}^I t_k)^{-1}$  beträgt. Dies ist, in Verbindung mit der Tatsache, daß  $t_{L_L}$  die Dimension Masse<sup>-1</sup> hat, äußerst plausibel, da die  $B'$ 's aus einem Impuls im Zähler des Integranden hervorgegangen sind, die  $K'$ 's hingegen aus zweien. Wir halten fest, daß es für eine  $t_j^{-1}$ -Singularität von  $\frac{B'_{\xi,i}}{D'}$  notwendig ist, daß die Linie  $i$  in einer Schleife des Subgraphen  $\Gamma'_j$  enthalten ist. Entsprechend verschärfen wir unter Verwendung von Lemma 2 unsere frühere Aussage über  $\frac{K'_{\xi\xi,ij}}{D'}$  dahingehend, daß für einen Pol  $t_k^{-2}$  die Linien  $i$  und  $j$  nicht nur in  $\Gamma'_k$  sondern in einer Schleife dieses Subgraphen liegen müssen. Unter Verwendung dieser Resultate ergibt sich, daß sich Gl. (5.17) höchstens wie

$$\prod_{i=1}^{I_L} t_i^{-N(\Gamma'_i)} \quad (5.18)$$

verhält, wobei  $N(\Gamma'_i)$  die Anzahl der Indices  $u_1 \dots w_F$  ist, die in den Schleifen der  $\Gamma'$ -Subgraphen  $\Gamma'_i$  enthalten sind. Wenn wir nun jedem  $\Gamma'_i \subset \Gamma'$  mit  $\Gamma_i \subset \Gamma$  den Subgraphen zuordnen, der aus allen (leichten und schweren) Linien besteht, die in den Schleifen von  $\Gamma'_i$  liegen, ergibt sich  $S(\Gamma'_i) = I_S(\Gamma_i)$ ,  $i \geq I_L(\Gamma_i)$  sowie  $N(\Gamma'_i) \leq D_L(\Gamma_i)$ . Wenn der Graph  $\Gamma$  gemäß Power-Counting endlich ist, die

Bedingung (3.16, 5.6) somit insbesondere für die Subgraphen  $\Gamma_i$  erfüllt ist, folgt aus obigen Abschätzungen

$$2i - dL(\Gamma'_i) + S(\Gamma'_i) - N(\Gamma'_i) \geq 2I_L(\Gamma_i) + I_S(\Gamma_i) - dL(\Gamma_i) - D_L(\Gamma_i) > 0 \quad (5.19)$$

und somit die gewünschte lokale Integrabilität.

Wesentlich für dieses Ergebnis war die Variablentransformation (5.12), bei der mit  $R_{ia} = R_{ia}^0$  die kleinsten Werte gewählt wurden, die zur Beseitigung der Singularitäten von (5.7) ausreichend waren. Durch ausreichend große Wahl der  $R_{ia}$  könnte man mittels der Funktionaldeterminante (5.15) alle denkbaren UV-Divergenzen beseitigen. Dann bekäme man natürlich an anderer Stelle Schwierigkeiten, und zwar beim Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$ , den wir im nächsten Abschnitt betrachten werden.

Die Tatsache, daß für die Variablentransformation (5.12) und die Wahl der  $R_{ia}$  weniger die Subgraphen  $\Gamma'_i$  des reduzierten Graphen  $\Gamma'$  als vielmehr dessen Schleifen-Struktur maßgebend waren, ist ein Indiz dafür, daß die Betrachtungen dieses Abschnitts sich durch eine andere Parametrisierung der leichten Parameter  $\underline{\alpha}$  in eine elegantere Form bringen lassen. Es handelt sich dabei um die eine oder andere Form der ‘labeled singularity families’, wie sie bei der Behandlung der analytischen und dimensionalen Renormierung [40, 26] Anwendung finden. Insbesondere für eine gründlichere Untersuchung der analytischen Eigenschaften erscheint deren Verwendung unerlässlich, was jedoch einer späteren Betrachtung vorbehalten bleiben muß.



# Kapitel 6

## Analytische Eigenschaften der HQET

In diesem Kapitel werden wir zunächst Landau-Gleichungen für die effektive Theorie in einer gemischten Darstellung analog zu (3.39-3.41) herleiten. Bei der Übersetzung dieser Bedingungen in eine reine Parameterform, vergleichbar mit (3.36, 3.37) wird sich zeigen, daß deren Lösungen selbst im Fall reeller  $\underline{\tilde{p}}$  und  $\underline{v}$  nicht alle Singularitäten der Feynman-Amplitude liefern, weshalb eine Untersuchung der Parameterdarstellung unumgänglich ist.

### 6.1 Gemischte Darstellung

Wie in Abschnitt 2.3 erwähnt wurde, ist die Parametrisierung der äußeren Impulse gemäß (2.10) äquivalent zur Addition von  $\lambda m_i^{(0)} v_i$  zum Impuls  $k_i$  einer jeden schweren Linie. Mit (2.9) und der Substitution (4.15) wird das Gleichungssystem (3.39-3.41) zu

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \epsilon_{ji} k_i + \tilde{p}_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{V} \quad (6.1)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_L} \eta_{il} \alpha_i k_i + \sum_{j \in \mathcal{I}_S} \eta_{jl} \alpha_j (m_j^{(0)} v_j + \lambda^{-1} k_j) = 0 \quad \forall l \in \mathcal{L} \quad (6.2)$$

$$\alpha_i (k_i^2 - m_i^2) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_L \quad (6.3)$$

$$\alpha_i (2m_i^{(0)} v_i \cdot k_i + \lambda^{-1} k_i^2) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_S. \quad (6.4)$$

Solange  $\lambda$  und somit die schweren Massen und harten Impulse endlich sind, hat dieses System die gleiche Struktur wie in der ursprünglichen Theorie. Jedem  $\underline{p} \in R^{4(E-1)}$  derart daß (3.39-3.41) eine Lösung besitzt, entspricht im Raum der Restimpulse eine Singularität  $\underline{\tilde{p}}$ .

Durch den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  und Umbenennung der schweren Parame-

ter in  $\beta_i$  gelangt man schließlich zu folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \epsilon_{ji} k_i + \tilde{p}_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{V} \quad (6.5)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_L} \eta_{il} \alpha_i k_i + \sum_{j \in \mathcal{I}_S} \eta_{jl} \beta_j m_j^{(0)} v_j = 0 \quad \forall l \in \mathcal{L} \quad (6.6)$$

$$\alpha_i (k_i^2 - m_i^2) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_L \quad (6.7)$$

$$\beta_i v_i \cdot k_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_S. \quad (6.8)$$

Daß die Gleichungssysteme (6.1-6.4) bzw. (6.5-6.8) in Analogie zu (3.39-3.41) aus einer gemischten Integraldarstellung der Form (3.45) hervorgehen, wenn man von den Propagatoren (2.13) bzw. (2.14) ausgeht, liegt auf der Hand. Da hieraus keineswegs folgt, daß die Gleichungen (6.5-6.8) die Singularitäten der Feynman-Amplituden der effektiven Theorie tatsächlich richtig beschreibt, wollen wir sie im folgenden etwas genauer untersuchen, wobei wir analog zu Abschnitt 3.3 vorgehen.

Hierzu gehen wir von der Parameterdarstellung (3.12)

$$Q = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i (q_i^2 - m_i^2) - \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{D_{\Gamma \setminus L}(\underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} \left( \sum_{j \in \mathcal{I}} \eta_{jL} \alpha_j q_j \right)^2 \quad (6.9)$$

aus, setzen  $q_i \rightarrow q_i + \lambda m_i^{(0)} v_i$ ,  $\alpha_i = \beta_i \lambda^{-1}$  für  $i \in \mathcal{I}_S$  und erhalten für  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} Q' &= \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i (q_i^2 - m_i^2) + 2 \sum_{j \in \mathcal{I}_S} \beta_j m_j^{(0)} v_j \cdot q_j \\ &\quad - \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{D'_{\Gamma \setminus L}(\underline{\alpha})}{D'(\underline{\alpha})} \left( \sum_{l \in \mathcal{I}_L} \eta_{lL} \alpha_l q_l + \sum_{s \in \mathcal{I}_S} \eta_{sL} \beta_s m_s^{(0)} v_s \right)^2, \end{aligned} \quad (6.10)$$

wobei der Strich an  $D$ ,  $D_{\Gamma \setminus L}$  wie üblich bedeutet, daß in dem betreffenden Ausdruck die schweren Parameter gleich null zu setzen sind. Die Lösung des linearen Gleichungssystems (6.5-6.6) ist durch

$$D'(\underline{\alpha}) q_i = \sum_{T1} \prime \left( \prod_{j \notin T1} \alpha_j \right) \sum_{\substack{i \\ \rightarrow}} \tilde{p} - \sum_{\substack{L \\ i \in L}} \left( \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \eta_{jL} \beta_j m_j^{(0)} v_j \right) \sum_{PT \supset L} \prime \left( \prod_{k \notin PT} \alpha_k \right) \quad (6.11)$$

gegeben, und Einsetzen in (6.10) führt natürlich zum Verschwinden der Summe über die Schleifen  $L$ . In Analogie zu (3.44) gilt

$$\frac{\partial Q'}{\partial \alpha_i} = q_i^2 - m_i^2 \quad i \in \mathcal{I}_L \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial Q'}{\partial \beta_i} = 2m_i^{(0)} v_i \cdot q_i \quad i \in \mathcal{I}_S, \quad (6.13)$$

so daß die Gleichungen (6.7-6.8) das Verschwinden von  $Q'$  und den Ableitungen nach den Parametern implizieren. Die Existenz einer Lösung von (6.5-6.8) führt somit tatsächlich zu einer Landau-Singularität.

Die Beziehung zwischen den Lösungen des Gleichungssystems (6.5-6.8) und dem analytischen Verhalten sind komplizierter, falls der kontrahierte Graph  $\tilde{\Gamma}$  schwere Schleifen enthält. In diesem Fall werden die obigen Betrachtungen ungültig, da  $Q'$  beim Nullsetzen der  $\alpha_i$ ,  $i \in \Gamma^0$  divergiert. Die Sonderrolle derartiger Graphen  $\tilde{\Gamma}$  wird auch anhand der Gleichung (6.6) deutlich. Für jede schwere Schleife  $l$  in  $\tilde{\Gamma}$  reduziert sich (6.6) auf

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_S} \eta_{jl} \beta_j m_j^{(0)} v_j = 0, \quad (6.14)$$

d. h. eine Konsistenzbedingung, die die unbekanntenen Variablen  $\underline{\alpha}$  und  $\underline{k}$  nicht enthält. Wenn die Geschwindigkeitsvektoren einer dieser schweren Schleifen linear unabhängig sind, ist die betreffende Gleichung nicht lösbar, sodaß  $\tilde{\Gamma}$  nicht zu einer Landau-Singularität führen kann. Zur Klärung der Situation ist es unumgänglich, die Pole von  $Q'$  zu beseitigen, wozu wir im nächsten Abschnitt an Kapitel 5 anknüpfen.

## 6.2 Parameterdarstellung

Im Gegensatz zur ursprünglichen Theorie, bei der wir die Hepp-Sektoren nur verwendet hatten, um die absolute Konvergenz nachzuweisen, spielen sie bei der effektiven Theorie eine wesentliche Rolle. Die Transformation (5.12) erschwert allerdings die Untersuchung der analytischen Eigenschaften, da die in Tabelle 6.1 angegebenen Homogenitätseigenschaften verlorengehen. Um von diesen optima-

	$\frac{A'}{D'}$	$\frac{B'_v}{D'}$	$\frac{K'_{vv}}{D'}$	$\frac{B'_{\xi,T1}}{D'}$	$\frac{B'_{\xi,PT}}{D'}$	$\frac{K'_{\xi\xi}}{D'}$
$\underline{\alpha}$	1	0	-1	0	-1	-1
$\underline{\beta}$	0	1	2	0	1	0
$(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$	1	1	1	0	0	-1
$\sim$	$XY$	$X(1-Y)$	$X \frac{(1-Y)^2}{Y}$	1	$\frac{1-Y}{Y}$	$\frac{1}{XY}$

Tabelle 6.1: Homogenitätseigenschaften

len Gebrauch zu machen, ändern wir die bisherige Wahl der Integrationsvariablen (5.11) wie folgt ab:

$$\alpha_{\Pi(i)} = XY \prod_{j=i}^{I_L-1} t_j^2 \quad (6.15)$$

$$\beta_a = X(1-Y) \prod_{i=1}^{I_L-1} t_i^{R_{ia}} \beta'_a \quad (6.16)$$



mit den Grenzen

$$0 \leq X < \infty, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad \beta'_i \geq 0, \quad \sum \beta'_i = 1. \quad (6.17)$$

Die relevanten graphentheoretischen Funktionen hängen von  $X$  und  $Y$  nur in Gestalt der einfacher Faktoren ab, die in der letzten Zeile von Tabelle 6.1 angegeben sind, so daß wir z. B.

$$\frac{K'_{vv}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}{D'(\underline{\alpha})} = X \frac{(1-Y)^2}{Y} \frac{K'_{vv}(\underline{t}, \underline{\beta}')}{D'(\underline{t})} \quad (6.18)$$

schreiben werden. Die vollständige Funktionaldeterminante lautet

$$\frac{\partial(\alpha_1 \dots \alpha_{I_L}, \beta_1 \dots \beta_{I_S})}{\partial(t_1 \dots t_{I_L-1}, \beta'_1 \dots \beta'_{I_S-1}, X, Y)} = 2^{I_L-1} X^{I-1} Y^{I_L-1} (1-Y)^{I_S-1} \prod_{i=1}^{I_L-1} t_i^{2i-1+S(\gamma_i)}, \quad (6.19)$$

so daß die Integration über  $X$  auf

$$\begin{aligned} & 2^{I_L-1} \Gamma(I - Ld/2 - G) i^{I-Ld/2-G} \int_0^1 \left( \prod_{i=1}^{I_L-1} dt_i t_i^{2i-1+S(\gamma_i)} \right) \int_{\Delta_{\beta'}} \\ & \int_0^1 dY (1-Y)^{I_S+F-1} Y^{I_L-1-(Ld/2+F+G)+(I-Ld/2-G)} \\ & \frac{1}{(D')^2} \frac{B'_{\xi, T1, s_1}}{D'} \dots \frac{B'_{\xi, T1, s_H}}{D'} \frac{B'_{\xi, PT, u_1}}{D'} \dots \frac{B'_{\xi, PT, u_F}}{D'} \frac{K'_{\xi\xi, v_1 w_1}}{D'} \dots \frac{K'_{\xi\xi, v_G w_G}}{D'} \\ & \left[ Y^2 \left( \frac{A'}{D'} - \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i(\underline{t}) m_i^2 \right) + Y(1-Y) \frac{B'_v}{D'} + (1-Y)^2 \frac{K'_{vv}}{D'} + i\varepsilon \right]^{-(I-Ld/2-G)} \end{aligned} \quad (6.20)$$

führt. Im Interesse der Übersichtlichkeit wurde die Abhängigkeit der graphischen Funktionen von  $\underline{\tilde{p}}, \underline{v}, \underline{t}, \underline{\beta}'$  unterdrückt, während der Integrand von  $Y$  nur in der explizit dargestellten Weise abhängt. Der Faktor  $Y^{-(Ld/2+F+G)}$  rührt von  $(D')^{-d/2}$  sowie den Pseudo-Tree-Faktoren her, während  $Y^{(I-Ld/2-G)}$  durch Herausziehen eines Faktors  $Y^{-1}$  aus der eckigen Klammer entstanden ist. Der Exponent von  $Y$  lautet also

$$2I_L + I_S - Ld - F - 2G - 1 \quad (6.21)$$

und ist wegen  $F + 2G \leq D_L(\Gamma)$  größer als  $-1$ , wenn der Graph  $\Gamma$  als ganzer die Power-Counting Bedingung (3.16) erfüllt. Auch der Exponent von  $(1-Y)$  ist wegen  $F \geq 0$  und  $I_S \geq 1$  größer als  $-1$ .

Diese Darstellung besitzt nun alle gewünschten Eigenschaften: Das Integrationsgebiet ist kompakt und der Ausdruck in der eckigen Klammer sowie der restliche Integrand sind dort (und in einer offenen Umgebung) analytisch. Dies folgt aus den bekannten Eigenschaften der graphentheoretischen Funktionen in einem Hepp-Sektor und der Diskussion von  $K'_{vv}/D'$  in Kapitel 5. Zu untersuchen wäre

nun der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  als Distribution bzgl.  $\tilde{p}$  bei gegebenen Geschwindigkeiten  $\underline{v}$  oder als analytische Funktion der invarianten Skalarprodukte. Wir werden uns an dieser Stelle auf einige Bemerkungen zu den Landau-Singularitäten beschränken. Relevant für diese sind die Nullstellen von

$$Q' \equiv Y^2 \left( \frac{A'}{D'} - \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i(\underline{t}) m_i^2 \right) + Y(1-Y) \frac{B'_v}{D'} + (1-Y)^2 \frac{K'_{vv}}{D'} \quad (6.22)$$

am Rand bzw. die Pinches im Inneren des Integrationsgebietes, was u. a. auf die Bedingungen

$$Q' = 0 \quad (6.23)$$

$$Y = 0 \vee Y = 1 \vee \frac{\partial}{\partial Y} Q' = 0 \quad (6.24)$$

führt. Am Endpunkt  $Y = 1$  reduziert sich  $Q'$  auf die Funktion  $Q = \frac{A'}{D'} - \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \alpha_i m_i^2$  des reduzierten Graphen  $\Gamma'$ , die von den  $\underline{\beta}'$  unabhängig ist. Dessen Singularitäten sind daher auch solche des Graphen  $\Gamma$ , was nicht weiter überrascht, da die harten Impulse  $\sim \lambda$  an  $\Gamma'$  vorbeifließen. Weniger trivial sind Lösungen von  $\frac{\partial}{\partial Y} Q' = 0$ ,  $Y \neq 0, 1$ , da diese auf Bedingungen an  $\tilde{p}$  und  $\underline{v}$  führen. An der Integrationsgrenze  $Y = 0$ , auf die wir uns in der Folge konzentrieren werden, bleibt von  $Q'$  nur  $K'_{vv}/D'$ , unabhängig von den äußeren Impulsen  $\tilde{p}$ , übrig. Daher können die entsprechenden Singularitäten, die wir als ‘Geschwindigkeits-Singularitäten’ bezeichnen wollen, dazu führen, daß der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  für alle Werte von  $\tilde{p}$  nicht existiert.

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Wahl eines  $R_{ia}$  in (5.12) größer als  $R_{ia}^0$  gem. (5.14) zu einer Endpoint-Singularität führt. Hierzu nehmen wir  $R_{i_0 a_0} > R_{i_0 a_0}^0$  an. An der Stelle  $\beta'_a = \delta_{aa_0}$  reduziert sich  $K'_{vv}/D'$  auf

$$\frac{K'_{vv, a_0 a_0}}{D'} \prod_{i=1}^{I_L-1} t_i^{2R_{i a_0}}, \quad (6.25)$$

was sich für  $t_{i_0} \rightarrow 0$  wie

$$t_{i_0}^{2(R_{i_0 a_0} - R_{i_0 a_0}^0)} \quad (6.26)$$

verhält. Bei  $Y = 0$ ,  $\beta'_a = \delta_{aa_0}$ ,  $t_{i_0} = 0$  liegt somit unabhängig von  $\tilde{p}$  und  $\underline{v}$  eine Endpoint-Singularität vor. Ob diese zur Divergenz des Integrals für  $\varepsilon \rightarrow 0$  führt, müßte eine genauere Betrachtung zeigen.

In Abschnitt 6.1 hatten wir gesehen, daß diejenigen Landau-Singularitäten einer genaueren Untersuchung bedürfen, deren kontrahierter Graph  $\tilde{\Gamma}$  schwere Schleifen enthält, also solche, die nur aus schweren Linien bestehen. Anstelle einer vollständigen Analyse, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, werden wir uns darauf beschränken zu zeigen, daß bereits die Existenz einer nichttrivialen ( $\underline{\beta} \neq 0$ ) Lösung der Gleichung

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_S} \eta_{iL} \beta_i m_i^{(0)} v_i = 0 \quad (6.27)$$

für eine beliebige Schleife  $L$  zu einer Singularität führt. Da in (6.27) nur über die schweren Linien der Schleife  $L$  summiert wird, ist es möglich, daß verschiedene Schleifen  $L$  auf (6.27) führen. In diesem Fall wählen wir diejenige, die die geringste Zahl ( $N$ ) leichter Linien enthält. Wir betrachten einen Sektor  $\Pi$ , bei dem diesen leichten Linien die  $N$  kleinsten  $\alpha$ -Parameter, d. h.  $\alpha_{\Pi(1)} \dots \alpha_{\Pi(N)}$  zugeordnet werden. Wenn man nun die  $\beta'$ -Parameter aller schweren Linien, die nicht in  $L$  liegen, sowie  $t_{N+1} \dots t_{I_L-1}$  gleich null setzt, reduziert sich

$$\frac{K'_{vv}}{D'} = - \sum_L \frac{D_{\Gamma \setminus L}}{D} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_S} \eta_{iL} \beta'_i m_i^{(0)} v_i \prod_{j=1}^{I_L-1} t_j^{R_{ji}} \right)^2 \quad (6.28)$$

auf den Beitrag der Schleife  $L$ , proportional zu

$$\left( \sum_{i \in \mathcal{I}_S} \eta_{iL} \beta'_i m_i^{(0)} v_i \right)^2. \quad (6.29)$$

Wenn es  $\underline{\beta}'$  gibt, derart daß  $\sum_{i \in \mathcal{I}_S} \eta_{iL} \beta'_i m_i^{(0)} v_i$  orthogonal auf allen  $v_i$  mit  $i \in L$ ,  $\beta'_i \neq 0$  ist, verschwindet  $K'_{vv}/D'$  mitsamt den Ableitungen nach  $\beta'_i$ ,  $i \in \mathcal{I}_S(L)$  und  $t_1 \dots t_N$ , womit die Bedingungen für eine Singularität erfüllt sind. Insbesondere gilt dies, wenn Gleichung (6.27) eine Lösung besitzt, die Geschwindigkeiten der Schleife  $L$  also linear abhängig sind. Daß zwischen diesen Singularitäten und den ‘mixed second-type singularities’ der herkömmlichen Störungstheorie [41, 39] ein Zusammenhang besteht, liegt auf der Hand, soll jedoch an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden, da wir uns in erster Linie für die Singularitäten auf dem physikalischen Blatt interessieren. Damit eine solche vorliegt müssen die  $\underline{\beta}'$  in (6.27) reell und nichtnegativ sein, sodaß lineare Abhängigkeit der Geschwindigkeiten  $\underline{v}$  nicht ausreicht. Dies wird anhand des einfachsten nichttrivialen Falles, einer Schleife mit zwei schweren Linien  $i$  und  $j$  deutlich, für den (6.27) zu

$$\eta_{iL} \beta_i m_i^{(0)} v_i + \eta_{jL} \beta_j m_j^{(0)} v_j = 0 \quad (6.30)$$

wird. Die Bedingung für die Existenz einer Lösung  $\beta_i, \beta_j > 0$  lautet damit

$$v_i = \pm v_j \quad \text{für} \quad \eta_{iL} \eta_{jL} = \mp 1. \quad (6.31)$$

Von den Singularitäten am Endpunkt  $Y = 0$  sind diese zweifellos die wichtigsten. Ob es weitere gibt, sowie das Verhalten der Feynman-Amplituden in deren Umgebung muß einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Die physikalische Bedeutung der Gleichung (6.31) wird anhand zweier einfacher Beispiele deutlich, die wir in Anhang D.2 näher betrachten werden:

Im ersten Fall liegt die Singularität für  $v_1 = v_2$  vor, d. h. bei Streuung zweier schwerer Quarks mit gleicher Geschwindigkeit. Bezogen auf den Box-Graphen wurde hierauf schon in [6] hingewiesen, obige Betrachtung gilt dagegen für beliebig komplexe Graphen. Die Geschwindigkeitssingularität des rechten Graphen tritt bei  $v_1 = -v_2$  auf, d. h. wenn die Linien 1 und 2 ein schweres Quark und Antiquark mit gleicher physikalischer Geschwindigkeit darstellen, was einem Paarzeugungsprozeß entspricht.

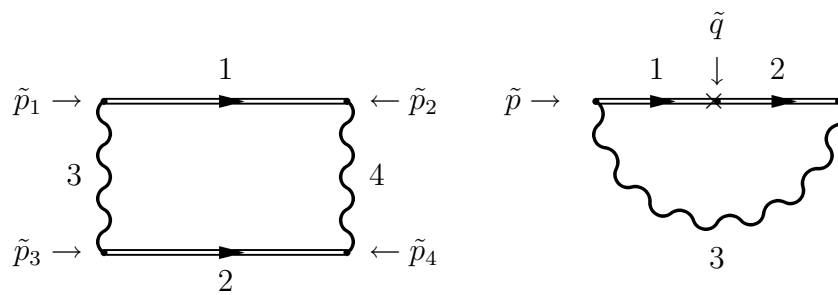


Abbildung 6.1: Ein-Schleifen-Graphen mit zwei schweren Linien



# Kapitel 7

## Renormierung divergenter Graphen

### 7.1 BPHZ-Renormierung in Parameterdarstellung

Im vorangegangenen Abschnitt hatten wir hinreichende Bedingungen für die UV-Konvergenz von Feynman-Amplituden hergeleitet. Man kann zwar auch notwendige Bedingungen angeben, diese sind jedoch weniger wichtig, da man ohnehin häufig Übersubtraktionen vornimmt. Die klassische Methode zur physikalisch konsistenten Beseitigung der UV-Divergenzen besteht in der Einführung eines UV-Cutoffs  $\Lambda$  (in der Parameterdarstellung am einfachsten durch Abschneiden der  $\alpha$ -Integrationen an der unteren Grenze) und geeigneter cutoff-abhängiger Modifikation der Kopplungen, derart, daß der Limes  $\Lambda \rightarrow \infty$  existiert. Während diese Vorgehensweise (neben anderen) in der konstruktiven QFT (s. z. B. [5]) nach wie vor ihre Berechtigung hat, ist die von Bogolubov und Parasiuk angegebene [29, 30] für eine systematische Untersuchung der Störungsreihe zweckmäßiger. Hierbei bestimmt man, für jeden Feynman-Graphen  $\Gamma$  getrennt, auf rekursive Weise die Beiträge der Counterterme in der Lagrange-Dichte zu  $\Gamma$  und seinen Subgraphen. In Zimmermanns Formulierung [31] geschieht dies durch Ersetzung des ursprünglichen Integranden  $I_\Gamma(\underline{p}, \underline{k})$  in der Impulsdarstellung durch den renormierten Integranden  $R_\Gamma(\underline{p}, \underline{k})$ , mit dem

$$\tilde{T}_{\Gamma,ren}^\varepsilon = \int d\underline{k} R_\Gamma(\underline{p}, \underline{k}) \quad (7.1)$$

absolut konvergiert<sup>1</sup>, so daß die Einführung eines Cutoff völlig entfallen kann.

---

<sup>1</sup>Die angegebene Vorschrift macht beliebige Feynman-Amplituden endlich, unabhängig davon, ob diese einer renormierbaren oder nichtrenormierbaren Theorie entstammen. Der Unterschied zwischen diesen manifestiert sich lediglich in der Anzahl der erforderlichen Renormierungsbedingungen, die nur bei renormierbaren Theorien endlich ist [28].

Als ‘Renormalization-Parts’ bezeichnen wir diejenigen ein-teilchen-irreduziblen generalisierten Vertices  $\gamma$ , deren Divergenzgrad nichtnegativ ist ( $\delta(\gamma) \geq 0$ ). Nach Bogolubov/Parasiuk setzt man

$$R_\Gamma = \begin{cases} (1 - T_p^{\delta(\Gamma)})\bar{R}_\Gamma & \Gamma \text{ ist Renormalization-Part} \\ \bar{R}_\Gamma & \Gamma \text{ ist kein Renormalization-Part} \end{cases} \quad (7.2)$$

wobei  $\bar{R}_\Gamma$  rekursiv durch

$$\bar{R}_\gamma = I_\gamma + \sum_C I_{\gamma/\gamma_1 \dots \gamma_c} \prod_{i=1}^c (-T_p^{\delta(\gamma_i)} \bar{R}_{\gamma_i}) \quad (7.3)$$

definiert ist. Die Summe  $\sum_C$  läuft über alle Mengen  $C = \{\gamma_1 \dots \gamma_c\}$  disjunkter Renormalization-Parts, wobei  $C = \{\gamma\}$  ausgeschlossen ist.  $I_{\gamma/\gamma_1 \dots \gamma_c}$  ist der (unrenormierte) Integrand des Graphen, der aus  $\gamma$  hervorgeht, wenn man die Renormalization-Parts  $\gamma_1 \dots \gamma_c$  zu Punkten kontrahiert, der also insbesondere nur aus Linien besteht, die verschiedene Renormalization-Parts verbinden.  $T_p^{\delta(\gamma)} \bar{R}_\gamma$  ist das Taylor-Polynom der Ordnung  $\delta(\gamma)$  der Amplitude des Graphen  $\gamma$  bezüglich seiner unabhängigen äußeren Impulse. Für eine Motivation dieser Definitionen s. [29].

Die explizite Lösung der Gleichungen (7.2-7.3) wird (in extrem kompakter Notation) durch die sog. ‘Waldformel’ angegeben:

$$R_\Gamma = \sum_F \left( \prod_{\gamma \in F} -T_p^{\delta(\gamma)} \right) I_\Gamma. \quad (7.4)$$

Summiert wird hier über alle Wälder (forests)  $F$  aus Renormalization-Parts, wobei der leere Wald  $F = \emptyset$  auf den unsubtrahierten Integranden  $I_\Gamma$  führt. Die Anordnung der Taylor-Operatoren ist so zu wählen, daß  $T_p^{\delta(\gamma_1)}$  links von  $T_p^{\delta(\gamma_2)}$  steht, wenn  $\gamma_1 \supset \gamma_2$  gilt, während sie für disjunkte Graphen irrelevant ist. Falls  $\Gamma$  selbst Renormalization-Part ist, tritt jeder Wald in einer Version mit bzw. ohne  $\Gamma$  als Element auf, was der Wirkung von  $(1 - T_p^{\delta(\Gamma)})$  in (7.2) entspricht. Für den rein kombinatorischen Beweis s. z. B. [31]<sup>2</sup>. Auf die einfache Form

$$R_\Gamma = \prod_r (1 - T_p^{\delta(\gamma_r)}) I_\Gamma \quad (7.5)$$

reduziert sich (7.4) genau dann, wenn alle Renormalization-Parts paarweise nicht-überlappend sind.

Im Rahmen der Renormierungstheorie im Impulsraum spielt die Diskussion ‘zulässiger’ Parametrisierungen der inneren Impulse als Funktionen der äußeren

<sup>2</sup>Dort werden Renormalization-Parts lediglich als oberflächlich divergente 1PI-Subgraphen definiert, also ohne die Forderung nach Vollständigkeit. Wie Zimmermann später (Beitrag zu [45]) gezeigt hat, fallen die dadurch gegenüber BPH hinzukommenden Terme automatisch heraus, so daß beide Definitionen äquivalent sind.

und der Schleifenimpulse eine große Rolle. Da sich die vorliegende Arbeit auf die Parameterdarstellung stützt, die davon manifest unabhängig ist, werden wir hier lediglich die Übersetzung von (7.4) in diese Darstellung behandeln. Wir beginnen, indem wir das Spinpolynom  $Z(\underline{k}, \underline{p})$  in Monome (ohne Lorentz-Indices) zerlegen

$$Z(\underline{k}, \underline{p}) = \sum_{\chi} K_{\chi} \prod_{i=1}^{M_{\chi}} p_{m_{\chi,i}} \prod_{j=1}^{N_{\chi}} k_{n_{\chi,j}}, \quad (7.6)$$

wobei wir jeweils nur einen Term  $\chi$  betrachten und die Konstante  $K_{\chi}$  ignorieren. Zunächst sei eine Amplitude ohne Subdivergenzen betrachtet, auf die also nur  $T_p^{\delta(\Gamma)}$  anzuwenden ist. Dazu äquivalent sind die Skalierung aller äußeren Impulse  $\underline{p}$  mit  $\zeta$  und Anwendung des Operators  $T_{\zeta}^{\delta(\Gamma)}$ , der anschließend  $\zeta = 1$  setzt. Da die Linienimpulse  $\underline{k}$  von den äußeren Impulsen unabhängig sind, ergibt sich

$$\prod_{u=1}^{M_{\chi}} p_{m_{\chi,u}} \int \prod_{i=1}^I d^4 k_i \frac{1}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \prod_{v=1}^{N_{\chi}} k_{n_{\chi,v}} \\ (1 - T_{\zeta}^{\delta(\Gamma)}) \zeta^{M_{\chi}-4(V-1)} \prod_{j=1}^V \delta^4(p_j + \sum_{l=1}^I \epsilon_{jl} \frac{k_l}{\zeta}). \quad (7.7)$$

Auf Graphen mit beliebigen Subdivergenzen kann man (7.7) leicht verallgemeinern, da jeder Wald  $F$  nur nichtüberlappende Subgraphen  $\Gamma_i$  enthält, so daß man für jeden von diesen eine Skalenvariable  $\zeta_i$  einführt:

$$\prod_{u=1}^{M_{\chi}} p_{m_{\chi,u}} \int \prod_{i=1}^I d^4 k_i \frac{1}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \prod_{v=1}^{N_{\chi}} k_{n_{\chi,v}} \\ \sum_F \prod_{\gamma_r \in F} (-T_{\zeta_i}^{\delta(\gamma_r)}) \prod_{\gamma_s \in F} \zeta^{M_{\chi}(\gamma_s)-4(V(\gamma_s)-1)} \prod_{j=1}^V \delta^4(p_j + \sum_l \epsilon_{jl} \frac{k_l}{\sigma_l})_{\zeta=1} \quad (7.8)$$

mit

$$\sigma_l = \prod_{\gamma_t \ni l} \zeta_t. \quad (7.9)$$

$M_{\chi}(\gamma_s)$  bezeichnet die Anzahl der Faktoren  $p_{m_{\chi,\cdot}}$ , die von Vertices herrühren, die im Subgraphen  $\gamma_s$  liegen. Der Übergang zur Parameterdarstellung erfolgt analog zu Anhang B, wobei die Deltadistributionen in (B.1) durch die in (7.8) zu ersetzen sind. Die Mitnahme der Faktoren  $\zeta_i$  bei den Umformungen führt anstelle von (B.20) auf den Ausdruck

$$Q_{I,V} \delta(\sum_{i=1}^V p_i) \prod_{\gamma_j \in F} \zeta_j^{4I(\gamma_j)} \frac{1}{D(\underline{\alpha}')^2} \exp i \frac{A(\underline{\alpha}', \underline{p}) + B(\underline{\alpha}', \underline{p}, \underline{\xi}') + K(\underline{\alpha}', \underline{\xi}')}{D(\underline{\alpha}')^2} \quad (7.10)$$

mit

$$\alpha'_i = \alpha_i \sigma_i^2 \quad \text{und} \quad \xi'_i = \xi_i \sigma_i. \quad (7.11)$$



Da die  $\gamma_i$  zusammenhängend sind, gilt  $I(\gamma_i) - V(\gamma_i) + 1 = L(\gamma_i)$ , so daß wir erhalten:

$$\prod_{i=1}^{M_\chi} p_{m_{\chi,i}} \int_0^\infty \prod_{j=1}^I d\alpha_j e^{-i\alpha_j(m_i^2 - i\varepsilon)} \prod_{l=1}^{N_\chi} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_{n_{\chi,l}}} \right) \sum_F \prod_{\gamma_r \in F} (-T_{\zeta_r}^{\delta(\gamma_r)})$$

$$\prod_{\gamma_s \in F} \zeta_s^{M_\chi(\gamma_s) + 4L(\gamma_s)} \frac{1}{D(\underline{\alpha}')^2} \exp i \frac{A(\underline{\alpha}', \underline{p}) + B(\underline{\alpha}', \underline{p}, \underline{\xi}') + K(\underline{\alpha}', \underline{\xi}')}{D(\underline{\alpha}')^2} \Big|_{\underline{\xi}=0}. \quad (7.12)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß der Ausdruck in der letzten Zeile für  $\underline{\alpha} \geq 0, \underline{\zeta} \geq 0$  eine gemeinsame Taylor-Entwicklung in den  $\zeta$  besitzt:  $A/D$  und  $B/D$  bereiten ohnehin keine Schwierigkeiten, während die Pole von  $D(\underline{\alpha}')^{-2}$  bzgl. der  $\zeta$  durch den Faktor  $\prod_{\gamma_s \in F} \zeta_s^{4L(\gamma_s)}$  kompensiert werden. Was  $\frac{K(\underline{\alpha}', \underline{\xi}')}{D(\underline{\alpha}')^2}$  angeht, so wird das  $\zeta_i^{-2}$ -Verhalten von  $\frac{\sum_{PT \supset L} (\prod_{i \notin PT} \alpha_i')}{D(\underline{\alpha}')^2}$  im Fall  $L \subset \gamma_i$  dadurch ausgeglichen, daß gemäß (7.11)  $(\sum_k \eta_{kL} \xi_k)^2$  einen Faktor  $\zeta_i^2$  liefert. Die Differentiationen nach  $\underline{\xi}$  und die Taylorentwicklung in  $\underline{\zeta}$  sind somit vertauschbar, so daß man

$$\prod_{i=1}^{M_\chi} p_{m_{\chi,i}} \int_0^\infty \prod_{j=1}^I d\alpha_j e^{-i\alpha_j(m_i^2 - i\varepsilon)} \sum_F \prod_{\gamma_r \in F} (-T_{\zeta_r}^{\delta(\gamma_r)} \zeta_r^{M_\chi(\gamma_r) + N_\chi(\gamma_r) + 4L(\gamma_r)})$$

$$\left\{ \prod_{l=1}^{N_\chi} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_{n_{\chi,l}}} \right) \frac{1}{D(\underline{\alpha}')^2} \exp i \frac{A(\underline{\alpha}', \underline{p}) + B(\underline{\alpha}', \underline{p}, \underline{\xi}') + K(\underline{\alpha}', \underline{\xi}')}{D(\underline{\alpha}')^2} \right\} \Big|_{\underline{\xi}=0} \quad (7.13)$$

schreiben kann. Mit (3.15) kann

$$\prod_{\gamma_r \in F} (-T_{\zeta_r}^{\delta(\gamma_r)} \zeta_r^{M_\chi(\gamma_r) + N_\chi(\gamma_r) + 4L(\gamma_r)}) \quad (7.14)$$

durch

$$\prod_{\gamma_r \in F} (-\mathcal{T}_{\zeta_r}^{-2I(\gamma_r) + U(\gamma_r)}) \quad (7.15)$$

ersetzt werden, wobei  $\mathcal{T}_\zeta^n$  die Laurent-Entwicklung bzgl.  $\zeta$  bis zur Potenz  $\zeta^n$  extrahiert (für weitere Eigenschaften siehe [33, 34]). Bei BPHZ-Renormierung sind die 'Übersubtraktionskoeffizienten'  $U(\gamma_r)$  durch

$$U(\gamma_r) = D(\gamma_r) - M_\chi(\gamma_r) - N_\chi(\gamma_r) \geq 0 \quad (7.16)$$

gegeben und rühren daher, daß die Monomials  $\chi$  in (7.6) im allgemeinen nicht den maximalen Grad  $D(\gamma_r)$  besitzen. Eine andere Wahl dieser Koeffizienten führt auf renormierte Amplituden, sich von denen gemäß BPHZ durch endliche Renormierungen unterscheiden. Insbesondere entspricht  $U(\gamma_r) \equiv 0$  der minimal möglichen Renormierung.

Daß (7.13) für jeden Term  $\chi$  ein absolut konvergentes Integral darstellt, beweist man am einfachsten in zwei Schritten. Zuerst zeigt man [33, 34]), daß der Operator

$$\sum_F \prod_{\gamma_r \in F} (-\mathcal{T}_{\zeta_r}^{-2I(\gamma_r)+U(\gamma_r)}), \quad (7.17)$$

bei Anwendung auf die geschweifte Klammer in (7.13) durch einen Operator ersetzt werden kann, der von der Topologie des betrachteten Graphen völlig unabhängig ist. Eine Möglichkeit hierfür ist die sog. Renormierung über Nester [34] mittels des Operators

$$R = (1 + \sum_N \prod_{S \in N} (-\mathcal{T}_S^{-2I(S)+U(S)})), \quad (7.18)$$

wobei unter einem Nest  $N$  eine nichtleere, bzgl. Inklusion total geordnete Familie von Teilmengen aus  $\mathcal{I}_\Gamma$  verstanden wird und  $\mathcal{T}_S$  auf die  $\alpha$ -Parameter in  $S$  wirkt. Hierzu äquivalent [33, 34] ist der Operator

$$\prod_{\gamma_r \in X} (1 - \mathcal{T}_{\zeta_r}^{-2I(\gamma_r)+U(\gamma_r)}), \quad (7.19)$$

bei dem die Menge  $X$  zunächst alle Renormalization-Parts enthält, jedoch ohne Änderung des Ergebnisses auf alle divergenten Subgraphen (gleichgültig ob zusammenhängend, 1PI, vollständig) oder gar alle  $2^I - 1$  Subgraphen von  $\Gamma$  ausgedehnt werden kann. Bei dieser Darstellung ist auch die Anordnung der  $(1 - \mathcal{T})$ -Faktoren beliebig. Gl. (7.19) erinnert an (7.5), setzt aber nicht voraus, daß die Renormalization-Parts nicht überlappen. Unter Verwendung der Darstellungen (7.18) bzw. (7.19) und unter gewissen Bedingungen an die Übersubtraktionskoeffizienten  $U(\gamma_i)$  (die insbesondere durch  $U(\gamma_i) \equiv 0$  und (7.16) erfüllt werden), gestalten sich die Konvergenzbeweise ([34] bzw. [35, 36]) relativ einfach. Eine zentrale Rolle spielt bei diesen Beweisen die Tatsache, daß der Integrand in (7.13) bzgl. der Skalenvariablen  $\underline{\zeta}$  eine gemeinsame Laurent-Entwicklung besitzt, solange nur die Graphen  $\gamma_r$  nicht-überlappend sind.

## 7.2 HQET: Erste Überlegungen

Feynman-Amplituden, die in der vollen Theorie divergieren, müssen selbstverständlich renormiert werden, bevor man den Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  untersuchen kann, wobei das asymptotische Verhalten von den dabei zugrundegelegten Renormierungsbedingungen abhängen wird. Ob die verwendete Subtraktionsmethode (BPHZ, dimensional, analytisch, ...) direkt zur Einhaltung dieser Bedingungen führt oder zu diesem Zweck endliche Counterterme in die Lagrangedichte eingeführt wurden, ist hingegen irrelevant; es liegt jedoch nahe, eine Impulsraum-Renormierungsmethode zu verwenden, da der heavy-quark Limes die äußeren Impulse involviert.

Zur Motivation der in Abschnitt 7.3 zugrundegelegten Renormierungsvorschrift soll zunächst kurz der einfachste divergente Graph, die Selbstenergie eines schweren Teilchens, in Einschleifenordnung diskutiert werden. In Anhang D.3 wird das entsprechende Feynman-Integral der vollen Theorie gemäß BPHZ renormiert, wobei der Renormierungspunkt durch den Index 0 bzw.  $v$  angedeutet wird. Mit der Ersetzung  $p = \tilde{p} + mv$ ,  $m = \lambda m_0$  ergibt sich dann für  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma_0(\tilde{p}) = & -\frac{e^2}{16\pi^2} \gamma^\nu \left\{ -\lambda m_0 \left(1 + \frac{3}{4}\psi\right) - \ln \lambda \, 2v \cdot \tilde{p} (1 + \psi) - \frac{3}{4} \not{\tilde{p}} + (v \cdot \tilde{p}) \psi \right. \\ & \left. + (1 + \psi) [2(m_0 + v \cdot \tilde{p}) + m_0 F(\frac{v \cdot \tilde{p}}{m_0})] \right\} \gamma_\nu + o(1) \quad (7.20) \end{aligned}$$

mit

$$F(X) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^2} \left[ \ln \left( \alpha^2 \frac{\mu^2}{m_0^2} + (1 - \alpha)^2 - 2\alpha(1 - \alpha)X + i0 \right) + 2\alpha(1 + X) \right]. \quad (7.21)$$

Dieses  $O(\lambda)$ -Verhalten ist leicht zu verstehen. Während bei dem unrenormierten Integranden die gegen unendlich strebenden Massen durch die äußeren Impulse kompensiert werden, was für  $\lambda \rightarrow \infty$  zu einem nichttrivialen Grenzwert führen würde, wenn es die UV-Divergenz nicht gäbe, ist dies bei den Countertermen nicht der Fall. Daher verschwinden diese für  $m \rightarrow \infty$ , so daß das  $O(\lambda)$ -Verhalten gerade die ursprüngliche lineare Divergenz widerspiegelt, in weitgehender Analogie zur Pauli-Villars Regularisierung. Man könnte nun in eine detaillierte Untersuchung des asymptotischen Verhaltens für  $\lambda \rightarrow \infty$  eintreten, mit dem Ziel die Divergenzen durch eine geeignete Wahl endlicher (für  $\lambda < \infty$ ) Counterterme zu eliminieren. Ein solches Programm wurde in [38] für den Limes verschwindender Masse in der  $\phi_4^4$ -Theorie durchgeführt und mit der Angabe eines R-Operators abgeschlossen, der bei Anwendung auf die masselosen Feynman-Integrale direkt auf das entsprechende Ergebnis führt. Im Fall der HQET läßt sich dieser Weg glücklicherweise abkürzen, da die Lösung auf der Hand liegt: Die divergenten (Sub-)Graphen sind nicht durch Taylor-Entwicklung bzgl. ihrer äußeren Impulse  $\underline{p}$ , sondern hinsichtlich der Restimpulse  $\tilde{p}$  zu renormieren, was der Wahl von null verschiedener Renormierungspunkte in der ursprünglichen Theorie entspricht. Eine solche Vorgehensweise wurde gelegentlich (Gomes, Mitter, ...) zur Renormierung masseloser Theorien vorgeschlagen, konnte sich jedoch nicht gegen das Lowenstein-Zimmermannsche Verfahren durchsetzen, da durch die Einführung weitgehend willkürlicher Hilfs-Vierervektoren die Lorentz-Kovarianz verlorengeht. In der HQET stellt dies natürlich kein Problem dar, da sich die harten Impulse in (2.10) als Renormierungspunkte aufdrängen. Im Fall der schweren Selbstenergie beläuft sich dieses Verfahren auf die Ersetzung  $p = \tilde{p} + mv$ ,  $m = \lambda m_0$  und die Subtraktion des Taylor-Polynoms 1. Grades bzgl.  $\tilde{p}$ . Die hieraus hervorgehende Funktion besitzt für  $\lambda \rightarrow \infty$  den Grenzwert

$$\Sigma_v(\tilde{p}) = -\frac{e^2}{16\pi^2} \gamma^\nu (1 + \psi) \gamma_\nu \left\{ m_0 \left( F\left(\frac{v \cdot \tilde{p}}{m_0}\right) - F(0) \right) + v \cdot \tilde{p} \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} \right\}. \quad (7.22)$$

Während die bei  $p = 0$  renormierte Selbstenergie in der vollen Theorie auch für  $m \neq 0, \mu = 0$  existiert, divergiert sie für  $\mu \rightarrow 0$ , falls auf der Massenschale renormiert wurde. Aufgrund der Analogie zur on-shell Renormierung ist auch der Ausdruck (7.22) IR-divergent. Eine nähere Untersuchung der Infrarotdivergenzen in der HQET wäre wünschenswert, wird in dieser Arbeit jedoch nicht unternommen.

Zum Vergleich seien noch (ohne Rechnung) die entsprechenden Ausdrücke für den Vertexgraphen nach BPHZ-

$$\begin{aligned} \Lambda_0^\mu(\tilde{p}, q) &= \frac{e^3}{16\pi^2} \gamma^\nu \left\{ -2v^\mu(1 + \not{p})(\ln \lambda - 1) + v^\mu \not{p} - \frac{3}{4} \gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_0}{v \cdot q} v^\mu(1 + \not{p}) \left( F\left(\frac{v \cdot (\tilde{p} + q)}{m_0}\right) - F\left(\frac{v \cdot \tilde{p}}{m_0}\right) \right) \right\} \gamma_\nu + o(1) \end{aligned} \quad (7.23)$$

bzw. modifizierter BPHZ-Renormierung

$$\Lambda_v^\mu(\tilde{p}, q) = \frac{e^3}{16\pi^2} v^\mu \gamma^\nu (1 + \not{p}) \gamma_\nu \left\{ \frac{m_0}{v \cdot q} \left( F\left(\frac{v \cdot (\tilde{p} + q)}{m_0}\right) - F\left(\frac{v \cdot \tilde{p}}{m_0}\right) \right) + \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} \right\}. \quad (7.24)$$

angegeben. In der HQET ist der renormierte Vertex (7.24) erheblich einfacher als in der ursprünglichen Theorie, ja er ist im wesentlichen nichts anderes als die Differenz zweier Selbstenergien,

$$\Lambda_v^\mu(\tilde{p}, q) = e \frac{v^\mu}{v \cdot q} (\Sigma_v(\tilde{p}) - \Sigma_v(\tilde{p} + q)) \quad (7.25)$$

was für  $q \rightarrow 0$  gerade die Ward-Identität ist.

## 7.3 HQET: Vollständige Formulierung

### 7.3.1 Modifizierter R-Operator für die intermediäre Theorie

In Abschnitt 7.2 hatten wir argumentiert, daß die Renormierung der intermediären Theorie im Hinblick auf den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  nicht durch Taylor-Subtraktion bzgl. der  $\underline{p}$  sondern bzgl. der  $\tilde{\underline{p}} = \underline{p} + O(\lambda)$  vorzunehmen ist, was einer Definition der Renormierungspunkte durch die harten Impulse entspricht. Zur Übersetzung dieser Vorschrift in die Parameterdarstellung betrachten wir erneut Gl. (7.8) und nehmen die Ersetzung (2.10) vor. Gemäß Anmerkung 1 in Kap. 4 enthält der Faktor  $\prod_{u=1}^{M_\chi} p_{m_\chi, u}$  keine harten Anteile, so daß dieser zu  $\prod_{u=1}^{M_\chi} \tilde{p}_{m_\chi, u}$  wird. Im übrigen ist nur der letzte Faktor in (7.8) betroffen, der zu

$$\prod_{j=1}^V \delta^4 \left( \tilde{\underline{p}}_j + \sum_{l=1}^I \epsilon_{jl} \left( \frac{k_l}{\sigma_l} - \lambda m_l^{(0)} v_l \right) \right) \quad (7.26)$$

wird. Der Übergang zu heavy-quark Renormierungsbedingungen gemäß Abschnitt 7.2 besteht nun lediglich in der Ersetzung dieses Ausdrucks durch

$$\prod_{j=1}^V \delta^4 \left( \tilde{p}_j + \sum_{l=1}^I \epsilon_{jl} \frac{k_l - \lambda m_l^{(0)} v_l}{\sigma_l} \right), \quad (7.27)$$

was der Substitution

$$v_i \rightarrow v'_i = v_i \sigma_i^{-1} \quad (7.28)$$

entspricht. Die sich anschließende Einführung von Parametern und Integration über die Impulse verläuft wie gewohnt. Insbesondere ist der erste Term im Exponenten von (4.6) unabhängig von  $\zeta$ , so daß dessen Kompensierung der schweren Massen durch die Renormierung nicht beeinträchtigt wird. Damit ergibt sich die renormierte Amplitude der intermediären Theorie in Analogie zu (4.8) und (7.12) als

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{M_\chi} \tilde{p}_{m_\chi, i} \int_0^\infty \prod_{j=1}^I (d\alpha_j e^{-\epsilon \alpha_j}) e^{-i \sum_{l \in \mathcal{I}_L} \alpha_l m_l^2} \sum_F \prod_{\gamma_r \in F} (-T_{\zeta_r}^{\delta(\gamma_r)} \zeta_r^{M_\chi(\gamma_r) + 4L(\gamma_r)}) \\ & \prod_{t=1}^{N_\chi} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_{n_\chi, t}} \right) \exp i \frac{B_\xi(\underline{\alpha}', \underline{\tilde{p}}, \underline{v}', \underline{\xi}') + K_{\xi\xi}(\underline{\alpha}', \underline{\xi}')}{D(\underline{\alpha}')} \\ & \frac{1}{D(\underline{\alpha}')^2} \exp i \frac{A(\underline{\alpha}', \underline{\tilde{p}}) + B_v(\underline{\alpha}', \underline{\tilde{p}}, \underline{v}') + K_{vv}(\underline{\alpha}', \underline{v}')}{D(\underline{\alpha}')} \Big|_{\xi=0}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Die topologischen Funktionen sind wieder durch (4.9-4.14) gegeben, nun aber mit den gestrichenen Argumenten  $\underline{\alpha}', \underline{v}', \underline{\xi}'$ , die über

$$\alpha'_i = \alpha_i \sigma_i^2, \quad \xi'_i = \xi_i \sigma_i, \quad v'_i = v_i \sigma_i^{-1} \quad (7.30)$$

und (7.9) von  $\zeta$  abhängen. Davon, daß der Exponent auch mit (7.28) keine Pole bzgl. der Skalenvariablen  $\zeta$  besitzt, kann man sich wiederum durch einfaches Potenzzählen überzeugen.

Es ist instruktiv, die Abhängigkeit der graphentheoretischen Funktionen von  $\zeta_\Gamma$  zu betrachten (unabhängig davon, ob  $\Gamma$  Renormalization-Part ist). Man sieht sofort, daß

$$\frac{A}{D} \sim \zeta_\Gamma^2, \quad \frac{B_v}{D} \sim \zeta_\Gamma, \quad \frac{K_{vv}}{D}, \frac{K_{\xi\xi}}{D} \sim \zeta_\Gamma^0. \quad (7.31)$$

Bei dem Quotienten  $\frac{B_\xi}{D}$  (vgl. (4.13)) ist der Term  $\sum_{\vec{i}} \tilde{p}$  proportional zu  $\zeta_\Gamma$ , die beiden anderen sind von  $\zeta_\Gamma$  unabhängig. Hieraus folgt, daß Taylorentwicklung bzgl.  $\zeta_\Gamma$  tatsächlich äquivalent zu solcher bzgl. der äußeren Impulse  $\underline{\tilde{p}}$  ist. Keines besonderen Beweises bedarf die Tatsache, daß die renormierte Amplitude (7.29) für  $0 < \epsilon, \lambda < \infty$  absolut konvergiert, da sich die verwendete Vorschrift wegen  $\lambda < \infty$  nur um eine endliche Renormierung vom herkömmlichen BPHZ-Formalismus unterscheidet. Zu untersuchen wären nun die Grenzübergänge  $\epsilon \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$  (in dieser Reihenfolge). Wie schon bei den konvergenten Graphen werden wir stattdessen den Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  formal im Integranden vollziehen.

### 7.3.2 BPHZ-Renormierung der HQET

Die einzige Modifikation gegenüber der in Kap. 4 durchgeführten Betrachtung unrenormierter Amplituden besteht darin, daß man die  $\zeta$  überall mitnehmen muß. Die Abfaktorisierung der Spinterme  $1 + \psi_i$  der schweren Propagatoren (4.26) funktioniert auch nach der Renormierung, so daß nur noch die graphischen Funktionen durch die gestrichenen (4.28-4.33) zu ersetzen sind. Diese hängen von den schweren Parametern nur noch durch Faktoren der Form

$$2\alpha_i m_i^{(0)} v_i \sim \sigma_i \quad i \in \mathcal{I}_L \quad (7.32)$$

ab, so daß wir die  $\zeta$  anstelle von (7.30) auch durch

$$\alpha'_i = \alpha_i \sigma_i^2 \quad i \in \mathcal{I}_L \quad (7.33)$$

$$\alpha'_i = \alpha_i \sigma_i \quad i \in \mathcal{I}_S \quad (7.34)$$

$$\xi'_i = \xi_i \sigma_i \quad (7.35)$$

einführen können. Damit erhält man für die renormierte effektive Theorie in Analogie zu (7.13) die Darstellung

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{M_\chi} \tilde{p}_{m_{\chi,i}} \int_0^\infty \prod_{j=1}^I d\alpha_j e^{-i \sum_{j \in \mathcal{I}_L} \alpha_j m_j^2} \sum_F \prod_{\gamma_r \in F} (\mathcal{T}_{\zeta_r}^{-2I_L(\gamma_r) - I_S(\gamma_r) + U(\gamma_r)}) \\ & \left\{ \prod_{t=1}^{N_\chi} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_{n_{\chi,t}}} \right) \exp i \frac{B'_\xi(\underline{\alpha}', \underline{\tilde{p}}, \underline{v}, \underline{\xi}) + K'_{\xi\xi}(\underline{\alpha}', \underline{\xi})}{D'(\underline{\alpha}')} \right\}_{|\underline{\xi}=0} \\ & \frac{1}{D'(\underline{\alpha}')^2} \exp i \frac{A'(\underline{\alpha}', \underline{\tilde{p}}) + B'_v(\underline{\alpha}', \underline{\tilde{p}}, \underline{v}) + K'_{vv}(\underline{\alpha}', \underline{v})}{D'(\underline{\alpha}')} \end{aligned} \quad (7.36)$$

mit

$$U(\gamma_r) = D_L(\gamma_r) - M_\chi(\gamma_r) - N_\chi(\gamma_r) \geq 0. \quad (7.37)$$

Im ersten Abschnitt wurde erwähnt, daß für die Parameterdarstellung konventioneller Theorien eine Vielzahl möglicher R-Operatoren existiert. Diese sind jedoch sämtlich äquivalent zur Darstellung (7.4), bei der über alle Wälder zusammenhängender, irreduzibler, vollständiger und divergenter Subgraphen summiert wird, die daher nur genau die Subtraktionen enthält, die zur Sicherstellung der Konvergenz erforderlich sind. Aus diesem Grund wird sie als Ausgangspunkt bei unserer Diskussion der Renormierung der HQET dienen. Zu berücksichtigen ist hierbei, daß in der effektiven Theorie der Integrand bei Skalierung der  $\underline{\alpha}$  eines beliebig gewählten Subgraphen  $X \subset \Gamma$  mit  $\zeta_X^2$  bzw.  $\zeta_X$  nur dann einen Pol endlicher Ordnung bzgl.  $\zeta$  besitzt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Alle schweren Linien in  $\Gamma$ , die zusammen mit den leichten Linien in  $X$  Schleifen bilden, müssen in  $X$  enthalten sein, da andernfalls  $\frac{K'_{vv}}{D'}$  einen Pol erster Ordnung bei  $\zeta_X = 0$  hat. Daß dies durch die oben genannte Renormierungsvorschrift keineswegs garantiert

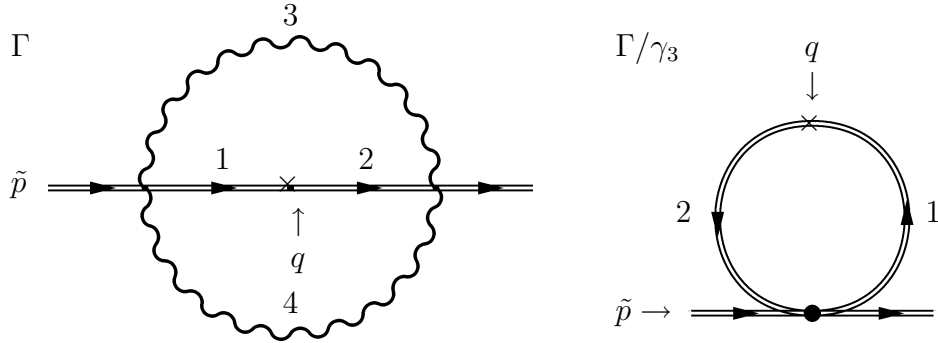


Abbildung 7.1:

wird, läßt sich anhand eines einfachen Graphen verdeutlichen: Renormalization-Parts im oben definierten Sinn sind neben dem vollen Graphen  $\Gamma$  die Subgraphen  $\gamma_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $\gamma_2 = \{1, 2, 4\}$  und  $\gamma_3 = \{3, 4\}$ , so daß der R-Operator durch

$$R = (1 - T_\Gamma^2)(1 - T_{\gamma_1}^0 - T_{\gamma_2}^0 - T_{\gamma_3}^0) \quad (7.38)$$

gegeben ist. Wegen

$$\frac{K'_{vv}}{D'} = -(\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_2 m_2^{(0)} v_2)^2 \left( \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} \right) \quad (7.39)$$

bereitet der Operator  $T_{\gamma_3}^0$  offensichtlich Schwierigkeiten. Dies ist nicht weiter überraschend, da der Graph  $\Gamma/\gamma_3$  eine Schleife aus schweren Quarks enthält. Anknüpfend an die Argumentation in Kap. 2 erscheint es offensichtlich, daß der zugehörige Counterterm, der für  $\lambda < \infty$  wohldefiniert ist, im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  verschwindet, bei der Renormierung der effektiven Theorie daher von vornherein wegzulassen ist. Um dies zu rechtfertigen, müßte man den Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  der renormierten intermediären Theorie genauer untersuchen, was hier jedoch nicht geschehen soll. Anstelle dessen erweitern wir die Definition der Renormalization-Parts um die Forderung, daß diese mit je zwei auf ein und derselben schweren Spur liegenden Vertices auch alle dazwischen liegenden enthalten müssen. Hierdurch ist sichergestellt, daß der Integrand bzgl. der Skalenparameter  $\underline{\zeta}$  keine wesentlichen Singularitäten besitzt. Damit ist die Definition des renormierten Integranden abgeschlossen.

Wie schon die renormierte heavy-quark Selbstenergie

$$\Sigma_R \sim \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{\alpha^2} e^{-i\alpha\mu^2 - im^{(0)2} \frac{\beta^2}{\alpha}} (e^{2i\beta m^{(0)} v \cdot \tilde{p}} - 1 - 2i\beta m^{(0)} v \cdot \tilde{p}) \quad (7.40)$$

zeigt, wird die Darstellung (7.36) i. d. R. ebensowenig auf absolut konvergente Integrale führen, wie dies für power-counting-endliche Graphen der Fall ist (vgl.

Kap. 5). Daher ist auch bei der Renormierung die Parametrisierung gem. (5.10) und (5.12) notwendig, durch die die Pole von  $K'_{vv}/D'$  beseitigt und die Konvergenz bei kleinen Parametern verbessert wird. Zum Beweis der absoluten Konvergenz dieser Darstellung des renormierten Integrals verfährt man anschließend wie in [34] unter Verwendung der sog.  $\Omega$ -Konstruktion. Aufgrund des großen notationellen Aufwandes für diese Konstruktion wird dies hier jedoch nicht durchgeführt, sondern auf spätere Untersuchungen verwiesen.





# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit bestand darin, durch Anwendung des wohlbekannten graphentheoretischen Formalismus einige grundsätzliche Fragen bzgl. der effektiven Theorie für schwere Quarks zu klären. Hierzu wurden explizite graphische Regeln für die Schwingerparameterdarstellung von Feynman-Amplituden mit schweren Propagatoren angegeben. Die qualitativ unterschiedlichen Eigenschaften dieser Darstellung (wesentliche Singularitäten des Integranden) gegenüber der herkömmlichen wurden durch Untersuchung des heavy-quark-Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  beleuchtet und unter Verwendung von Hepp-Sektoren für den reduzierten Graphen  $\Gamma'$  wurde ein Power-Counting Theorem angegeben. Die Formulierung der BPHZ-Renormierung in Parameterdarstellung durch Bergère, Zuber und Lam wurde durch eine Änderung des Renormierungspunktes an die intermediäre Theorie angepaßt, woraus eine Renormierungsvorschrift für die effektive Theorie folgte. Zur Untersuchung der analytischen Eigenschaften von Feynman-Amplituden der HQET wurden Landau-Gleichungen im Impulsraum angegeben, wobei eine Betrachtung in Parameterdarstellung aufwies, daß es Singularitäten gibt, die allein durch die Geschwindigkeiten der schweren Quarks bedingt werden. Sowohl bei der Renormierung als auch hinsichtlich der Singularitäten spielten kontrahierte Graphen eine besondere Rolle, bei denen schwere Schleifen auftreten.

Zum Abschluß sollen kurz einige offene Fragen angesprochen werden. Was die eher mathematische Seite angeht, bleibt zu zeigen, daß die in Kapitel 7 angegebene Vorschrift zur Konstruktion des renormierten Integranden in Verbindung mit Hepp-Sektoren gemäß Kapitel 5 auf konvergente Amplituden führt. Anschließend gälte es, eine gründlichere Untersuchung der Geschwindigkeitssingularitäten konvergenter wie divergenter Graphen vorzunehmen und Bedingungen für die Existenz des Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  als Distribution bzgl.  $\tilde{p}$  anzugeben. Es erscheint sehr plausibel, daß unter den gleichen Bedingungen auch Vertauschbarkeit der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\lambda \rightarrow \infty$  gegeben ist.

Nach diesen eher technischen Fragen sollten Formulierung und Beweis von Action-Principles und Zimmermann-Identitäten kein Problem mehr darstellen, so daß man sich der Untersuchung der BRS-Invarianz zuwenden kann. Um diesen

Formalismus zu vermeiden, erscheint jedoch auch eine nähere Untersuchung der dimensionalrenormierung der HQET wünschenswert. Einige dieser Fragen sollen in zukünftigen Veröffentlichungen betrachtet werden.

# Anhang A

## Graphentheoretische Definitionen

Unter einem (gerichteten) Graphen  $\Gamma$  verstehen wir ein Tripel  $\Gamma = (\mathcal{V}_\Gamma, \mathcal{I}_\Gamma, (\epsilon_{ij}))$ , wobei  $\mathcal{V}_\Gamma = \{1, 2, \dots, V(\Gamma)\}$  die Menge der Vertices,  $\mathcal{I}_\Gamma = \{1, 2, \dots, I(\Gamma)\}$  die Menge der (inneren) Linien und  $(\epsilon_{ij}, 1 \leq i \leq V, 1 \leq j \leq I)$  die Inzidenzmatrix ist. Deren Elemente sind folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Linie } j \text{ endet am Vertex } i \\ -1 & \text{Linie } j \text{ beginnt am Vertex } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Tadpoles, d. h. Linien, die an ein und demselben Vertex beginnen und enden, müssen bei dieser Definition ausgeschlossen werden. Äußere Vertices, deren Anzahl wir mit  $E$  bezeichnen, sind solche, in die mindestens eine äußere Linie mündet. Die Propagatoren der äußeren Linien spielen bei unseren Betrachtungen keine Rolle, da über ihren Impuls nicht integriert wird. Relevant ist lediglich die Summe  $p_i$  aller in einen Vertex  $i$  von außen einlaufenden Impulse.

Für jede Menge  $\mathcal{I}_\gamma \subset \mathcal{I}_\Gamma$  bezeichnet  $\mathcal{V}^{\mathcal{I}_\gamma}$  die Menge aller Vertices des Graphen  $\Gamma$ , die als Anfang oder Ende einer Linie aus  $\mathcal{I}_\gamma$  auftreten, und entsprechend besteht  $\mathcal{I}^{\mathcal{V}_\gamma}$  aus den Linien von  $\Gamma$ , deren beide Enden in  $\mathcal{V}_\gamma$  liegen.

Ein Tripel  $\gamma = (\mathcal{V}_\gamma, \mathcal{I}_\gamma, (\epsilon_{ij})_{i \in \mathcal{V}_\gamma, j \in \mathcal{I}_\gamma})$  mit  $\mathcal{V}_\gamma \subset \mathcal{V}_\Gamma, \mathcal{I}_\gamma \subset \mathcal{I}_\Gamma$  und der entsprechend eingeschränkten Inzidenzmatrix bezeichnen wir als Subgraph, sofern  $\mathcal{I}^{\mathcal{V}_\gamma} \subset \mathcal{I}_\gamma$  gilt. Ein Subgraph  $\gamma$  wird als vollständig bzw. als generalisierter Vertex bezeichnet, wenn zusätzlich  $\mathcal{I}^{\mathcal{V}_\gamma} \subset \mathcal{I}_\gamma$  gilt.

Im Hinblick auf diese Definitionen werden wir Subgraphen bzw. generalisierte Vertices i. d. R. durch Angabe ihrer Linien bzw. Vertices definieren, indem wir  $\gamma = (\mathcal{V}^{\mathcal{I}_\gamma}, \mathcal{I}_\gamma, (\epsilon_{ij})_{i \in \mathcal{V}^{\mathcal{I}_\gamma}, j \in \mathcal{I}_\gamma})$  bzw.  $\gamma = (\mathcal{V}_\gamma, \mathcal{I}^{\mathcal{V}_\gamma}, (\epsilon_{ij})_{i \in \mathcal{V}_\gamma, j \in \mathcal{I}^{\mathcal{V}_\gamma}})$  setzen. Als Subgraph bzw. generalisierten Vertex werden wir dann sowohl das Tripel  $\gamma$  als auch die Menge  $\mathcal{I}_\gamma$  bzw.  $\mathcal{V}_\gamma$ , durch die jenes definiert ist, bezeichnen.

Sofern nur ein Graph  $\Gamma$  und seine Subgraphen betrachtet werden, wird der Suffix  $\Gamma$  bei  $\mathcal{I}_\Gamma, \mathcal{V}_\Gamma$  i. a. weggelassen.

Als Abkürzung für  $\mathcal{V}_{\gamma_1} \subset \mathcal{V}_{\gamma_2}, \mathcal{I}_{\gamma_1} \subset \mathcal{I}_{\gamma_2}$  schreiben wir  $\gamma_1 \subset \gamma_2$ . Der Durchschnitt  $\gamma_1 \cap \gamma_2$  zweier Graphen ist durch  $\mathcal{V}_{\gamma_1 \cap \gamma_2} = \mathcal{V}_{\gamma_1} \cap \mathcal{V}_{\gamma_2}, \mathcal{I}_{\gamma_1 \cap \gamma_2} = \mathcal{I}_{\gamma_1} \cap \mathcal{I}_{\gamma_2}$

definiert und stellt wiederum einen Subgraphen entsprechend obiger Definition dar. Zwei Graphen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heißen disjunkt ( $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ ), wenn sie keinen Vertex (und somit auch keine Linie) gemeinsam haben, bzw. überlappend, wenn keine der Bedingungen  $\gamma_1 \subset \gamma_2, \gamma_1 \supset \gamma_2, \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$  erfüllt ist. Unter einem Wald (forest) verstehen wir eine (möglicherweise leere) Menge nichtüberlappender Subgraphen. Jeder Wald kann, unabhängig von seinen übrigen Elementen, auch den Graphen  $\Gamma$  selbst enthalten, da dieser mit keinem Subgraphen überlappt.

Unter  $\Gamma - \gamma$  verstehen wir den Subgraph von  $\Gamma$ , der aus  $\Gamma$  durch Entfernen aller in  $\gamma$  enthaltenen Linien hervorgeht. Die Vertices bleiben hierdurch unberührt, d. h.  $\mathcal{V}_{\Gamma - \gamma} = \mathcal{V}_\Gamma$ . Der reduzierte Graph  $\Gamma/\gamma$  entsteht durch Kontrahieren aller in  $\gamma$  enthaltenen Linien zu Punkten, genauer durch Entfernung dieser Linien und Identifikation ihrer jeweiligen Anfangs- und Endvertices.

Ein Pfad ist ein geordnetes Tupel von Linien, derart daß je zwei aufeinanderfolgende Linien einen gemeinsamen Vertex besitzen, wobei die Orientierung der Linien keine Rolle spielt und kein Vertex mehr als einmal berührt werden darf. Wenn  $a \neq b$  die Enden des Pfades sind, sagt man, er verbinde diese Vertices. Die Existenz oder Nichtexistenz eines Pfades, der zwei gegebene Vertices verbindet, definiert eine Äquivalenzrelation, die  $\mathcal{V}_\Gamma$  in die sog. Zusammenhangskomponenten zerlegt, deren Anzahl wir mit  $C(\Gamma)$  bezeichnen. Hiermit gilt [39]  $\text{Rang}(\epsilon_{ij}) = V - C$ . Von nun an wird  $\Gamma$  als zusammenhängend vorausgesetzt ( $C = 1$ ), was für seine Subgraphen i. d. R. selbstverständlich nicht gilt. Ein zusammenhängender Graph heißt ein-Teilchen-irreduzibel (1PI), wenn er bei Entfernung einer beliebigen Linie zusammenhängend bleibt.

Die Definition einer Schleife unterscheidet sich von der eines Pfades lediglich dadurch, daß Anfang und Ende zusammenfallen ( $a = b$ ), so daß alle Vertices bzw. Linien der Schleife gleichberechtigt sind. Die Menge aller Schleifen werde mit  $\mathcal{L}$  bezeichnet. Wenn man jeder Schleife willkürlich eine Orientierung (Umlaufsinn) gibt, ist die Schleifen-Matrix  $\eta_{ic}$  für  $i \in \mathcal{I}$  und  $c \in \mathcal{L}$  durch

$$\eta_{ic} = \begin{cases} \pm 1 & \text{Linie } i \text{ ist in der Schleife } c \text{ enthalten mit} \\ & \text{gleicher/entgegengesetzter Orientierung} \\ 0 & \text{Linie } i \text{ ist nicht in der Schleife } c \text{ enthalten} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

definiert. Zwei Schleifen heißen unabhängig, wenn die ihnen entsprechenden Spalten der Matrix  $\eta_{ic}$  linear unabhängig sind. Die Anzahl der unabhängigen Schleifen ist durch  $L(\Gamma) \equiv \text{Rang}(\eta_{ic})$  definiert, womit die Beziehung [39]  $L = I - V + C$  gilt. Wie man leicht einsieht, gilt folgende Orthogonalitätsrelation:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \epsilon_{vi} \eta_{ic} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}, c \in \mathcal{L}. \quad (\text{A.3})$$

Ein One-tree ist ein zusammenhängender Subgraph von  $\Gamma$ , der alle Vertices von  $\Gamma$ , genau  $V - 1$  Linien und somit keine Schleifen enthält.

Ein Two-tree ist ein Subgraph mit zwei Komponenten  $K1$  und  $K2$ , der alle Vertices, genau  $V - 2$  Linien und keine Schleifen enthält.

Ein Pseudo-tree ist ein zusammenhängender Subgraph, der alle Vertices, genau  $V$  Linien und somit genau eine Schleife  $L$  enthält. Diese kann mit dem Pseudo-tree identisch sein, oder nur eine Teilmenge seiner Linien umfassen. Alle Two-trees (Pseudo-trees) gehen auf nicht notwendig eindeutige Weise aus One-Trees hervor, indem man eine Linie entfernt (hinzufügt). Die genannten Eigenschaften dieser Subgraph-Typen sind nicht unabhängig, sondern lassen sich teilweise auseinander herleiten [39]. Die Mengen aller One-(Two-,Pseudo-)trees werden mit  $\{T1\}$  ( $\{T2\}$ ,  $\{PT\}$ ) bezeichnet.



# Anhang B

## Herleitung der graphischen Regeln

### B.1 Symanzik-Polynome $D(\underline{\alpha}), A(\underline{\alpha}, \underline{p})$

Ausgangspunkt der Umformungen ist der Ausdruck

$$(-i)^I \int \left( \prod_{i=1}^I d^d k_i e^{i\alpha_i k_i^2 + i\xi_i \cdot k_i} \right) \prod_{j=1}^V \delta^d(p_j + \sum_{l=1}^I \epsilon_{jl} k_l) \quad (\text{B.1})$$

Mit der Darstellung

$$\delta^d(x) = (2\pi)^{-d} \int d^d x e^{ix \cdot y} \quad (\text{B.2})$$

erhält man

$$(-i)^I (2\pi)^{-Vd} \int \prod_{i=1}^I d^d k_i \prod_{j=1}^V d^d y_j \exp i \left[ \sum_{m=1}^I (\alpha_m k_m^2 + k_m \cdot (\xi_m + \sum_{n=1}^V \epsilon_{nm} y_n)) + \sum_{n=1}^V y_n \cdot p_n \right] \quad (\text{B.3})$$

Die Gaußintegrationen über die Impulse  $k_i$  lassen sich unter Verwendung von

$$\int d^d k e^{i(\alpha k^2 + z \cdot k)} = e^{i\frac{\pi}{4}(2-d)} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{d/2} e^{-i\frac{z^2}{4\alpha}} \quad (\text{B.4})$$

leicht durchführen und führen auf

$$(-i)^I 2^{-Vd} \pi^{d(I/2-V)} e^{i\frac{\pi}{4}(2-d)I} \left( \prod_{m=1}^I \alpha_m \right)^{-d/2} e^{-\frac{i}{4} \sum_{m=1}^I \frac{\xi_m^2}{\alpha_m}} F(\underline{\alpha}, \underline{p}') \quad (\text{B.5})$$

$$F(\underline{\alpha}, \underline{p}') = \int \prod_{j=1}^V d^d y_j \exp i \left[ -\frac{1}{4} \sum_{u,v=1}^V D_{uv} y_u \cdot y_v + \sum_{w=1}^V y_w \cdot p'_w \right] \quad (\text{B.6})$$

mit

$$D_{uv} = \sum_{k=1}^I \frac{\epsilon_{uk} \epsilon_{vk}}{\alpha_k} \quad (\text{B.7})$$



und

$$p'_w = p_w - \sum_{m=1}^I \frac{1}{2\alpha_m} \epsilon_{wm} \xi_m \quad (\text{B.8})$$

Aus der trivialen Tatsache, daß jede Linie genau einen Anfang und ein Ende hat, folgt  $\sum_{v=1}^V \epsilon_{vk} = 0$  und daraus  $\det(D_{uv}) = 0$ . Daher nehmen wir folgende Substitution vor:

$$y_V = y'_V, \quad y_i = y'_i + y'_V \quad (1 \leq i \leq V-1) \quad (\text{B.9})$$

Hiermit gilt  $\partial(\underline{y})/\partial(\underline{y}') = 1$  sowie

$$\sum_{i,j=1}^V D_{ij} y_i \cdot y_j = \sum_{i,j=1}^{V-1} D_{ij} y'_i \cdot y'_j \quad (\text{B.10})$$

$$\sum_{i=1}^V y_i \cdot p'_i = \sum_{i=1}^{V-1} y'_i \cdot p'_i + y'_V \cdot \sum_{i=1}^V p'_i \quad (\text{B.11})$$

so daß die Integration über  $y'_V$  die Impulserhaltungs-Deltafunktion erzeugt. Mit der Annahme, daß  $\tilde{D} = (D_{ij})_{|i,j \leq V-1}$  nichtsingulär ist, folgt

$$F(\underline{\alpha}, \underline{p}') = (2\pi)^d \delta^d \left( \sum_{j=1}^V p'_j \right) (2\pi^{1/2})^{(V-1)d} e^{-i\frac{\pi}{4}(2-d)(V-1)} \\ (\det \tilde{D})^{-d/2} \exp i \sum_{u,v=1}^{V-1} (\tilde{D}^{-1})_{uv} p'_u \cdot p'_v. \quad (\text{B.12})$$

Zur Bestimmung von  $\det \tilde{D}$  bedienen wir uns der Binet-Cauchy-Formel für die Determinante der  $p \times p$ -Matrix, die sich als Produkt der  $p \times q$ -Matrix  $A$  und der  $q \times p$ -Matrix  $B$  ergibt. Diese verschwindet, falls  $q < p$ , andernfalls gilt:

$$\det(AB) = \sum_M \det A_M \det B_M \quad (\text{B.13})$$

Summiert wird über alle Mengen  $M \subset \{1, \dots, q\}$  mit  $|M| = p$ . Die Matrizen  $A_M$  ( $B_M$ ) entstehen aus  $A$  ( $B$ ) durch Streichen aller Spalten (Zeilen) bis auf die, deren Index in  $M$  enthalten ist. (Im Fall  $p = q$  reduziert sich dies auf  $\det(AB) = \det A \det B$ ).

Mit den Bezeichnungen  $\tilde{\epsilon} = (\epsilon_{ij}, 1 \leq i \leq V-1, 1 \leq j \leq I)$  und  $\alpha^{-1} = (\delta_{ij} \alpha_i^{-1}, 1 \leq i, j \leq I)$  gilt

$$\tilde{D} = \tilde{\epsilon} \alpha^{-1} \tilde{\epsilon}^T \quad (\text{B.14})$$

und somit

$$\det \tilde{D} = \sum_M \det \tilde{\epsilon}_M \det(\alpha^{-1} \tilde{\epsilon}^T)_M = \sum_M (\det \tilde{\epsilon}_M)^2 \prod_{i \in M} \alpha_i^{-1}. \quad (\text{B.15})$$

$M$  durchläuft alle Subgraphen mit  $V-1$  Linien. (Falls es solche nicht gibt, weil  $I < V-1$  ist, folgt  $\det \tilde{D} = 0$ ). Ohne den einfachen Beweis (s. z. B. [39, Theorem 3-3]) verwenden wir folgendes

**Lemma 3** Sei  $M \subset \mathcal{V}$  mit  $|M| = V - 1$ . Dann ist  $\det \tilde{\epsilon}_M = \pm 1$  genau dann, wenn  $M$  ein One-Tree ist. Andernfalls gilt  $\det \tilde{\epsilon}_M = 0$

Es folgt also:

$$\det \tilde{D} = \sum_{T_1} \left( \prod_{i \in T_1} \alpha_i^{-1} \right) \quad (\text{B.16})$$

und

$$D(\underline{\alpha}) \equiv \left( \prod_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \right) \det \tilde{D} = \sum_{T_1} \left( \prod_{i \notin T_1} \alpha_i \right). \quad (\text{B.17})$$

Auf ähnliche Weise kann man zeigen (s. z. B. [40, App. A]), daß

$$(\tilde{D}^{-1})_{ij} = \frac{1}{D(\underline{\alpha})} \sum_{T_2} \left( \prod_{i \notin T_2} \alpha_i \right) \quad (\text{B.18})$$

gilt, wobei über diejenigen Two-Trees summiert wird, bei denen die Vertices  $i$  und  $j$  in der Komponente liegen, die den Vertex  $V$  nicht enthält. Von hier bis zu dem Ergebnis

$$\sum_{i,j=1}^{V-1} (\tilde{D}^{-1})_{ij} p'_i \cdot p'_j = \frac{A}{D} \quad \text{mit} \quad A(\underline{\alpha}, \underline{p}) = \sum_{T_2} \left( \prod_{k \notin T_2} \alpha_k \right) \left( \sum_{l \in K_{1/2}} p'_l \right)^2 \quad (\text{B.19})$$

bedarf es lediglich einfacher Manipulationen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet sei. Zusammengefaßt ergibt sich damit für (B.1) der Ausdruck

$$Q_{I,V} \delta^d \left( \sum_{i=1}^V p_i \right) \frac{1}{D^{d/2}} \exp i \frac{A}{D} \quad (\text{B.20})$$

mit

$$Q_{I,V} = (-i)^I e^{i \frac{\pi}{4} (2-d)(I-V+1)} \pi^{\frac{d}{2}(I-V+1)}. \quad (\text{B.21})$$

## B.2 Spinpolynome $B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}), K(\underline{\alpha}, \underline{\xi})$

Ziel der folgenden Umformungen ist es, für den Ausdruck

$$\frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p}')}{D(\underline{\alpha})} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^I \frac{\xi_m^2}{\alpha_m} \quad (\text{B.22})$$

mit

$$p'_i = p_i - \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} \frac{\xi_j}{2\alpha_j} \quad (\text{B.23})$$

eine bequemere Darstellung zu finden. Einsetzen von (B.23) in (B.22) ergibt

$$\frac{A(\underline{\alpha}, \underline{p}', \underline{\xi}) + B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}) + K(\underline{\alpha}, \underline{\xi})}{D(\underline{\alpha})} \quad (\text{B.24})$$

mit

$$B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}) = -2 \sum_{T2} \left( \prod_{l \notin T2} \alpha_l \right) \left( \sum_{m \in K1/2} p_m \right) \cdot \left( \sum_{i \in K1/2} \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} \frac{\xi_j}{2\alpha_j} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$K(\underline{\alpha}, \underline{\xi}) = \sum_{T2} \left( \prod_{l \notin T2} \alpha_l \right) \left( \sum_{i \in K1/2} \sum_{j=1}^I \epsilon_{ij} \frac{\xi_j}{2\alpha_j} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{T1} \left( \prod_{l \notin T1} \alpha_l \right) \sum_{i=1}^I \frac{\xi_i^2}{\alpha_i} \quad (\text{B.26})$$

Zunächst betrachten wir das Spinpolynom  $B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi})$ . Bei der Summation über  $i$  ist die gleiche Komponente des Two-Trees wie bei der  $m$ -Summe zu wählen. Die Summe über  $i$  bei festgehaltenem  $T2, m, j$  ergibt null, wenn beide Enden der Linie  $j$  in der gleichen Komponente des Two-Trees liegen, da sich dann zwei Beiträge gleichen Vorzeichens wegheben. Einen nichtverschwindenden Beitrag liefern also nur die Linien, deren Hinzufügung zu  $T2$  einen One-Tree ergibt. Wenn man sich nun auf diejenige Komponente des Two-Trees festlegt, aus der die Linie  $m$  hinausläuft, ist bei der Summation über  $j$  nur ein Element  $\epsilon_{ij}$  ungleich null und hat den Wert  $-1$ . Es ist leicht einzusehen daß

$$\sum_{T2} \sum_{T2 \cup \{m\} \in \{T1\}} \left( \prod_{i \notin T2} \alpha_i \right) = \sum_{m=1}^I \sum_{\substack{T1 \\ m \in T1}} \left( \prod_{i \notin T1} \alpha_i \right) \alpha_m \quad (\text{B.27})$$

gilt, so daß man schließlich

$$B(\underline{\alpha}, \underline{p}, \underline{\xi}) = \sum_{m=1}^I \xi_m \cdot \sum_{\substack{T1 \\ m \in T1}} \left( \sum_{\underline{m}} p \right) \quad (\text{B.28})$$

erhält.  $(\sum_{\underline{m}} p)$  bezeichnet den Impuls, der im One-Tree  $T1$  durch die Linie  $m$  entlang deren vorgegebender Orientierung fließt.

Nun wenden wir uns dem Spinpolynom  $K(\underline{\alpha}, \underline{\xi})$  zu. Wir schreiben Gl. (B.26) in der Form

$$K(\underline{\alpha}, \underline{\xi}) = \sum_{i,j=1}^I K_{ij} \xi_i \cdot \xi_j \quad (\text{B.29})$$

$$K_{ij} = \frac{1}{4\alpha_i \alpha_j} \sum_{T2} \left( \prod_{l \notin T2} \alpha_l \right) \sum_{m,n \in K1/2} \epsilon_{mi} \epsilon_{nj}, \quad i \neq j \quad (\text{B.30})$$

$$K_{ii} = \frac{1}{4\alpha_i^2} \sum_{T2} \left( \prod_{l \notin T2} \alpha_l \right) \sum_{m,n \in K1/2} \epsilon_{mi} \epsilon_{ni} - \frac{1}{4\alpha_i} \sum_{T1} \left( \prod_{l \notin T1} \alpha_l \right) \quad (\text{B.31})$$

Zu  $K_{ij}$  tragen in Analogie zur oben durchgeführten Betrachtung nur die Two-Trees bei, bei denen Anfang und Ende der Linien  $i$  und  $j$  in verschiedenen Komponenten liegen. Dann gilt

$$\sum_{m,n \in K1/2} \epsilon_{mi} \epsilon_{nj} = \pm 1 \quad (\text{B.32})$$

mit positivem Vorzeichen, wenn beide Linien in gleicher Richtung von  $K1$  nach  $K2$  laufen. Da es eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen den betrachteten Two-Trees und den Pseudotrees, bei denen die Linien  $i$  und  $j$  in der Schleife liegen, gibt, gilt

$$K_{ij} = -\frac{1}{4} \sum_{PT, i, j \in L} \left( \prod_{l \notin PT} \alpha_l \right) (\pm 1). \quad (\text{B.33})$$

Hier ist das positive (negative) Vorzeichen zu wählen, wenn die Linien  $i$  und  $j$  in der Schleife  $L$  die gleiche (entgegengesetzte) Umlaufrichtung haben. Ganz entsprechend zeigt man

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \frac{1}{4\alpha_i} \left( \frac{1}{\alpha_i} \sum_{T2, T2 \cup \{i\} \in \{T1\}} \left( \prod_{j \notin T2} \alpha_j \right) - \sum_{T1} \left( \prod_{l \notin T1} \alpha_l \right) \right) \quad (\text{B.34}) \\ &= \frac{1}{4\alpha_i} \left( \sum_{T1, i \in T1} \left( \prod_{j \notin T1} \alpha_j \right) - \sum_{T1} \left( \prod_{l \notin T1} \alpha_l \right) \right) \\ &= -\frac{1}{4\alpha_i} \sum_{T1, i \notin T1} \left( \prod_{j \notin T1} \alpha_j \right) = -\frac{1}{4} \sum_{PT, i \in PT} \left( \prod_{j \notin PT} \alpha_j \right), \end{aligned}$$

so daß (B.33) auch für  $i = j$  gültig ist, woraus die einfache Darstellung

$$K(\underline{\alpha}, \underline{\xi}) = -\frac{1}{4} \sum_{PT} \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right) \left( \sum_j \eta_{jL} \xi_j \right)^2. \quad (\text{B.35})$$

folgt. Im letzten Faktor dieses Ausdrucks werden die  $\xi$ -Vektoren der Linien, die die Schleife bilden, addiert, wobei Linien gleicher Orientierung gleiches Vorzeichen erhalten. Die Summation über Pseudotrees ist bei größeren Graphen lästig, da es i. d. R. mehrere Pseudotrees mit der gleichen Schleife gibt, von der allein  $(\sum_j \eta_{jL} \xi_j)$  abhängt. Daher erweist sich die hier aufgrund ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit nicht bewiesene Identität [39]

$$\sum_{\substack{PT \\ LCPT}} \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right) = D_{\Gamma \setminus L} \quad (\text{B.36})$$

als nützlich, die auf

$$K = -\frac{1}{4} \sum_L \left( \sum_j \eta_{jL} \xi_j \right)^2 D_{\Gamma \setminus L} \quad (\text{B.37})$$

$$K_{ij} = -\frac{1}{4} \sum_L \eta_{iL} \eta_{jL} D_{\Gamma \setminus L} \quad (\text{B.38})$$

führt.



# Anhang C

## Graphentheoretische Funktionen in Hepp-Sektoren

Zur Untersuchung der Konvergenz von Feynman-Integralen in Parameterdarstellung ist es erforderlich, das Verhalten von Funktionen wie

$$D = \sum_{T1} \left( \prod_{i \notin T1} \alpha_i \right) \quad \text{und} \quad D_{\Gamma \setminus L} = \sum_{\substack{PT \\ LCPT}} \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right) \quad (\text{C.1})$$

in einem gegebenen Hepp-Sektor  $\Pi$  für kleine Werte der Speer-Variablen  $\underline{t}$  zu kennen.

### C.1 One-Tree-Summen

Dazu betrachten wir zunächst einen Term  $(\prod_{i \notin T1} \alpha_i)$ . Mit  $\alpha_{\Pi(i)} = \prod_{j=i}^I t_j$  und  $\mathcal{I}_{\gamma_i} = \{\Pi(1), \dots, \Pi(i)\}$  wird dieser zu

$$\prod_{i=1}^I t_i^{2A_i}, \quad (\text{C.2})$$

wobei  $A_i$  die Anzahl der Linien in  $\Gamma - T1$  bezeichnet, deren  $\alpha$ -Parameter einen Faktor  $t_i$  enthält, d. h.

$$\begin{aligned} A_i &= I((\Gamma - T1) \cap \gamma_i) = i - I(\gamma_i \cap T1) \\ &= [i - V(\gamma_i \cap T1) + C(\gamma_i)] \\ &\quad - [I(\gamma_i \cap T1) - V(\gamma_i \cap T1) + C(\gamma_i \cap T1)] \\ &\quad + C(\gamma_i \cap T1) - C(\gamma_i). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Mit  $i = I(\gamma_i)$ ,  $V(\gamma_i \cap T1) = V(\gamma_i)$  (da  $T1$  alle Vertices enthält) und  $I - V + C = L$  wird dies zu

$$A_i = L(\gamma_i) - L(\gamma_i \cap T1) + C(\gamma_i \cap T1) - C(\gamma_i). \quad (\text{C.4})$$

Da der One-Tree T1 keine Schleifen enthält, gilt weiterhin  $L(\gamma_i \cap T1) = 0$ , und mit der Definition des sog. Defektes [44] von  $\gamma_i$  bzgl. T1

$$def_{\gamma_i}(T1) \equiv C(\gamma_i \cap T1) - C(\gamma_i) \geq 0 \quad (C.5)$$

ergibt sich

$$\prod_{i \notin T1} \alpha_i = \prod_{i=1}^I t_i^{2(L(\gamma_i) + def_{\gamma_i}(T1))}. \quad (C.6)$$

Offensichtlich gilt  $L(\gamma_1) = 0$  (eine Linie allein kann keine Schleife bilden, da Tadpoles ausgeschlossen wurden) und  $def_{\gamma_I}(T1) = 0$  (da  $\gamma_I = \Gamma$ ). Wie wir im Anschluß zeigen werden, gibt es zu jedem Sektor einen führenden One-Tree T1, für den alle Defekte  $def_{\gamma_i}(T1)$  verschwinden. Daraus folgt

$$D(\underline{t}) = \prod_{i=1}^I t_i^{2L(\gamma_i)} (1 + D'(\underline{t})) \quad (C.7)$$

mit einem für  $\underline{t} \geq 0$  nichtnegativen Polynom  $D'(\underline{t})$  in  $t_1 \dots t_{I-1}$ , so daß  $(1 + D')^{-1}$  im Integrationsgebiet analytisch ist. Um den führenden One-Tree zu bilden, beginnt man mit der Linie  $\Pi(1)$ , die dieser enthalten muß, damit  $def_{\gamma_1}(T1)$  gleich null ist. Nun werden die Linien  $\Pi(2), \Pi(3), \dots$  in dieser Reihenfolge hinzugefügt, wobei diejenigen zu überspringen sind, die mit den schon ausgewählten eine Schleife bilden würden. Dies führt man fort, bis man keine Linie mehr hinzufügen kann, der One-Tree also komplett ist. Diese Vorgehensweise gewährleistet, daß  $\gamma_i \cap T1$  nicht mehr Zusammenhangskomponenten hat als  $\gamma_i$ , die Defekte somit sämtlich verschwinden, womit Gl. (C.7) bewiesen ist.

## C.2 Pseudo-Tree-Summen

Für das  $\alpha$ -Produkt ( $\prod_{i \notin PT} \alpha_i$ ) geht man analog zu Gl. (C.2-C.6) vor, überall T1 durch PT ersetzend. Allerdings ist  $L(\gamma_i \cap PT)$  nicht identisch gleich null, sondern durch

$$\delta_L(\gamma_i) = \begin{cases} 1 & \text{Schleife } l \text{ in } \gamma_i \text{ enthalten} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (C.8)$$

gegeben, wobei es offensichtlich einen Index  $i_0$  gibt, derart daß  $\delta_L(\gamma_i) = 0 \forall i < i_0$  und  $\delta_L(\gamma_i) = 1 \forall i \geq i_0$ . Damit erhalten wir

$$\prod_{i \notin PT} \alpha_i = \prod_{i=1}^I t_i^{2(L(\gamma_i) - \delta_L(\gamma_i) + def_{\gamma_i}(PT))}. \quad (C.9)$$

und können die Summe über alle Pseudo-Trees, die eine bestimmte Schleife  $L$  enthalten, zunächst folgendermaßen schreiben:

$$D_{\Gamma \setminus L} = \sum_{PT \supset L} \left( \prod_{i \notin PT} \alpha_i \right) = \prod_{i=1}^I t_i^{2(L(\gamma_i) - \delta_L(\gamma_i))} \sum_{PT \supset L} \prod_{i=1}^I t_i^{def_{\gamma_i}(PT)} \quad (C.10)$$

Bei der Division dieses Ausdrucks durch  $D$  fällt der allen Pseudotrees gemeinsame Faktor  $\prod_{i=1}^I t_i^{L(\gamma_i)}$  heraus. Da  $(1 + D')^{-1}$  analytisch ist, können Singularitäten des Quotienten  $\frac{D_{r \setminus L}}{D}$  nur von den Faktoren  $t_i^{-2\delta_L(\gamma_i)} = t_i^{-2}$ ,  $i \geq i_0$  herrühren. Schon ein einfaches Beispiel zeigt, daß es im Gegensatz zum vorangegangenen Abschnitt i. d. R. keinen Pseudotree  $PT \supset L$  geben muß, für den alle Defekte verschwinden. Falls z. B. die Linie  $\Pi(1)$  zusammen mit der Schleife  $L$  eine weitere Schleife bildet, kann sie in keinem der betrachteten Pseudo-Trees enthalten sein, woraus für all diese Pseudo-Trees  $def_{\gamma_1}(PT) = 1$  folgt. Ob  $\frac{D_{r \setminus L}}{D}$  für alle  $i \geq i_0$  einen Pol bei  $t_i = 0$  hat, hängt nun davon ab, ob es wenigstens einen Pseudotree  $PT \supset L$  gibt, für den  $def_{\gamma_i}(PT) = 0 \forall i \geq i_0$  gilt. Daß man einen solchen tatsächlich konstruieren kann, wollen wir nun zeigen. Im ersten Schritt betrachtet man den Subgraphen  $\gamma_{i_0}$  und entfernt genau so viele der nicht zur Schleife  $L$  gehörenden Linien wie erforderlich ist, damit nur eine Schleife (eben  $L$ ) übrig bleibt, wobei die Anzahl der Zusammenhangskomponenten unverändert bleibt. Das Ergebnis macht man zur Grundlage des  $PT$ , zu dem man nun, an die frühere Vorgehensweise anknüpfend, die Linien  $\Pi(i_0 + 1), \Pi(i_0 + 2), \dots$  hinzufügt, sofern sie keine weitere Schleife bilden. Dies führt man fort, bis ein vollständiger Pseudotree vorliegt, für den dann tatsächlich  $def_{\gamma_i}(PT) = 0 \forall i \geq i_0$  gilt. Über die übrigen Defekte wissen wir so zwar nichts, sie spielen jedoch bei unseren Betrachtungen keine wichtige Rolle.





# Anhang D

## Explizite Rechnungen in niedrigen Ordnungen

### D.1 Beispiel für die effektive Parameterdarstellung

In diesem Abschnitt sollen die in Kapitel 4 hergeleiteten Regeln anhand des Graphen aus Abb. 4.1 illustriert werden. Die äußeren Impulse des Graphen  $\Gamma$  und die daraus folgenden des reduzierten Graphen  $\Gamma''$  seien gemäß Abb. D.1

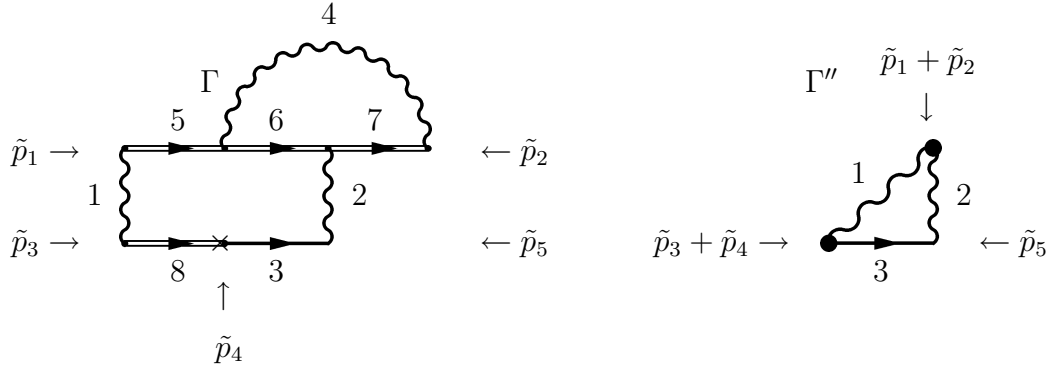


Abbildung D.1: Die äußeren Impulse des reduzierten Graphen  $\Gamma''$  in Abhängigkeit von denen des Graphen  $\Gamma$

gegeben. Da auf der schweren Spur  $\{5, 6, 7\}$  keine harten Einsetzungen liegen, haben diese Linien gleiche Geschwindigkeit  $v$  und Massenskala  $m^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} v_5 &= v_6 = v_7 \\ m_5^{(0)} &= m_6^{(0)} = m_7^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Die Boson-Linien 1, 2 und 4 seien der Einfachheit halber skalar bzw. vektoriell in Feynman-Eichung, während die Linie 3 ein Dirac-Teilchen beschreibt. Bei Vernachlässigung aller konstanten Faktoren (einschließlich der  $\frac{1+k}{2}$ -Beiträge der schweren Linien) gilt

$$Z'(\underline{k}) = \not{k}_3 + m_3, \quad (\text{D.2})$$

so daß sich mit Gl. (4.27) die Parameterdarstellung

$$\int_0^\infty d\alpha_{1\dots 8} \frac{1}{D'} \left( \frac{B'_{\xi,3}}{D'} + m_3 \right) \exp i \left[ \frac{A' + B'_v + K'_{vv}}{D'} - \sum_{i=1}^4 \alpha_i m_i^2 \right] \quad (\text{D.3})$$

ergibt. In Kap. 3 hatten wir gesehen, daß  $A'/D'$  allein durch den reduzierten Graphen  $\Gamma''$  bestimmt ist:

$$\frac{A'}{D'} = \frac{A_{\Gamma''}}{D_{\Gamma''}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 + \alpha_1 \alpha_3 (\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4)^2 + \alpha_2 \alpha_3 \tilde{p}_5^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad (\text{D.4})$$

während  $D'$  aus  $D_{\Gamma''}$  durch Multiplikation mit den Parametern der Pseudo-Tadpoles hervorgeht:

$$D' = \left( \prod_{t \in \mathcal{I}_t} \alpha_t \right) D_{\Gamma''} = \alpha_4 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \quad (\text{D.5})$$

Dies stimmt mit dem Ausdruck überein, der sich ergibt, wenn man in

$$D_\Gamma = \alpha_6 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7) + (\alpha_4 + \alpha_7) (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8) \quad (\text{D.6})$$

die schweren Parameter  $\alpha_5 \dots \alpha_8$  gleich null setzt. Für  $B'_v/D'$  und  $K'_{vv}/D'$  erhält man

$$\begin{aligned} \frac{B'_v}{D'} &= \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \{ \alpha_1 [m_5^{(0)} v_5 \cdot ((\alpha_5 + \alpha_6) \tilde{p}_1 - \alpha_7 \tilde{p}_2) - \alpha_8 m_8^{(0)} v_8 \cdot \tilde{p}_3] \\ &\quad + \alpha_2 [ -(\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) m_5^{(0)} v_5 \cdot \tilde{p}_2 - \alpha_8 m_8^{(0)} v_8 \cdot (\tilde{p}_4 + \tilde{p}_5) ] \\ &\quad + \alpha_3 [ -m_5^{(0)} v_5 \cdot ((\alpha_5 + \alpha_6) (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_5) + \alpha_7 \tilde{p}_2) - \alpha_8 m_8^{(0)} v_8 \cdot \tilde{p}_4 ] \} \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

$$\frac{K'_{vv}}{D'} = - \frac{[(\alpha_5 + \alpha_6) m_5^{(0)} v_5 - \alpha_8 m_8^{(0)} v_8]^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} - \frac{m_5^{(0)2} (\alpha_6 + \alpha_7)^2}{\alpha_4}. \quad (\text{D.8})$$

Der erste Term in (D.8) rührt von dem einzigen, die Linien  $\{1, 2, 3\}$  umfassenden Pseudo-Tree von  $\Gamma''$  her, der zweite von dem Pseudo-Tadpole, den die Linie 4 bildet. Der Spinterm  $B'_{\xi,3}/D'$  schließlich hat die Form

$$\frac{B'_{\xi,3}}{D'} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \{ \alpha_1 (\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4) - \alpha_2 \tilde{p}_5 - \alpha_8 m_8^{(0)} v_8 + (\alpha_5 + \alpha_6) m_5^{(0)} v_5 \}, \quad (\text{D.9})$$

wobei die ersten beiden Terme in der geschweiften Klammer One-Tree-, die beiden anderen Pseudo-Tree-Beiträge sind.

## D.2 Ein-Schleifen-Geschwindigkeitssingularitäten

In diesem Abschnitt sollen die Betrachtungen des Abschnitt 6.2, insbesondere betreffend die Geschwindigkeitssingularitäten, anhand der beiden Graphen in Abbildung 6.1 veranschaulicht werden. Wir beginnen mit dem linken, der gemäß Kapitel 5 auch in der effektiven Theorie frei von UV-Divergenzen ist, wobei wir uns auf die normalen Schwellen  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  bzw.  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$  beschränken. Mit  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  erhält man die Landau-Gleichungen

$$k_3 + k_4 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \equiv P \quad (\text{D.10})$$

$$\alpha_3 k_3 - \alpha_4 k_4 = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$k_3^2 - m_3^2 = k_4^2 - m_4^2 = 0. \quad (\text{D.12})$$

Mit der zusätzlichen Einschränkung auf positive  $\alpha$ 's erhält man als eindeutige Lösung die wohlbekannte Schwelle

$$P^2 = (m_3 + m_4)^2, \quad (\text{D.13})$$

die in der HQET die gleiche Form hat wie im gewöhnlichen Formalismus, da der kontrahierte Graph keine schweren Linien mehr enthält.

Mit  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$  gelangt man dagegen zu dem Gleichungssystem

$$k_1 + k_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_3 \equiv Q \quad (\text{D.14})$$

$$\beta_1 m_1^{(0)} v_1 - \beta_2 m_2^{(0)} v_2 = 0 \quad (\text{D.15})$$

$$v_1 \cdot k_1 = v_2 \cdot k_2 = 0, \quad (\text{D.16})$$

das nur unter den Bedingungen

$$v_1 = v_2 \quad (\text{D.17})$$

$$v_1 \cdot Q = 0 \quad (\text{D.18})$$

eine Lösung mit positiven  $\beta$ 's besitzt. Daß dies zwei unabhängige Gleichungen sind, ist irritierend, da normale wie anomale Schwellen im Raum der invarianten Skalarprodukte der äußeren Impulse durch Mannigfaltigkeiten der komplexen Kodimension 1 gegeben sind. Eine Betrachtung in Parameterdarstellung zeigt tatsächlich, daß die Bedingung (D.18) überflüssig ist. Da der Graph keine Subdivergenzen besitzt, kann man auf die Verwendung von Hepp-Sektoren verzichten und gelangt mit der Parametrisierung

$$\alpha_1 = X(1 - Y)\beta, \quad \alpha_3 = XY\alpha \quad (\text{D.19})$$

$$\alpha_2 = X(1 - Y)(1 - \beta), \quad \alpha_4 = XY(1 - \alpha) \quad (\text{D.20})$$

zu

$$\int_0^1 d\alpha d\beta dY \frac{Y(1-Y)}{[Y^2 A + Y(1-Y)B + (1-Y)^2 C]^2} \quad (\text{D.21})$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \alpha(1-\alpha)P^2 - \alpha m_3 - (1-\alpha)m_4 \\ &= -(\alpha m_3 - (1-\alpha)m_4)^2 + \alpha(1-\alpha)(P^2 - (m_3 + m_4)^2) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} B/2 &= \beta m_1^{(0)} v_1 \cdot (\alpha \tilde{p}_1 - (1-\alpha)\tilde{p}_2) + (1-\beta)m_2^{(0)} v_2 \cdot (\alpha \tilde{p}_3 - (1-\alpha)\tilde{p}_4) \\ &= \beta m_1^{(0)} v_1 \cdot Q - (\beta m_1^{(0)} v_1 - (1-\beta)m_2^{(0)} v_2) \cdot (\alpha \tilde{p}_3 - (1-\alpha)\tilde{p}_4) \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} C &= -(\beta m_1^{(0)} v_1 - (1-\beta)m_2^{(0)} v_2)^2 \\ &= -(\beta m_1^{(0)} - (1-\beta)m_2^{(0)})^2 + 2m_1^{(0)} m_2^{(0)} \beta(1-\beta)(v_1 \cdot v_2 - 1). \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Wie man sieht, besteht hinsichtlich der Integration über  $Y$  vollständige Symmetrie zwischen den Integrationsgrenzen  $Y = 0$  und  $Y = 1$ . Da  $A$  von  $\beta$  unabhängig ist, liegt unter der Bedingung  $P^2 - (m_3 + m_4)^2 = 0$  für alle  $\beta$  eine Landau-Singularität bei  $Y = 1$ ,  $\alpha = m_3^{(0)-1}/(m_3^{(0)-1} + m_4^{(0)-1})$  vor, in deren Umgebung sich die Amplitude wie  $(P^2 - (m_3 + m_4)^2)^{1/2}$  verhält. Dies kann man durch Integration über  $Y$  und  $\alpha$  bei beliebigem  $\beta$  in einer Umgebung der Nullstelle des Nenners zeigen. Aufgrund der Symmetrie gilt entsprechendes für  $v_1 \cdot v_2 - 1 = 0$ , so daß bei  $v_1 = v_2$  unabhängig von  $v_1 \cdot Q$  eine Singularität vorliegt, was unsere allgemeinen Überlegungen bezüglich der Geschwindigkeitssingularitäten in Abschnitt 6.2 bestätigt. Analytizität hinsichtlich der übrigen Skalarprodukte der  $\tilde{p}$ ,  $\underline{v}$  ist dadurch jedoch nicht ausgeschlossen, da die Amplitude bei  $v_1 \cdot v_2 = 1$  nicht divergiert. Mit  $v_1 = v_2 = v$  und  $m_1^{(0)} = m_2^{(0)}$  reduzieren sich die Gleichungen (D.23-D.24) auf

$$B/2 = \beta m_1^{(0)} v \cdot Q + (1-2\beta)m_1^{(0)} v \cdot (\alpha \tilde{p}_3 - (1-\alpha)\tilde{p}_4) \quad (\text{D.25})$$

$$C = -(1-2\beta)^2 m_1^{(0)2}. \quad (\text{D.26})$$

Integration über eine Umgebung von  $Y = 0, \beta = 1/2$  liefert einen Beitrag  $\sim (v \cdot Q)^{-1}$ , der somit genau dann divergiert, wenn neben (D.17) auch (D.18) gilt.

Der Vertexgraph in Abb. 6.1 ist nach Renormierung gemäß Kap. 7 durch

$$\int_0^\infty \frac{d\beta_1 d\beta_2 d\alpha_3}{\alpha_3^2} e^{-i\alpha_3 m_3^2 - i \frac{(\beta_1 m_1^{(0)} v_1 + \beta_2 m_2^{(0)} v_2)^2}{\alpha_3}} (e^{i\beta_1 m_1^{(0)} v_1 \cdot \tilde{p} + i\beta_2 m_2^{(0)} v_2 \cdot (\tilde{p} + \tilde{q})} - 1) \quad (\text{D.27})$$

gegeben, was sich in die Form

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\beta dY dZ (1-Y)^2 [Y^2 m_3^2 - 2Y(1-Y)Z(\beta m_1^{(0)} v_1 \cdot \tilde{p} + (1-\beta)m_2^{(0)} v_2 \cdot (\tilde{p} + \tilde{q})) \\ + (1-Y)^2 (\beta m_1^{(0)} v_1 + (1-\beta)m_2^{(0)} v_2)^2]^{-2} \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

bringen läßt. Aus dieser geht durch einfache Abschätzung hervor, daß die Amplitude für  $v_1 = -v_2$  divergiert, wobei sich der führende Term wie

$$w^{-1/2} \ln w \quad \text{mit} \quad w = v_1 \cdot v_2 + 1 \quad (\text{D.29})$$

verhält. In diesem Fall ist die Amplitude für alle Werte von  $\tilde{p}, q$  undefiniert.

### D.3 QED-Selbstenergie im HQET-Limes

Mit  $\Sigma = \frac{e^2}{16\pi^2} \gamma^\nu I_\Sigma \gamma_\nu$  ist die BPHZ-renormierte Selbstenergie in Einschleifenordnung durch

$$I_\Sigma(p) = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left( m + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \not{p} \right) e^{-i\alpha_1 m^2 - i\alpha_2 \mu^2} \left( e^{i \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} p^2} - 1 \right) \quad (\text{D.30})$$

gegeben. Mit der heavy-quark Parametrisierung  $p = mv + \tilde{p}$ ,  $m = \lambda m_0$  sowie der Substitution

$$\alpha_2 = \alpha X, \alpha_1 = \frac{(1-\alpha)X}{\lambda} \quad (\text{D.31})$$

und Integration über  $X$  erhält man

$$-\int_0^1 \frac{d\alpha}{\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)^2} \left( m_0 + \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}} (m_0 \not{v} + \frac{\not{\tilde{p}}}{\lambda}) \right) \ln \frac{\alpha^2 \mu^2 + (1-\alpha)^2 m_0^2 - 2\alpha(1-\alpha)m_0 v \cdot \tilde{p} - \alpha(1-\alpha) \frac{\tilde{p}^2 - \mu^2}{\lambda}}{(\alpha \mu^2 + (1-\alpha)\lambda m_0^2) \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)}. \quad (\text{D.32})$$

Die zweite Zeile von (D.32) bringen wir in die Form

$$\left[ \ln \left( \alpha^2 \frac{\mu^2}{m_0^2} + (1-\alpha)^2 - 2\alpha(1-\alpha) \frac{v \cdot \tilde{p}}{m_0} - \alpha(1-\alpha) \frac{\tilde{p}^2 - \mu^2}{\lambda m_0^2} \right) + 2\alpha \left( 1 + \frac{v \cdot \tilde{p}}{m_0} + \frac{1}{\lambda} \frac{\tilde{p}^2 - \mu^2}{2m_0^2} \right) \right] - 2\alpha \left( 1 + \frac{v \cdot \tilde{p}}{m_0} + \frac{1}{\lambda} \frac{\tilde{p}^2 - \mu^2}{2m_0^2} \right) - \ln \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda} \right) - \ln \lambda - \ln \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\mu^2}{m_0^2} \right), \quad (\text{D.33})$$

mit der man durch nach längerer aber einfacher Rechnung bis einschließlich  $O(1)$  das in (7.20) angegebene Ergebnis erhält.

Wenn man hingegen nach der Ersetzung  $p = mv + \tilde{p}$ ,  $m = \lambda m_0$  das Taylor-Polynom 1. Grades in  $\tilde{p}$  subtrahiert, wird man auf

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} e^{-i\alpha_2 \mu^2 - i \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2} m^2} \left[ \left( m + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (m \not{v} + \not{\tilde{p}}) \right) \left( e^{i \frac{\alpha_1 \alpha_2 (2mv \cdot \tilde{p} + \tilde{p}^2)}{\alpha_1 + \alpha_2}} - 1 \right) - 2im^2 v \cdot \tilde{p} \left( 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \not{v} \right) \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] \quad (\text{D.34})$$

geführt. Die gleiche Substitution wie oben und Integration über  $X$  liefern

$$-\int_0^1 \frac{d\alpha}{\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)^2} \left\{ \left( m_0 + \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}} (m_0 \not{v} + \frac{\not{\tilde{p}}}{\lambda}) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} & \ln \frac{\alpha^2 \mu^2 + (1-\alpha)^2 m_0^2 - \alpha(1-\alpha)(2m_0 v \cdot \tilde{p} + \frac{\tilde{p}^2 - \mu^2}{\lambda})}{\alpha^2 \mu^2 + (1-\alpha)^2 m_0^2 + \frac{1}{\lambda} \alpha(1-\alpha) \mu^2} \\ & + 2m_0^2 v \cdot \tilde{p} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}} \psi\right) \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}} \left(\alpha \mu^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha + \frac{1-\alpha}{\lambda}} m_0^2\right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

und im Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  den Ausdruck.

$$\begin{aligned} & -(1+\psi) \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^2} \left\{ m_0 \ln \frac{\alpha^2 \mu^2 + (1-\alpha)^2 m_0^2 - 2\alpha(1-\alpha)m_0 v \cdot \tilde{p}}{\alpha^2 \mu^2 + (1-\alpha)^2 m_0^2} \right. \\ & \left. + 2v \cdot \tilde{p} \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha^2 \frac{\mu^2}{m_0^2} + (1-\alpha)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Dessen Äquivalenz zu (7.22) folgt aus

$$\frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha^2 \frac{\mu^2}{m_0^2} + (1-\alpha)^2} = \alpha + \alpha^2 \frac{1 - \alpha(\frac{\mu^2}{m_0^2} + 1)}{\alpha^2 \frac{\mu^2}{m_0^2} + (1-\alpha)^2} \quad (\text{D.37})$$

und der logarithmischen Integration

$$2 \int_0^1 d\alpha \frac{1 - \alpha(\frac{\mu^2}{m_0^2} + 1)}{\alpha^2 \frac{\mu^2}{m_0^2} + (1-\alpha)^2} = \ln \frac{m_0^2}{\mu^2}. \quad (\text{D.38})$$

## D.4 Beispiele für die Renormierung der HQET

In diesem Abschnitt soll die in Kapitel 7 formulierte Renormierungsvorschrift für die HQET anhand der Selbstenergiegraphen aus Abb. 4.3 demonstriert werden. Dabei betrachten wir nur die Subdivergenzen, da die Beseitigung der overall-Divergenz auch in der Parameterdarstellung einfach durch Taylorentwicklung bzgl. der äußeren Impulse  $\tilde{p}$  bewerkstelligt werden kann. Der erste Graph enthält die überlappenden logarithmischen Divergenzen  $\Gamma_1 = \{1, 2, 4\}$  und  $\Gamma_2 = \{2, 3, 5\}$ . In Gl. (4.44) sind daher folgende Ersetzungen vorzunehmen:

$$\alpha_1 \rightarrow \zeta_1 \alpha_1, \quad \alpha_2 \rightarrow \zeta_1 \zeta_2 \alpha_2, \quad \alpha_3 \rightarrow \zeta_2 \alpha_3 \quad (\text{D.39})$$

$$\alpha_4 \rightarrow \zeta_1^2 \alpha_4, \quad \alpha_5 \rightarrow \zeta_2^2 \alpha_5. \quad (\text{D.40})$$

Multiplikation des Integranden mit  $\zeta_1^4 \zeta_2^4$  und Anwendung des Operators  $\overline{R} = 1 - T_{\zeta_1}^0 - T_{\zeta_2}^0$  führt schließlich auf

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{d\alpha_{1\dots 5}}{\alpha_4^2 \alpha_5^2} e^{-i(\alpha_4 \mu_4^2 + \alpha_5 \mu_5^2)} \quad (\text{D.41}) \\ & \left\{ \exp i \left[ 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i m_i^{(0)} v_i \cdot s_i - \frac{(\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_2 m_2^{(0)} v_2)^2}{\alpha_4} - \frac{(\alpha_2 m_2^{(0)} v_2 + \alpha_3 m_3^{(0)} v_3)^2}{\alpha_5} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \exp i \left[ 2\alpha_3 m_3^{(0)} v_3 \cdot s_3 - \frac{(\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_2 m_2^{(0)} v_2)^2}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3^2 m_3^{(0)2}}{\alpha_5} \right] \\
& - \exp i \left[ 2\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 \cdot s_1 - \frac{\alpha_1^2 m_1^{(0)2}}{\alpha_4} - \frac{(\alpha_2 m_2^{(0)} v_2 + \alpha_3 m_3^{(0)} v_3)^2}{\alpha_5} \right] \}.
\end{aligned}$$

Der zweite Graph weist nur eine (lineare) Subdivergenz  $\Gamma_1 = \{2, 4\}$  auf, zu deren Renormierung man

$$\alpha_2 \rightarrow \zeta \alpha_2, \quad \alpha_4 \rightarrow \zeta^2 \alpha_4 \quad (\text{D.42})$$

setzt, mit  $\zeta_1^4 \zeta_2^4$  multipliziert und den Operator  $\bar{R} = 1 - T_\zeta^1$  anwendet:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{d\alpha_{1\dots 5}}{\alpha_4^2 \alpha_5^2} e^{-i(\alpha_4 \mu_4^2 + \alpha_5 \mu_5^2)} \quad (\text{D.43}) \\
& \exp i \left[ 2\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 \cdot s_1 + 2\alpha_3 m_3^{(0)} v_3 \cdot s_3 - \frac{\alpha_2^2 m_2^{(0)2}}{\alpha_4} - \frac{(\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_3 m_3^{(0)} v_3)^2}{\alpha_5} \right] \\
& \left\{ \exp i \left[ 2\alpha_2 m_2^{(0)} v_2 \cdot s_2 - \frac{\alpha_2^2 m_2^{(0)2} + 2\alpha_2 m_2^{(0)} v_2 (\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_3 m_3^{(0)} v_3)}{\alpha_5} \right] \right. \\
& - 1 \\
& \left. - i(2m^{(0)} v \cdot \tilde{p} \alpha_2 - \frac{2\alpha_2 m_2^{(0)} v_2 (\alpha_1 m_1^{(0)} v_1 + \alpha_3 m_3^{(0)} v_3)}{\alpha_5}) \right\}.
\end{aligned}$$





# Literaturverzeichnis

- [1] M. Gell-Mann, F.E. Low, Phys.Rev. **95**(1954)1300
- [2] V.V. Sudakov, Sov.Phys.JETP **3**(1954)65
- [3] D.R. Yennie, S.C. Frautschi, H. Suura, Ann.Phys. **13**(1961)379
- [4] G. Morchio, F. Strocchi, *Infrared Problem, Higgs Phenomenon, and Long Range Interactions*, Erice lectures 1985
- [5] V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton, 1991
- [6] E. Eichten, B. Hill, Phys.Lett. **B234**(1990)511
- [7] B. Grinstein, Nucl.Phys. **B339**(1990)253
- [8] H. Georgi, Phys.Lett. **B240**(1990)447
- [9] T. Mannel, W. Roberts, Z. Ryzak, Nucl.Phys. **B368**(1992)204
- [10] T. Mannel, *Heavy Quark Effective Theory*, THD preprint, IKDA 92/6
- [11] J. Ambjorn, Comm.Math.Phys. **67**(1979)109
- [12] N.P. Landsmann, Comm.Math.Phys. **125**(1989)643
- [13] E.B. Manoukian, Journ.Math.Phys. **25**(1978)1519
- [14] S. Weinberg, Phys.Rev. **118**(1960)838
- [15] J.P. Fink, Journ.Math.Phys. **9**(1968)1389
- [16] D.A. Slavnov, Teor.Mat.Fiz. **17**(1973)169, amerikanische Übersetzung in Theor.Math.Phys. **17**(1973)1067
- [17] W.E. Caswell, A.D. Kennedy, Phys.Rev. **D28**(1983)3073
- [18] M.C. Bergère, Y.M.P. Lam, Comm.Math.Phys. **39**(1976)1

- [19] M.C. Bergère, C. de Calan, A.P.C. Malbouisson, *Comm.Math.Phys.* **62**(1978)137
- [20] C. de Calan, A.P.C. Malbouisson, *Ann.IHP* **32**(1980)91
- [21] K. Pohlmeyer, *Int. Symp. Math. Phys. Kyoto, LNP 39*, pp. 59  
*Journ.Math.Phys.* **23**(1982)2511
- [22] Y. Hahn, W. Zimmermann, *Comm.Math.Phys.* **10**(1968)330
- [23] W. Zimmermann, *Comm.Math.Phys.* **11**(1968)1
- [24] J.H. Lowenstein, E. Speer, *Comm.Math.Phys.* **47**(1976)43
- [25] C. Chandler, *Comm.Math.Phys.* **19**(1970)169
- [26] P. Breitenlohner, D.Maison, *Comm.Math.Phys.* **52**(1977)11, 39, 55
- [27] K. Symanzik, *Prog.Theor.Phys.* **20**(1958)690
- [28] H. Epstein, V. Glaser, *Ann. IHP* **19**(1973)211
- [29] N.N. Bogolubov, O.S. Parasiuk, *Acta Math.* **97**(1957)227
- [30] K. Hepp, *Comm.Math.Phys.* **2**(1966)301
- [31] W. Zimmermann, *Comm.Math.Phys.* **15**(1969)208
- [32] T. Appelquist, *Ann.Phys.* **54**(1969)27
- [33] M.C. Bergère, J.B. Zuber, *Comm.Math.Phys.* **35**(1974)113
- [34] M.C. Bergère, Y.M.P. Lam, *Journ.Math.Phys.* **17**(1976)1546
- [35] S.A. Anikin, O.I. Zavyalov, M.K. Polivanov, *Teor.Mat.Fiz.* **17**(1973)189 bzw. 1082
- [36] S.A. Anikin, M.K. Polivanov, *Teor.Mat.Fiz.* **21**(1974)175 bzw. 1058
- [37] O.I. Zavyalov: *Teor.Mat.Fiz.* **23**(1975)291 bzw. 519
- [38] M.C. Bergère, Y.M.P. Lam, *Comm.Math.Phys.* **48**(1976)267
- [39] N. Nakanishi, *Graph Theory and Feynman Integrals*, Gordon and Breach, 1971
- [40] E.R. Speer, *Generalized Feynman Amplitudes*, Princeton, 1969
- [41] R.J Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, J.C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, Cambridge, 1966

- [42] I.T. Todorov, *Analytic properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory*, Pergamon, 1971
- [43] R.C. Hwa, V.L. Teplitz, *Homology and Feynman Integrals*, Benjamin, 1966
- [44] O.I. Zavialov, *Renormalized Quantum Field Theory*, Kluwer, 1989
- [45] G. Velo, A.S. Wightman, *Renormalization Theory*, Erice lectures 1975