

Bachelorstageverslag

Invarianten van Kauffman in de knopentheorie

Auteur:
Elise Hopman

Begeleider:
Dr. Michael Mürger

Radboud Universiteit Nijmegen



28 maart 2012

Inhoudsopgave

Voorwoord	2
1 Introductie knopentheorie	3
2 Het <i>bracket</i> polynoom	8
2.1 Het <i>bracket</i> polynoom: twee definities, een polynoom	8
2.2 Het <i>bracket</i> polynoom als knoopinvariant	12
3 Het Kauffman polynoom	18
3.1 Het <i>Kauffman</i> polynoom, een invariant van reguliere isotopie . . .	18
3.2 Het verband tussen het <i>Kauffman</i> polynoom en andere knoopinvarianten	31
A Voorbeelden	34
B Berekeningen	39

Voorwoord

Iedereen komt in zijn leven wel eens knopen tegen. Sterker nog, mijn eerste diploma ooit was mijn veterstrikdiploma. Voor mijn bachelordiploma natuur- en wiskunde heb ik nu een literatuurstudie naar knopentheorie gedaan. Toen ik aan deze stage begon wist ik niets af van knopentheorie. Door het lezen van ‘Knots: mathematics with a twist’ [7], een boekje voor leken over knopen in de wiskunde, raakte ik in het onderwerp geïnteresseerd. Met name de connectie tussen het *bracket*polynoom van Kauffman en statistische mechanica maakte dat ik besloot het werk van Kauffman in knoopinvarianten te bestuderen.

Dit verslag is qua niveau geschreven voor een 3e jaars wis- of natuurkundestudent zonder specifieke voorkennis over knopentheorie. De bewijzen over bepaalde polynomen in dit verslag zijn makkelijker te volgen wanneer je een voorbeeldberekening van een knoopinvariant gezien hebt. Daarom zijn in een appendix van enkele polynomen voorbeelden opgenomen voor de eenvoudigste niet-triviale knoop. De lezer die al bekend is met knopentheorie zal deze appendix over kunnen slaan.

Het eerste hoofdstuk is een korte introductie in knopentheorie met alle definities en een stelling die nodig zijn in de rest van het verslag. Vervolgens wordt in het tweede hoofdstuk het *bracket*polynoom van Kauffman bestudeerd en uitgebreid naar het Jones polynoom. In het derde hoofdstuk wordt het Kauffman-polynoom uitgebreid behandeld met als afsluitende sectie de verbanden tussen alle bekeken polynomen. Verder zijn lange stukken die van de hoofdlijn afleiden opgenomen in de eerder genoemde appendix met voorbeelden en een appendix met berekeningen.

Ik hoop dat de lezer aan het einde van dit verslag ook enthousiast is over knopentheorie en een goed beeld heeft van verschillende polynomen als knoopinvarianten en hun onderlinge verbanden. Rest mij nu niets dan het bedanken van Dr. Michael Müger voor zijn begeleiding bij deze bachelorstage.

Hoofdstuk 1

Introductie knopentheorie

Voor we over knopen kunnen praten is het belangrijk exact te definiëren wat we met een knoop bedoelen, hoe we deze op papier willen weergeven en wanneer twee plaatjes van knopen eigenlijk over dezelfde knoop gaan. Dit hoofdstuk is een korte introductie in knopentheorie en definieert de begrippen waarop de rest van dit verslag bouwt.

Definitie 1.0.1. Een knoop is een inbedding van de cirkel S^1 in de 3-dimensionale Euclidische ruimte \mathbb{R}^3 . Een schakel is een knoop die uit meerdere disjuncte ingebedde cirkels bestaat, die mogelijk verstrengeld zijn. Een georiënteerde knoop of schakel is een knoop of schakel met aan elke ingebedde cirkel een richting toegekend.

Opmerking 1.0.2. De begrippen die ik in dit verslag behandel gelden voor schakels en in het bijzonder dus ook voor knopen. Ik zal de woorden knoop en schakel door elkaar heen gebruiken.

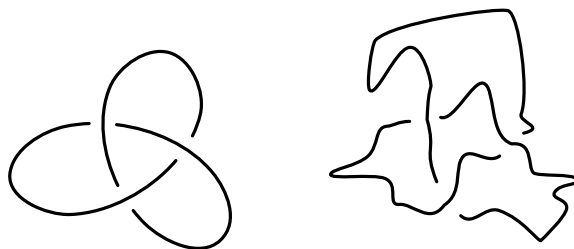
Definitie 1.0.3. Een diagram van een knoop of schakel is een projectie van de schakel op het vlak, met een eindig aantal meervoudige punten¹; deze punten mogen alleen simpele² transversale³ kruisingen zijn (twee draadstukken die één punt gemeenschappelijk hebben). In het diagram wordt voor elke kruising aangegeven welke draad de bovenliggende is en welke de onderliggende door een stukje van de projectie van de onderliggende weg te laten.

Opmerking 1.0.4. We beschouwen twee knoopdiagrammen die slechts van elkaar verschillen door de vervorming van een draad(stuk) als equivalent. Dit noemen we isotopie in het vlak. Er mag niets aan de kruisingen veranderen. Zie Figuur 1.1 voor een voorbeeld.

¹Waar ‘schaduwen’ samenvallen.

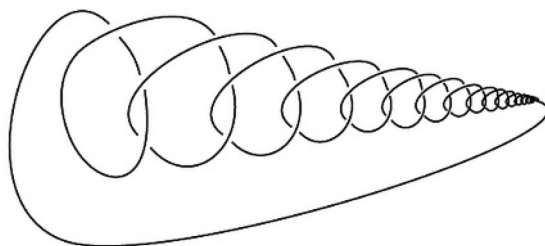
²Hiermee wordt bedoeld: niet meer dan twee draden mogen elkaar in een punt kruisen.

³Hiermee wordt bedoeld dat twee draden op geen enkel gemeenschappelijk punt (kruising) dezelfde raaklijn mogen hebben.



Figuur 1.1: Beide knopen zijn hetzelfde op een isotopie in het vlak na.

Opmerking 1.0.5. De definitie van knopen zoals hij nu gegeven is staat nog wilde knopen toe. Dit zijn pathologische knopen die oneindig ver geknoopt zijn, zoals in het voorbeeld in Figuur 1.2 te zien is. Daarom moeten we de definitie nog iets strikter maken.



Figuur 1.2: Een diagram van een wilde knoop.

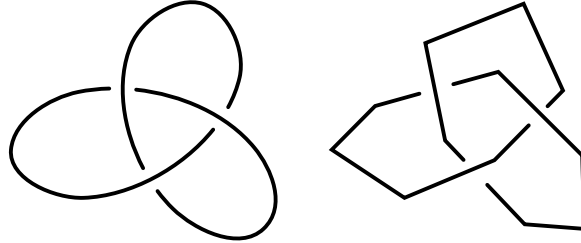
Definitie 1.0.6. Een knoop of schakel heet een goede knoop als elke draad⁴ ook stuksgewijs lineair getekend zou kunnen worden met eindig veel lijnstukken.

Voorbeeld 1.0.7. De knopen in Figuur 1.3 illustreren Definitie 1.0.6.

Opmerking 1.0.8. Wanneer het in de rest van dit stageverslag over een knoop of schakel gaat wordt impliciet aangenomen dat dit een goede knoop is.

Definitie 1.0.9. De eenvoudigste knoop is de cirkel, het diagram van een niet-knoop zonder kruisingen. Een diagram dat isotoop is aan de cirkel maar wel kruisingen heeft noemen we een niet-knoop. Een diagram van een schakel met als componenten onverstrengelde niet-knopen noemen we een niet-schakel en een niet-schakel met n componenten zonder kruisingen geven we aan als n losse cirkels.

⁴Met draad wordt één ingebedde cirkel bedoeld.



Figuur 1.3: De linker knoop is een goede knoop: rechts is te zien dat hij ook stuksgewijs lineair getekend kan worden met eindig veel stukken.

Definitie 1.0.10. Het teken van een kruising is als volgt gedefinieerd: $\nearrow = +$ en $\searrow = -$. Wanneer het teken van een kruising voor een berekening nodig is worden respectievelijk $+1$ en -1 gebruikt.

Definitie 1.0.11. De Reidemeisterbewegingen zijn manieren om het diagram van een knoop aan te passen *zonder dat de knoop in een andere knoop verandert*⁵.

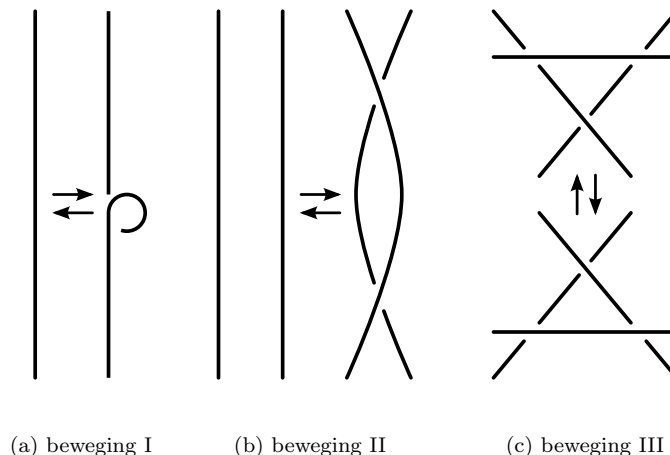
- I deze beweging voegt een lusje toe of haalt deze weg uit een draad (Figuur 1.4a)
- II deze beweging trekt twee draden over elkaar heen of van elkaar af (Figuur 1.4b)
- III deze beweging trekt een draad over een kruising van twee andere draden heen (Figuur 1.4c)

Opmerking 1.0.12. Bij de Reidemeisterbeweging I hoort ook nog beweging I' waar het lusje onderlangs gaat. Bij II hoort II' waar de linkerdraad onder de rechterdraad gaat en bij III horen meerdere anderen waarbij de volgorde van de draden (boven, midden en onder) anders is. Het gaat echter om het *type* beweging, dus met Reidemeisterbeweging I wordt ook I' bedoeld etc.

Stelling 1.0.13. *Twee knopen zijn isomorf (omgevende isotopie) dan en slechts dan als hun diagrammen met behulp van de Reidemeisterbewegingen in elkaar kunnen worden overgevoerd.*

Deze belangrijke stelling van Reidemeister maakt het mogelijk om aan knopen te werken, het geeft een handvat om te weten of twee knopen verschillend zijn of niet. Een bewijs ervan is niet opgenomen in deze scriptie, voor een helder bewijs zie Hoofdstuk 1 in het boek 'Knots' van Burde en Zieschang [1].

⁵Dit laatste is intuïtief duidelijk, maar op dit moment nog gewoon een bewering.



Figuur 1.4: De drie Reidemeisterbewegingen

Definitie 1.0.14. We spreken van reguliere isotopie dan en slechts dan als de diagrammen van twee knopen met behulp van Reidemeisterbewegingen II en III in elkaar kunnen worden overgevoerd. Reguliere isotopie van twee knopen is dus minder sterk dan omgevende isotopie.

Je kunt dus van twee diagrammen van knopen in principe weten of het wel of niet om dezelfde knoop gaat. Het is alleen niet gelijk duidelijk welke Reidemeisterbeweging je op welk(e) stuk(ken) van een diagram moet uitvoeren om hem in de andere te veranderen. Als je bijvoorbeeld een tijdje gepuzzeld hebt en het kwam niet uit dan vermoed je wel dat de diagrammen niet van dezelfde knoop zijn, maar je kunt nooit zeker weten of de knopen misschien toch hetzelfde waren, je kunt namelijk altijd doorgaan met Reidemeisterbewegingen uitvoeren.

Daarom is het handig om een knoopinvariant te zoeken: een kwantiteit die je toekent aan een knoopdiagram, waarvan je weet dat als de diagrammen bij dezelfde knoop horen de invariant voor beide diagrammen dezelfde waarde zal hebben. Dit kun je natuurlijk omkeren: wanneer twee diagrammen niet dezelfde invariant hebben weet je zeker dat ze niet bij dezelfde knoop horen. Er zijn meerdere knoopinvarianten met deze eigenschap bekend: het Alexanderpolynoom, het Jonespolynoom, etc. In dit stageverslag worden het bracketpolynoom van Kauffman en het Kauffmanpolynoom bestudeerd.

Voor het maken van dit soort knoopinvarianten zijn de Reidemeisterbewegingen belangrijk: dat een invariant bij diagrammen van dezelfde knoop dezelfde waarde heeft is te bewijzen door te laten zien dat hij invariant is voor de Reidemeisterbewegingen. Deze bepalen immers of twee diagrammen bij dezelfde knoop horen. Dit zullen we dan ook doen voor de verschillende polynomen die in dit stageverslag behandeld zullen worden.

Het mooiste zou zijn wanneer de invariant twee kanten op werkt: twee diagrammen horen bij dezelfde knoop *dan en slechts dan als* de diagrammen dezelfde invariant hebben. Dit is nog een open probleem in de knopentheorie. Bij elk van de bovengenoemde invarianten zijn er knopen te vinden die niet hetzelfde zijn maar wel dezelfde invariant hebben. Het Alexanderpolynoom bijvoorbeeld maakt geen onderscheid tussen de simpelste niet-triviale knoop (de *trefoil*) en zijn spiegelbeeld.

Hoofdstuk 2

Het *bracket*polynoom

Kauffman bedacht het *bracket*polynoom als een makkelijke manier om het Jones polynoom te definiëren. De definitie van het polynoom wordt behandeld in Sectie 2.1. In Sectie 2.2 wordt uitgelegd hoe het polynoom invariant kan worden gemaakt onder de Reidemeisterbewegingen zodat het een invariant van omgevende isotopie is, namelijk het Jones polynoom.

2.1 Het *bracket*polynoom: twee definities, een polynoom

Kauffman geeft in zijn artikel ‘State models and the Jones polynomial’[3] twee definities van het *bracket*polynoom. Beide definities zullen geïntroduceerd worden en in Propositie 2.1.7 zal aangetoond worden dat het in beide definities om hetzelfde polynoom gaat. Omdat beide anders gedefinieerd zijn zal het in Definitie 2.1.1 genoemde polynoom het *bracket*polynoom $\langle K \rangle$ worden genoemd, en het in Definitie 2.1.6 genoemde polynoom het haakjespolynoom $[K]$. Als voorbeeld worden in Appendix A voor de *trefoil* beide polynomen berekend. Lezers die nog niet eerder met polynomen als knoopinvarianten in aanraking zijn gekomen wordt aangeraden na het lezen van de definities de bijbehorende voorbeelden in de Appendix te bekijken.

Definitie 2.1.1. Zij K een diagram van een ongeoriënteerde knoop of schakel, laat dan $\langle K \rangle$, het *bracket*polynoom op $\mathbb{Z}[A, B, d]$ horende bij K als volgt recursief gedefinieerd zijn:

- i) Het *bracket*polynoom neemt de waarde 1 aan op het diagram van de cirkel:

$$\langle \bigcirc \rangle = 1 \tag{2.1}$$

- ii) Als men aan een knoop een losse cirkel toevoegt wordt het *bracket*polynoom van de knoop met een factor d vermenigvuldigd:

$$\langle \bigcirc \cup K \rangle = d \cdot \langle K \rangle \tag{2.2}$$

iii) Met de volgende formule kan een gegeven diagram van een knoop steeds vereenvoudigd worden tot er alleen een aantal disjuncte cirkels overblijft:

$$\begin{aligned} \langle D_+ \rangle &= A \cdot \langle D_0 \rangle + B \cdot \langle D_\infty \rangle \\ \langle \diagdown \rangle &= A \cdot \langle \rangle \langle \rangle + B \cdot \langle \frown \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

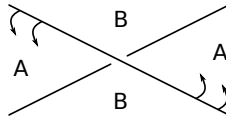
waarbij D_+ , D_0 en D_∞ manieren zijn om naar de corresponderende kruisingen in (2.3) te verwijzen¹.

Opmerking 2.1.2. Uit Definitie 2.1.1.iii volgt, door alle knopen 90° te draaien, ook de relatie tussen D_- , D_0 en D_∞ . De knoop D_- verschilt van D_+ in onder- en bovenliggend component van de kruising.

$$\langle D_- \rangle = A \cdot \langle D_\infty \rangle + B \cdot \langle D_0 \rangle \quad (2.4)$$

$$\langle \diagup \rangle = A \cdot \langle \frown \rangle + B \cdot \langle \rangle \langle \rangle \quad (2.5)$$

Het valt op dat het draaien van een diagram van een ongeoriënteerde knoop een $+$ -kruising in een $-$ -kruising en een 0 -kruising in een ∞ -kruising verandert. Een manier om een kruising te splitsen die niet afhangt van de oriëntatie van het diagram is als volgt: draai de bovenliggende draad tegen de klok in tot hij gelijk ligt met de onderliggende draad. Noem de gebiedjes aan beide kanten die hierdoor uitgeveegd zijn A en noem de overgebleven gebiedjes B , zoals te zien in Figuur 2.1.

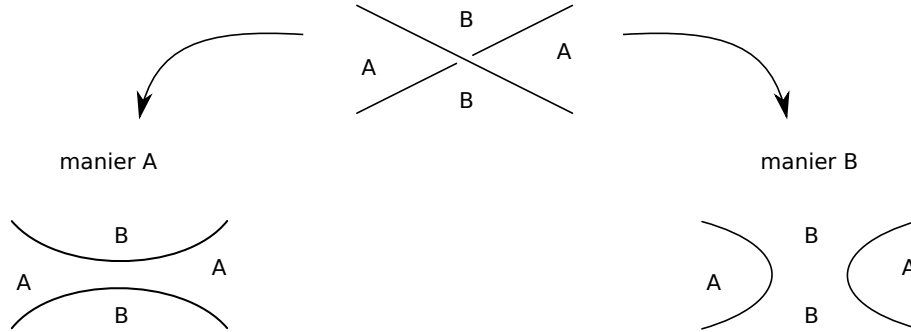


Figuur 2.1: Draai de bovenliggende draad tegen de klok in naar de onderliggende draad toe. De uitgeveegde gebiedjes worden A genoemd, de andere B

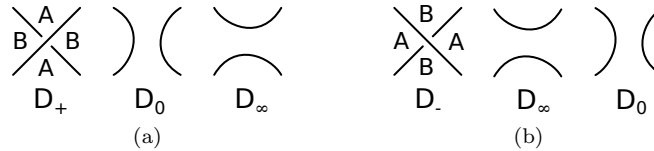
Nu zijn er twee manieren om de kruising te splitsen, geïllustreerd in Figuur 2.2:

- Verbind de met A gelabelde gebiedjes met elkaar (manier A)
- Verbind de met B gelabelde gebiedjes met elkaar (manier B)

Opmerking 2.1.3. Laten we deze nieuwe manier labelen vergelijken met de kruisingen in (2.3) en (2.4). Als we D_+ labelen (zie Figuur 2.3a) zien we dat de kruising in D_0 op manier A en in D_∞ op manier B gesplitst is. Als we D_- labelen (zie Figuur 2.3b) zien we dat de kruising in D_∞ op manier A en in D_0 op manier B gesplitst is. Merk op dat dit overeenkomt met de factoren A en B in (2.3) en (2.4).



Figuur 2.2: De kruising kan op twee manieren worden gesplitst.



Figuur 2.3: De kruisingen in D_+ en D_- gelabeled op de bovengenoemde manier.

Deze manier van splitsen zal de basis zijn voor de andere definitie van het polynoom.

Definitie 2.1.4. Zij K een diagram van een ongeoriënteerde knoop of schakel. Een toestand S van dit diagram wordt verkregen door elke kruising ofwel op manier A ofwel op manier B te splitsen. Bij zo'n toestand definiëren we

$$[K|S] = A^i B^j \tag{2.6}$$

waarbij i het aantal kruisingen is dat op manier A gesplitst is en j het aantal kruisingen dat op manier B gesplitst is. De verzameling van alle mogelijke toestanden S horende bij een diagram K noemen we \mathcal{S} .

Opmerking 2.1.5. Aan Definitie 2.1.4 vallen verschillende dingen op:

- i) Een toestand S heeft geen kruisingen meer en bestaat dus uit een of meerdere disjuncte cirkels.
- ii) Bij een diagram K met n kruisingen van een ongeoriënteerde knoop horen 2^n verschillende toestanden S , omdat elke kruising op 2 verschillende manieren gesplitst kan worden, dus $|\mathcal{S}| = 2^n$

¹Bij dit soort plaatjes met een deel van een knoop wordt er voortaan altijd vanuit gegaan dat de knopen slechts in het getekende stuk van elkaar verschillen en verder gelijk zijn

Definitie 2.1.6. Zij K een diagram van een ongeoriënteerde knoop of schakel, laat dan $[K]$, het haakjespolynoom op $\mathbb{Z}[A, B, d]$ horende bij K als volgt gedefinieerd zijn:

$$[K] = \sum_{S \in \mathcal{S}} [K|S] d^{|S|-1} \quad (2.7)$$

waarbij $|S|$ het aantal cirkels is waaruit de toestand S bestaat.

Propositie 2.1.7. Voor een gegeven diagram K van een ongeoriënteerde knoop of schakel geldt $[K] = \langle K \rangle$, met andere woorden: het haakjespolynoom en het bracketpolynoom zijn hetzelfde polynoom.

Bewijs. We moeten laten zien dat Definitie 2.1.1 en Definitie 2.1.6 altijd hetzelfde zijn voor een gegeven diagram K van een ongeoriënteerde knoop of schakel. Daarvoor moeten we voor elk van de drie recursievoorschriften van Definitie 2.1.1 nagaan of ze kloppen voor (2.7).

- i) de cirkel \bigcirc heeft geen kruisingen om te splitsen, dus is eigenlijk al een toestand bestaande uit één losse cirkel. $|\mathcal{S}| = 2^0 = 1$. Voor deze ene toestand geldt $|S| = 1$, $i = 0$ en $j = 0$. Als we dit invullen vinden we

$$[\bigcirc] = \sum_{S \in \mathcal{S}} [\bigcirc|S] d^{|S|-1} = A^0 B^0 d^{1-1} = 1$$

en dat klopt met

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

- ii) laat K een knoop zijn en geef met \mathcal{S} de verzameling van toestanden horende bij dit diagram aan. Voeg nu een losse cirkel aan het diagram toe, en zij \mathcal{S}' de verzameling van toestanden horende bij het diagram $\bigcirc \cup K$. De cirkel bevat geen kruisingen, dus de verzameling \mathcal{S}' is even groot als \mathcal{S} . De toestanden $S' \in \mathcal{S}'$ van $\bigcirc \cup K$ zijn exact dezelfde als $S \in \mathcal{S}$ met nu aan elke oude toestand $S \in \mathcal{S}$ een extra losse cirkel toegevoegd. Hieruit volgt dat $|S'| = |S| + 1 \forall S' \in \mathcal{S}'$. Hiermee kunnen we berekenen dat

$$\begin{aligned} [\bigcirc \cup K] &= \sum_{S' \in \mathcal{S}'} [\bigcirc \cup K|S'] d^{|S'|-1} = \sum_{S \in \mathcal{S}} [K|S] d^{|S|+1-1} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}} [K|S] d^{|S|-1} d = d \cdot \left(\sum_{S \in \mathcal{S}} [K|S] d^{|S|-1} \right) = d \cdot [K] \end{aligned}$$

en dat klopt met

$$\langle \bigcirc \cup K \rangle = d \cdot \langle K \rangle$$

- iii) Bekijk een diagram K van een ongeoriënteerde knoop of schakel met n kruisingen en zij \mathcal{S} de verzameling van toestanden horende bij deze knoop. Splits kruising m , met $m \in \{1, \dots, n\}$ met (2.3). Noem de zo ontstane knopen K_A (want in D_0 is de kruising op manier A gesplitst) en K_B (want in

D_∞ is de kruising op manier B gesplitst), met bijbehorende verzamelingen van toestanden \mathcal{S}_A en \mathcal{S}_B . Voor deze verzamelingen geldt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \{\text{toestanden waarbij kruising } m \text{ splitst op manier A}\} \\ & \cup \{\text{toestanden waarbij kruising } m \text{ splitst op manier B}\} = \mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B \end{aligned}$$

want in elke toestand $S \in \mathcal{S}$ is kruising m gesplitst op manier A of manier B. Nu willen we $[K]$ uitdrukken in $[K_A]$ en $[K_B]$:

$$[K] = \sum_{S \in \mathcal{S}} [K|S] d^{|S|-1} = \sum_{S \in \mathcal{S}_A} [K|S] d^{|S|-1} + \sum_{S \in \mathcal{S}_B} [K|S] d^{|S|-1}$$

Het verschil tussen $[K|S]$ met $S \in \mathcal{S}_A$ en $[K_A|S]$ met $S \in \mathcal{S}_A$ is dat in K_A er een kruising minder is: kruising m bestaat niet meer, maar in $[K|S]$ droeg deze nog een factor A bij. Want: $[K|S] = A^i B^j$ en $[K_A|S] = A^{i-1} B^j$. Analoog voor j in K_B . Nu kunnen we $[K]$ uitdrukken in $[K_A]$ en $[K_B]$:

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{S \in \mathcal{S}_A} A^i B^j d^{|S|-1} + \sum_{S \in \mathcal{S}_B} A^i B^j d^{|S|-1} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}_A} A A^{i-1} B^j d^{|S|-1} + \sum_{S \in \mathcal{S}_B} A^i B B^{j-1} d^{|S|-1} \\ &= A \cdot \left(\sum_{S \in \mathcal{S}_A} [K_A|S] d^{|S|-1} \right) + B \cdot \left(\sum_{S \in \mathcal{S}_B} [K_B|S] d^{|S|-1} \right) \\ &= A \cdot [K_A] + B \cdot [K_B] \end{aligned}$$

en dat komt overeen met $\langle D_+ \rangle = A \cdot \langle D_0 \rangle + B \cdot \langle D_\infty \rangle$ (zie Opmerking 2.1.3).

We hebben nu voor de drie recursievoorschriften van het *bracket*polynoom bewezen dat deze ook voor het haakjespolynoom gelden, dus voor een gegeven diagram van een knoop K geldt altijd: $[K] = \langle K \rangle$ \square

Vanaf nu zal ik het alleen nog hebben over het *bracket*polynoom $\langle K \rangle$ van een knoop.

2.2 Het *bracket*polynoom als knoopinvariant

We kunnen nu dus spreken van *het bracket*polynoom. De bedoeling is om met dit polynoom onderscheid te kunnen maken tussen knopen. Omdat volgens Stelling 1.0.13 knopen hetzelfde blijven onder Reidemeisterbewegingen, moeten we eerst zorgen dat dit voor het *bracket*polynoom geldt.

Lemma 2.2.1. *Het bracketpolynoom is invariant onder Reidemeisterbeweging II wanneer we*

$$B = \frac{1}{A} \quad \text{en} \quad d = -\frac{1}{A^2} - A^2 \quad (2.8)$$

nemen.

Bewijs. Laten we (2.3) op de onderste kruising van een Reidemeisterbeweging II toepassen:

$$\langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle = A \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle + B \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle \quad (2.9)$$

En in de zo verkregen diagrammen (2.4) op de bovenste kruising:

$$\begin{aligned} \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle &= A \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle + B \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle = A \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle + B \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle \\ \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle &= A \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle + B \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle = Ad \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle + B \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle \end{aligned}$$

Nu kunnen we dit invullen in (2.9):

$$\langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle = A \cdot (A \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle + B \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle) + B \cdot (Ad + B) \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle \quad (2.10)$$

$$= (A^2 + ABd + B^2) \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle + AB \cdot \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle \quad (2.11)$$

Om te zorgen dat het *bracketpolynoom* invariant is onder Reidemeisterbeweging II moeten we zorgen dat:

$$\langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle = \langle\langle \text{diagram} \rangle\rangle \quad (2.12)$$

Hieraan is voldaan als we eisen:

$$B = \frac{1}{A} \quad \text{en} \quad A^2 + ABd + B^2 = 0 \quad (2.13)$$

Met behulp van de eerste eis is de tweede om te schrijven tot:

$$d = -\frac{1}{A^2} - A^2 \quad (2.14)$$

□

Met deze aanpassingen is het *bracketpolynoom* dus invariant onder Reidemeisterbeweging II. We willen ook dat hij invariant is onder beweging III. Vanaf nu, wanneer het over het *bracketpolynoom* gaat, gaan we dus uit van de eisen uit Lemma 2.2.1

Lemma 2.2.2. *Het bracketpolynoom is invariant onder Reidemeisterbeweging III.*

Bewijs. We passen (2.4) toe op de kruising middenonder in de bovenste configuratie van Figuur 1.4c.

$$\langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagup \quad \diagdown \\ \hline \end{array} \rangle = A \cdot \langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \smile \\ \hline \end{array} \rangle + \frac{1}{A} \cdot \langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rangle \quad (2.15)$$

We passen wederom (2.4) toe, ditmaal op de kruising middenboven in de onderste configuratie van Figuur 1.4c.

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rangle = A \cdot \langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \smile \\ \hline \end{array} \rangle + \frac{1}{A} \cdot \langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rangle \quad (2.16)$$

Omdat we net bewezen hebben dat het *bracket*polynoom invariant is onder Reidemeisterbeweging II geldt:

$$\langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \smile \\ \hline \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \smile \\ \hline \end{array} \rangle \quad (2.17)$$

Het is duidelijk dat ook geldt:

$$\langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rangle \quad (2.18)$$

Hieruit volgt:

$$\langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagup \quad \diagdown \\ \hline \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rangle \quad (2.19)$$

□

Dus als het *bracket*polynoom invariant is onder Reidemeisterbeweging II is hij dat ook onder beweging III. Het *bracket*polynoom is dus een invariant van reguliere isotopie. Laten we Reidemeisterbeweging I bekijken.

Lemma 2.2.3. *Het bracketpolynoom is niet invariant onder een Reidemeister I beweging, want:*

$$\langle \text{I} \rangle = -\frac{1}{A^3} \langle \text{II} \rangle \quad \text{en} \quad \langle \text{II} \rangle - A^3 \langle \text{I} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

Bewijs. Dit bewijzen we door op de kruising van de lus (2.3) en vervolgens (2.2) toe te passen.

$$\begin{aligned} \langle \text{I} \rangle &= A \langle \text{II} \rangle + A^{-1} \langle \text{III} \rangle \\ &= A \langle \text{II} \rangle + A^{-1} \left(-\frac{1}{A^2} - A^2 \right) \langle \text{II} \rangle = -\frac{1}{A^3} \langle \text{II} \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

Analoog, maar nu met (2.4):

$$\begin{aligned} \langle \text{II} \rangle &= A \langle \text{III} \rangle + A^{-1} \langle \text{II} \rangle \\ &= A \left(-\frac{1}{A^2} - A^2 \right) \langle \text{II} \rangle + A^{-1} \langle \text{II} \rangle = -A^3 \langle \text{II} \rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

□

We willen een knoopinvariant van omgevende isotopie vinden, dus we zoeken een oplossing voor de factor $A^{\pm 3}$ die het *bracket*polynoom bij lussen heeft. Hiervoor hebben we het kruisingsgetal² van een knoop nodig.

Definitie 2.2.4. Het kruisingsgetal $\omega(K)$ van een georiënteerd knoopdiagram K is gedefinieerd als de som van de tekens (zie Definitie 1.0.10) van de kruisingen.

Merk op dat het kruisingsgetal niet verandert als je een Reidemeisterbeweging II of III toepast op een diagram van een knoop. Beweging II heeft altijd effect op zowel een + als een - kruising en beweging III schuift de kruisingen alleen over elkaar heen, maar verandert ze verder niet. Een Reidemeisterbeweging I verandert het kruisingsgetal wel, met ± 1 , afhankelijk van welk soort lus je maakt/weghaalt. Het kruisingsgetal is dus een invariant van reguliere isotopie.

Stelling 2.2.5. *Zij D een diagram van een georiënteerde knoop of schakel K , dan is de uitdrukking*

$$(-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle \quad (2.23)$$

een invariant van omgevende isotopie voor K . Hierbij definiëren we $\langle D \rangle$ op een georiënteerd diagram D door de orientatie te vergeten.

Bewijs. Omdat Reidemeisterbewegingen II en III geen invloed hebben op $\omega(K)$ en het *bracket*polynoom ook invariant is onder beide bewegingen is de uitdrukking in ieder geval een invariant van reguliere isotopie. Wanneer op een diagram D een type I beweging wordt uitgevoerd (merk op dat het om een +-kruising

²In het engels: *writhe*

gaat, zie Figuur 1.41.4a) komt er een factor $-A^{-3}$ bij door $\omega(D)$ en een factor $(-A)^3$ door $\langle D \rangle$, dus samen is dat een factor 1 en verandert een Reidemeister-beweging I de uitdrukking niet. Analoog voor een Reidemeisterbeweging I' met het andere type lus en (dus) de $--$ kruising. De uitdrukking is dus invariant onder alle drie de Reidemeisterbewegingen, en dus een invariant van omgevende isotopie. \square

Definitie 2.2.6. Zij gegeven een diagram D van een georiënteerde knoop of schakel L , dan is hierop het Jones polynoom $V(L)$ als volgt gedefinieerd:

$$V(L) = (-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \in \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}] \quad (2.24)$$

Het Jones polynoom is dus op een makkelijke manier te maken uit het *bracket*polynoom van Kauffman en is een invariant van omgevende isotopie. Jones definieerde zijn polynoom in [2] via von Neumann algebras. Naar aanleiding daarvan bedacht Kauffman het *bracket*polynoom, een veel eenvoudigere manier om het Jones polynoom te definiëren.

In de volgende Propositie wordt bewezen dat de definitie van het Jones polynoom via het *bracket*polynoom (Definitie 2.2.6) hetzelfde is als de gebruikelijke definitie met recursievoorschrift (2.27):

Propositie 2.2.7. *Het Jones polynoom is een functie*

$$V : \{ \text{Georiënteerde knopen en schakels in } \mathbb{R}^3 \} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{-\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}] \quad (2.25)$$

zodat

i) *Het Jonespolynoom neemt op de niet-knoop waarde 1 aan:*

$$V(\bigcirc) = 1 \quad (2.26)$$

ii) *Wanneer drie diagrammen slechts zoals in de getekende stukken van elkaar verschillen geldt:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}V(L_+) - tV(L_-) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0) \\ \frac{1}{t}V(\nearrow \searrow) - tV(\searrow \nearrow) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\nearrow \nearrow) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Waarbij L_+ , L_- en L_0 manieren zijn om naar de corresponderende diagrammen in (2.27) te verwijzen.

Bewijs. i) volgt uit (2.1) en $\omega(\bigcirc) = 0$.

ii) Laten we de relatie tussen L_+ , L_- en L_0 uitrekenen met behulp van (2.24), (2.3) en (2.4). Hieruit willen we (2.27) laten volgen.

$$\langle L_+ \rangle = A \langle L_0 \rangle + \frac{1}{A} \langle L_\infty \rangle \quad (2.28)$$

$$\langle L_- \rangle = \frac{1}{A} \langle L_0 \rangle + A \langle L_\infty \rangle \quad (2.29)$$

Om hieruit L_∞ weg te halen kunnen we de laatste uitdrukking met $\frac{1}{A^2}$ vermenigvuldigen en van de eerste trekken:

$$\frac{1}{A^2}\langle L_- \rangle = \frac{1}{A^3}\langle L_0 \rangle + \frac{1}{A}\langle L_\infty \rangle \quad (2.30)$$

$$\langle L_+ \rangle - \frac{1}{A^2}\langle L_- \rangle = \left(A - \frac{1}{A^3}\right)\langle L_0 \rangle \quad (2.31)$$

Verder geldt $\omega(L_+) = \omega(L_0) + 1$ en $\omega(L_-) = \omega(L_0) - 1$. Als we nu van het *bracket*polynoom naar het Jonespolynoom willen gaan moeten we eerst (2.24) omschrijven:

$$\begin{aligned} V(L) &= (-A)^{-3\omega(D)}\langle D \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \\ (-A)^{3\omega(D)} \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} V(L) &= \langle D \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nu kunnen we hiermee $\langle L_+ \rangle$, $\langle L_- \rangle$ en $\langle L_0 \rangle$ uit (2.31) omschrijven naar de bijbehorende Jonespolynomen:

$$\begin{aligned} \langle L_+ \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} &= (-A)^{3\omega(L_+)} \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} V(L_+) = (-A)^{3\omega(L_0)+1} \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} V(L_+) \\ \langle L_- \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} &= (-A)^{3\omega(L_-)} \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} V(L_-) = (-A)^{3\omega(L_0)-1} \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} V(L_-) \\ \langle L_0 \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} &= (-A)^{3\omega(L_0)} \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} V(L_0) \end{aligned}$$

We kunnen nu (2.31) uitdrukken in het Jonespolynoom V in plaats van het *bracket*polynoom.

$$\begin{aligned} (-A)^{3(\omega(L_0)+1)}V(L_+) - (-A)^{3(\omega(L_0)-1)}\frac{1}{A^2}V(L_-) \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \\ = (-A)^{3\omega(L_0)}\left(A - \frac{1}{A^3}\right)V(L_0) \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

Hierbij valt de factor $(-A)^{3\omega(L_0)}$ weg. We houden over:

$$-A^3V(L_+) + \frac{1}{A^3}\frac{1}{A^2}V(L_-) \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} = \left(A - \frac{1}{A^3}\right)V(L_0) \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}}$$

Nu vullen we in dat $A = t^{-\frac{1}{4}}$ en vereenvoudigen we het verband tussen $V(L_+)$, $V(L_-)$ en $V(L_0)$ nog verder:

$$\begin{aligned} -t^{-\frac{3}{4}}V(L_+) + t^{\frac{5}{4}}V(L_-) &= (t^{-\frac{1}{4}} - t^{\frac{3}{4}})V(L_0) \\ -\frac{1}{t}V(L_+) + tV(L_-) &= (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(L_0) \\ \frac{1}{t}V(L_+) - tV(L_-) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0) \end{aligned}$$

En dit is (2.27), waar we op uit moesten komen. \square

Hoofdstuk 3

Het Kauffmanpolynoom

In zijn artikel ‘An invariant of regular isotopy’ [4] definieert Kauffman het L-polynoom en toont hij aan dat dit polynoom een invariant van reguliere isotopie is. Het bewijs dat het L-polynoom een invariant van reguliere isotopie is in dit stageverslag is gebaseerd op het bewijs in Hoofdstuk 15 in het boek ‘An introduction to knot theory’ van Lickorish [5]. Dit bewijs zal het onderwerp zijn van Sectie 3.1. Het L-polynoom is op eenvoudige wijze uit te breiden tot een polynoom van omgevende isotopie: het Kauffmanpolynoom. Dit polynoom is een generalisatie van het *bracket*polynoom van Kauffman en dus ook van het Jones polynoom. Deze verbanden worden in Sectie 3.2 uitgewerkt

3.1 Het *Kauffman*polynoom, een invariant van reguliere isotopie

Voordat we het Kauffmanpolynoom kunnen definiëren in Sectie 3.2 hebben we eerst het L-polynoom nodig:

Stelling 3.1.1. *Er bestaat een uniek Laurent polynoom*

$$L : \{\text{diagrammen van ongeoriënteerde knopen en schakels}\} \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$$

gedefinieerd door:

i) *Het polynoom neemt de waarde 1 aan op de cirkel:*

$$L(\bigcirc) = 1 \tag{3.1}$$

ii) *Wanneer twee diagrammen slechts zoals in de getekende stukken van elkaar verschillen geldt:*

$$L\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array}\right) = a^{-1}L\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \end{array}\right) \tag{3.2}$$

iii) Wanneer vier diagrammen slechts zoals in de getekende stukken van elkaar verschillen, geldt:

$$L(D_+) + L(D_-) = z(L(D_0) + L(D_\infty))$$

$$L(\diagup \diagdown) + L(\diagdown \diagup) = z(L(\smile) + L(\frown)) \quad (3.3)$$

Waarbij D_+ , D_- , D_0 en D_∞ manieren zijn om naar de corresponderende kruisingen in (3.3) te refereren.

iv) Knopen of schakels die regulier isotoop zijn hebben hetzelfde polynoom L .

Opmerking 3.1.2. Merk op dat, omdat L op ongeoriënteerde schakels is gedefinieerd, D_+ en D_- eigenlijk willekeurige naamgeving is, aangezien het omkeert als je het diagram draait. Omdat D_+ en D_- in (3.3) symmetrisch voorkomen is deze ambiguïteit geen probleem. Ditzelfde geldt voor D_0 en D_∞ .

We zullen deze stelling per inductie op het aantal kruisingen in een diagram bewijzen. Voordat we dat kunnen doen hebben we nog een paar begrippen nodig:

Definitie 3.1.3. Het zelfkruisingsgetal¹ $\bar{\omega}(D)$ is gedefinieerd als de som van het teken van de zelfkruisingen van elk component. Merk op dat het zelfkruisingsgetal van een component niet van de oriëntatie van het component afhangt².

Definitie 3.1.4. Een diagram D van een georiënteerde schakel heet geordend wanneer een volgorde voor de componenten is vastgesteld, en gebaseerd als op elk component een basispunt wordt aangewezen.

Definitie 3.1.5. Bij een geordend, gebaseerd diagram D van een georiënteerde schakel kunnen we een opklimmend diagram αD als volgt definiëren: loop de componenten van D op volgorde langs, begin bij elk component bij het basispunt, loop hem dan met de oriëntatie mee langs en verander dan elke kruising die je tegenkomt (als dat nog niet zo was) zo dat de eerste keer dat je hem tegenkomt over de onderliggende draad is.

Je kunt αD dus zien als een stapel van componenten in \mathbb{R}^3 , waarbij elk losse component vanaf het basispunt omhoogklimt³, tot je het hele component rond bent, dan valt hij verticaal naar beneden terug naar het basispunt. αD is dus altijd een niet-schakel. We hebben ook een generalisatie van een opklimmend diagram nodig.

Definitie 3.1.6. Zij gegeven een diagram D voor een schakel S met geordende componenten. Een ontwaringsfunctie voor D is een reëelwaardige functie h op D , die op elke kruising tweewaardig is en correspondeert met een continue functie $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen

¹In het engels: *self-writhe*

²Dit is makkelijk in te zien door een kruising te tekenen, een oriëntatie op beide pijlen te kiezen en met Definitie 1.0.10 te kijken of de kruising + of - is. Draai vervolgens de oriëntatie om, beide pijlen veranderen dan. Vergelijk de kruising opnieuw met Definitie 1.0.10 en het teken is hetzelfde. Het is niet moeilijk dit voor alle mogelijke gevallen te controleren.

³Omhoogklimt, omdat je elke kruising eerst onderlangs, en dus daarna bovenlangs passeert.

- i) als een component c_i voor c_j komt in de ordening, dan geldt: $h(x_i) < h(x_j)$ voor alle $x_i \in c_i$ en $x_j \in c_j$
- ii) Op elke component c_i is de functie h strikt monotoon stijgend vanaf een bepaald basispunt $b_i \in c_i$ tot een toppunt $t_i \in c_i$, in beide richtingen over c_i .
- iii) Op een kruising is de waarde van h op het bovenliggende punt groter dan op het onderliggende punt.

Opmerking 3.1.7. Als een diagram D een ontwarringsfunctie heeft is het een diagram van de niet-schakel. Dit is makkelijk in te zien door de ontwarringsfunctie h te zien als een hoogte die je toekent aan elk punt in het diagram. Door eigenschap i) liggen alle componenten geheel boven of onder elkaar en zijn de verschillende componenten niet met elkaar verstrengeld. Door eigenschappen ii) en iii) weet je dat elk component een niet-knoop is⁴.

Een opklimmend diagram αD heeft dus een ontwarringsfunctie, waarbij het toppunt van elk component vlak voor⁵ het basispunt ligt. We hebben nu alle definities die we nodig hebben voor het bewijs van Stelling 3.1.1.

Bewijs. Merk ook op dat een oplossing voor (3.3) wordt gegeven door

$$(D_+, D_-, D_0, D_\infty) = (ax, \frac{x}{a}, x, \delta x) \quad (3.4)$$

met x een variabele en $\delta = \frac{a+\frac{1}{a}}{z} - 1$.

Definieer \mathcal{D}_n als de verzameling van alle ongeoriënteerde knoopdiagrammen met hoogstens n kruisingen. We gaan het bewijs per inductie over het aantal kruisingen in een diagram doen.

Inductiehypothese: neem aan dat $L : \mathcal{D}_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ gedefinieerd is zo dat voor diagrammen in \mathcal{D}_{n-1} geldt:

- a) (3.3) geldt voor elke vier diagrammen in \mathcal{D}_{n-1} die buiten de getekende stukken gelijk zijn.
- b) Voor elk paar van diagrammen die buiten de getekende stukken gelijk zijn aan elkaar en nooit meer dan $n - 1$ kruisingen hebben geldt:

$$L(\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \end{array}) = a^{-1}L(\begin{array}{c} \diagdown \\ \bigcirc \end{array}) \quad \text{en} \quad L(\begin{array}{c} \diagdown \\ \bigcirc \end{array}) = aL(\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \end{array}) \quad (3.5)$$

- c) $L(D)$ verandert niet wanneer je Reidemeisterbewegingen II of III op D toepast zodanig dat er nooit meer dan $n - 1$ kruisingen zijn.
- d) Voor elk diagram D in \mathcal{D}_{n-1} dat een ontwarringsfunctie heeft met $\#D$ componenten geldt: $L(D) = a^{\bar{\omega}(D)} \delta^{\#D-1}$

⁴Elk component is opklimmend, vanaf het basispunt in beide richtingen naar het toppunt.

⁵Met betrekking tot de orientatie op het component.

Inductiebasis: in \mathcal{D}_0 bestaan alleen diagrammen die uit n cirkels bestaan. Omdat deze diagrammen geen kruisingen hebben zijn a) t/m c) niet relevant. Het bewijs dat voor dit soort diagrammen inderdaad geldt $L(D) = \delta^{\#D-1}$ staat in Lemma B.0.7 in Appendix B. Hiermee is de inductiebasis compleet.

Definieer L nu als volgt op \mathcal{D}_n : Zij D een diagram met n kruisingen⁶. Kies op elk component een oriëntatie, kies een volgorde van de componenten en kies een basispunt op elk component. Noem het bijbehorende opklimmende diagram αD . Definieer: $L(\alpha D) = a^{\tilde{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1}$, waarin $\#D$ het aantal componenten van D is (en dus ook van αD). Nu kunnen we D krijgen door een voor een de kruisingen van αD goed te zetten. In elke stap kun je (3.3) gebruiken om L van het nieuwe diagram te weten: $L(D_+)$ is bekend, want dit is het diagram uit de vorige stap (in eerste instantie dus $L(\alpha D)$); D_0 en D_∞ hebben $n-1$ kruisingen, dus per inductie bestaan $L(D_\infty)$ en $L(D_0)$ en voldoen ze aan a) t/m d). De enige onbekende in elke stap is dus $L(D_-)$, en we definiëren deze met (3.3). Nadat alle kruisingen zijn goedgezet hebben we dan het polynoom $L(D)$.

Is $L(D)$ welgedefinieerd? Hiervoor moeten we nagaan dat:

1. $L(D)$ niet van de volgorde afhangt waarin we de kruisingen goed hebben gezet om uit αD het polynoom $L(D)$ te berekenen.
2. het polynoom $L(D)$ niet van de gekozen basispunten op de componenten afhangt.
3. het polynoom $L(D)$ niet van de gekozen oriëntaties op de componenten afhangt.
4. het polynoom $L(D)$ niet van de gekozen ordening van de componenten afhangt.

We beginnen met het nagaan van de eerste twee genoemde punten.

1. Het eerste dat we kunnen laten zien is dat de volgorde waarin we de kruisingen goedzetten niet uitmaakt. Omdat dit een lange, nauwkeurige maar helemaal niet moeilijke berekening is, is dit bewijs als Lemma B.0.8 opgenomen in Appendix B.
2. Het volgende dat we willen laten zien is dat de keuze van basispunten op elk component geen invloed heeft op $L(D)$. Hou oriëntatie op en volgorde van de componenten vast en kies op elk component een basispunt. Het bijbehorende opklimmende diagram heet αD . Nu gaan we een basispunt b op een component verplaatsen door het, met de oriëntatie op dat component mee, aan de andere kant van de eerste kruising te leggen. Met deze keuze

⁶Wanneer het diagram minder dan n kruisingen heeft is het ook deel van \mathcal{D}_{n-1} en dus is $L(D)$ per inductie bekend.

krijgen we een ander opklimmend diagram dat we βD noemen. We moeten laten zien dat uit $L(\alpha D) = a^{\bar{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1}$ volgt $L(\beta D) = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$, want dan hadden we ook het basispunt na de kruising kunnen kiezen. Nu zijn er twee mogelijkheden:

- De kruising was met een ander component.
In dit geval geldt $\alpha D = \beta D$, dus $L(\beta D) = L(\alpha D) = a^{\bar{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1} = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$
- De kruising was met hetzelfde component.
In dit geval kunnen we de kruising in αD veranderen en dan hebben we βD (want de kruising was in αD de eerste na het baisspunt en dus zeker onderlangs, en is in βD de laatste voor het basispunt dus zeker bovenlangs). Nu willen we (3.3) toepassen en krijgen we dus te maken met de diagrammen $D_0, D_\infty \in \mathcal{D}_{n-1}$. Een van deze twee annuleert de kruising zo dat het component twee componenten wordt, en de andere laat het een component. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we zeggen dat D_0 degene is die een extra component heeft ten opzichte van αD . Beide zijn element van \mathcal{D}_{n-1} en vallen onder de inductiehypothese. Door in een opklimmend diagram⁷ een zelfkruising weg te halen hou je diagrammen over die nog steeds niet geknoopt zijn en een ontwaringsfunctie hebben. Dus met d) van de inductiehypothese: $L(D_0) = a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D_0-1} = a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D}$ en $L(D_\infty) = a^{\bar{\omega}(D_\infty)} \delta^{\#D_\infty-1} = a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1}$ (de kruisingen van D_0 en D_∞ zijn verder hetzelfde, dus $\bar{\omega}(D_0) = \bar{\omega}(D_\infty)$). Voor αD en βD geldt dat $\bar{\omega}(\alpha D) = \bar{\omega}(D_0) \pm 1$ en $\bar{\omega}(\beta D) = \bar{\omega}(D_0) \mp 1$. Nu kunnen we $L(\beta D)$ uitrekenen:

$$\begin{aligned}
L(\beta D) &= z(L(D_0) + L(D_\infty)) - L(\alpha D) \\
&= z(a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D} + a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1}) - a^{\bar{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1} \\
&= z a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} (\delta + 1) - a^{\bar{\omega}(D_0) \pm 1} \delta^{\#D-1} \\
&= a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} (z(\delta + 1) - a^{\pm 1}) \\
&= a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} (z(\frac{a + \frac{1}{a}}{z} - 1 + 1) - a^{\pm 1}) \\
&= a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} (a + \frac{1}{a} - a^{\pm 1}) \\
&= a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} (a^{\mp 1}) \\
&= a^{\bar{\omega}(D_0) \mp 1} \delta^{\#D-1} \\
&= a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Dus in beide gevallen geldt: $L(\beta D) = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$, dus het basispunt mag aan de andere kant van de eerste kruising gekozen worden zonder dat

⁷Een niet-knoop.

dit $L(D)$ verandert. Elk component heeft een eindig aantal kruisingen, dus het basispunt kan op een willekeurige plek op het component gekozen worden door steeds over de volgende kruising heen te stappen. De keuze van basispunten op de componenten heeft dus geen invloed op $L(D)$.

Op dit moment is $L(D)$ dus welgedefinieerd op diagrammen $D \in \mathcal{D}_n$ met een ordening op de componenten en een orientatie op elk component. Voordat we aan gaan tonen dat deze keuzes geen invloed op $L(D)$ hebben gaan we vast aantonen dat dit soort diagrammen aan a t/m d voldoen (de inductiestap).

a) voldoen elke vier diagrammen in \mathcal{D}_n , die buiten de getekende stukken gelijk zijn, aan (3.3)?

Zij gegeven vier diagrammen D_+ , D_- , D_0 en D_∞ die buiten de getekende stukken aan elkaar gelijk zijn, met op de componenten dezelfde ordening en orientatie gekozen. Nu is er dus een opklimmend diagram αD_+ . Ga van αD_+ naar D_+ door alle kruisingen goed te zetten, en zet als eerste de kruising waarmee hij van D_- , D_0 en D_∞ verschilt goed⁸. Noem de diagrammen die je uit de eerste stap verkrijgt D'_- , D'_0 en D'_∞ . Op dit moment voldoen de vier zo verkregen diagrammen αD_+ , D'_- , D'_0 en D'_∞ dus per constructie aan (3.3). Maak de reeks verwisselingen in alle vier *op dezelfde manier* af, dan krijg je D_+ , D_- , D_0 en D_∞ . Doordat de bijbehorende polynomen in de eerste stap aan (3.3) voldoen, en ze daarna allemaal exact op dezelfde manier in elkaar worden gezet voldoen $L(D_+)$, $L(D_-)$, $L(D_0)$ en $L(D_\infty)$ dus aan (3.3). Dus aan a) is voldaan.

b) voldoen diagrammen die slechts zoals in de getekende stukken van elkaar verschillen aan (3.5)?

Bekijk twee diagrammen D en D' die op een lus na gelijk zijn, met een gegeven orientatie op elk component en gegeven ordening van de componenten. De plaats van basispunten op componenten heeft geen invloed op L , dus we kunnen er voor kiezen het basispunt op D vlak vóór⁹ de kruising van de lus te leggen (op het onderliggende draadstuk). Nu is deze kruising hetzelfde in D en in αD . Kies als basispunt op D' de plaats waar D een lus heeft.

$$\bar{\omega}(\alpha D) = \bar{\omega}(\alpha D') \pm 1 \quad (3.7)$$

Want het zijn dezelfde diagrammen op de eerste kruising van αD na. Of het een plus- of een minteken is hangt af van het teken van de kruising. Door Definitie 1.0.10 met (3.5) te vergelijken is duidelijk dat een +kruising met de lus die a^{+1} krijgt toegekend overeenkomt en een -kruising met de lus die a^{-1} krijgt¹⁰.

$$L(\alpha D) = a^{\bar{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1} = a^{\bar{\omega}(\alpha D') \pm 1} \delta^{\#D'} = a^{\pm 1} L(\alpha D') \quad (3.8)$$

Als we nu vanaf αD de kruisingen goedzetten om D te krijgen, en *op dezelfde manier* die van $\alpha D'$ goedzetten om D' te krijgen, verandert er niets aan de

⁸Dit mag, omdat al bewezen is dat de volgorde waarin je de kruisingen goedzet geen invloed heeft op L .

⁹Met betrekking tot de orientatie op het component.

¹⁰Denk eraan dat de orientatie niet van invloed is op het zelfkruisingsgetal $\bar{\omega}$.

betreffende kruising van D die bij de lus hoort, en ook niets aan het verband uit (3.8), dus uiteindelijk geldt: $L(D) = a^{\pm 1}L(D')$, en dat is wat we aan moesten tonen. Hierbij maken we wel in elke stap van het berekenen van D uit αD en D' uit $\alpha D'$ gebruik van de inductiehypothese. Doordat we weten dat in diagrammen met ten hoogste $n - 1$ kruisingen (dus de diagrammen D_0 en D_∞) (3.5) geldt blijft de factor $a^{\pm 1}$ in elke stap behouden.

Dus aan b) is voldaan.

c) verandert $L(D)$ niet wanneer je Reidemeisterbewegingen II of III op D toepast zodanig dat er nooit meer dan n kruisingen zijn?

We beginnen met Reidemeisterbeweging II. Bekijk de twee sets van vier diagrammen hieronder, gerelateerd met (3.3).

$$L(\text{diagram 1}) + L(\text{diagram 2}) = z(L(\text{diagram 3}) + L(\text{diagram 4})) \quad (3.9)$$

$$L(\text{diagram 1}) + L(\text{diagram 2}) = z(L(\text{diagram 5}) + L(\text{diagram 6})) \quad (3.10)$$

Het is duidelijk dat het tweede diagram in beide sets hetzelfde diagram is. Dit geldt ook voor het vierde diagram:

$$L(\text{diagram 3}) = L(\text{diagram 4}) = L(\text{diagram 6}) \quad (3.11)$$

Met behulp van (3.5) kunnen we het derde diagram uit beide sets vereenvoudigen. We zien dat deze ook gelijk aan elkaar zijn:

$$L(\text{diagram 3}) = a^{-1}L(\text{diagram 7}) \quad (3.12)$$

$$L(\text{diagram 6}) = a^{-1}L(\text{diagram 7}) \quad (3.13)$$

Dus uit de geldigheid van (3.3) volgt dat

$$L(\text{diagram 3}) = L(\text{diagram 6})$$

Deze stukken van een diagram van een knoop kunnen dus verwisseld worden zonder dat L dan verandert. Daaruit volgt dat geen van beide kruisingen goed-gezet hoeft te worden om αD in D te veranderen, dus beide kruisingen hadden er net zo goed niet kunnen zitten:

$$L(\text{diagram 3}) = L(\text{diagram 8}) \quad \text{en} \quad L(\text{diagram 6}) = L(\text{diagram 9}) \quad (3.14)$$

Hierbij gebruiken we dat in het berekenen van D uit αD volgens de inductiehypothese geldt dat in diagrammen met hoogstens $n - 1$ kruisingen (D_0 en D_∞) Reidemeister II bewegingen die nooit meer dan $n - 1$ kruisingen hebben hetzelfde polynoom hebben.

Dus een Reidemeisterbeweging II op D die nooit meer dan n kruisingen bevat verandert $L(D)$ niet. Geldt dit ook voor een type III beweging? Het bewijs hiervoor is gebaseerd op het bewijs van Propositie 4(n) type (iii) in het artikel ‘A polynomial invariant of oriented links’ van Lickorish en Millett [6].

Om aan te tonen dat Reidemeisterbeweging III op een diagram toepassen niet uitmaakt voor het polynoom L gaan we in eerste instantie uit van de situatie dat de drie kruisingen die betrokken zijn bij de beweging niet veranderd hoeven te worden als je van αD naar D gaat. Noem het diagram na de Reidemeisterbeweging III B^{11} , met bijbehorend opklimmend diagram αB . Nu geldt: $L(\alpha D) = a^{\bar{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1}$ en $L(\alpha B) = a^{\bar{\omega}(\alpha B)} \delta^{\#B-1}$. Aangezien B en D slechts een Reidemeisterbeweging III van elkaar verschillen geldt $\#D = \#B$ en, aangezien een Reidemeisterbeweging III de tekens van de betrokken kruisingen niet verandert, $\bar{\omega}(\alpha D) = \bar{\omega}(\alpha B)$. Hieruit volgt dat $L(\alpha D) = L(\alpha B)$. Nu zetten we alle kruisingen goed om B en D te berekenen. Dit doen we voor B en D in dezelfde volgorde. Omdat de drie kruisingen die bij Reidemeisterbeweging III betrokken zijn niet hoeven te worden veranderd in dit proces, en de diagrammen verder exact gelijk zijn aan elkaar en op exact dezelfde manier worden goedgezet, geldt aan het einde ook $L(D) = L(B)$. Hierbij is het wel nodig om in elke stap op de diagrammen D_0 en D_∞ , die een kruising minder hebben, de inductiehypothese toe te passen (dat diagrammen met ten hoogste $n - 1$ kruisingen die een Reidemeister III beweging van elkaar verschillen hetzelfde polynoom hebben).

Nu moeten we alleen nog aantonen dat we de draadstukken van de Reidemeisterbeweging in gewenste volgorde voor een opklimmend diagram kunnen zetten, dus stel: $i \leq j \leq k$, dan moeten we in Figuur 3.1 de kruising tussen c_i en c_j andersom zetten voor de gewenste situatie¹².

Het is duidelijk dat de diagrammen D_∞ en B_∞ hetzelfde zijn. Met behulp van Reidemeisterbeweging II is duidelijk dat $L(D_0) = L(B_0)$. Als we dit in (3.3) toepassen:

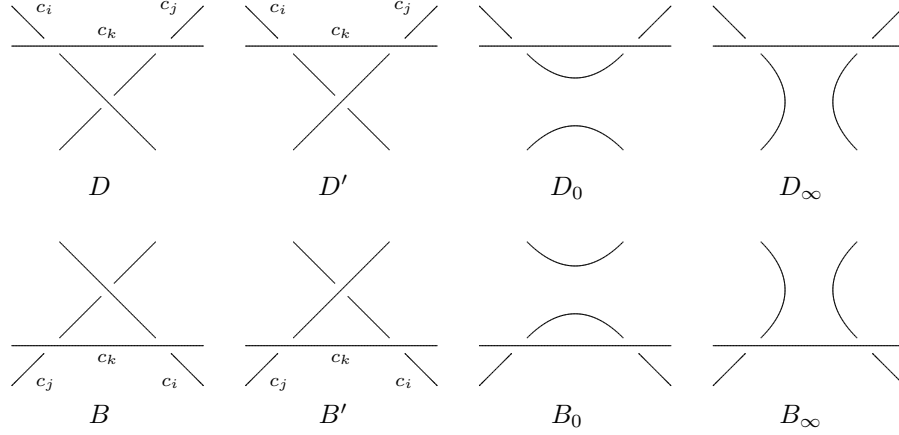
$$L(D) + L(D') = z(L(D_0) + L(D_\infty)) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} L(B) + L(B') &= z(L(B_0) + L(B_\infty)) \\ L(B) + L(B') &= z(L(D_0) + L(D_\infty)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

We zien aan (3.15) en (3.16) dat de relatie tussen $L(D)$ en $L(D')$ exact hetzelfde is als de relatie tussen $L(B)$ en $L(B')$. Noem het oorspronkelijke diagram

¹¹Kies verder basispunten, ordening etc voor B en D exact gelijk.

¹²Het nu volgende argument kan ook toegepast worden als er andere of meerdere kruisingen goedgezet moeten worden.



Figuur 3.1: De diagrammen D en B (voor en na Reidemeisterbeweging III), met bijbehorende diagrammen voor het toepassen van (3.3).

D en die met de draadstukken in opklimmende volgorde¹³ D' . Noem evenzo het oorspronkelijke diagram na een Reidemeisterbeweging III B en dit diagram met de draadstukken in opklimmende volgorde B' . In het voorbeeld net zat hier maar een wisseling tussen, maar ook met meerder kruisingen die omgedraaid moeten worden geldt dat de relatie tussen $L(D)$ en $L(D')$ exact hetzelfde is als de relatie tussen $L(B)$ en $L(B')$. We weten nu dat $L(D') = L(B')$, omdat deze aan de situatie voldoen waarvoor we in eerste instantie hebben aangetoond dat een Reidemeister III beweging toepassen geen invloed heeft op L . Maar, omdat de relatie tussen $L(D)$ en $L(D')$ exact hetzelfde is als de relatie tussen $L(B)$ en $L(B')$ geldt nu dus ook dat $L(D) = L(B)$.

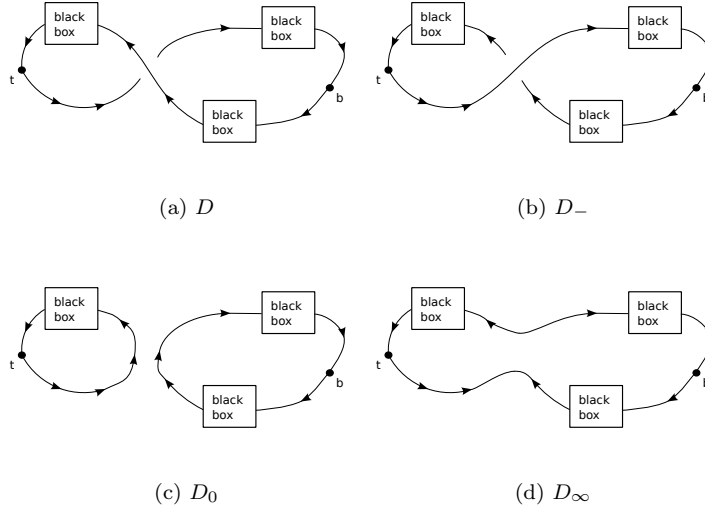
We hebben nu dus aangetoond dat $L(D)$ niet verandert wanneer je een Reidemeister III beweging toepast, dus aan c) is voldaan.

d) Zij gegeven een diagram D in \mathcal{D}_n dat een ontwaringsfunctie h heeft en $\#D$ componenten. Geldt: $L(D) = a^{\bar{\omega}(D)} \delta^{\#D-1}$?

Dit kunnen we bewijzen met subinductie op het totale aantal zelfkruisingen van de componenten c_i tussen t_i en b_i .

Subinductiebasis: als er op elk component c_i geen kruisingen tussen t_i en b_i zitten (dus met de orientatie mee komt b_i gelijk na t_i) dan is het diagram D zelf een opklimmend diagram, dus $D = \alpha D$, en dus per constructie $L(D) = a^{\bar{\omega}(D)} \delta^{\#D-1}$.

¹³Dit is geen opklimmend diagram, want alleen de draadstukken die betrokken zijn bij Reidemeisterbeweging III zijn door het wisselen van kruisingen in opklimmende volgorde gezet.



Figuur 3.2: Component c met kruising X (de enige getekende kruising) zo algemeen mogelijk getekend. Met ‘black box’ wordt bedoeld dat de component in dat stuk nog zelfkruisingen kan hebben, ook met de andere ‘black box’ stukken. (3.3) is toegepast op kruising X .

Subinductiestap: Zij gegeven een component c van D met minstens één zelfkruising tussen toppunt t en basispunt b . Noem de eerste kruising na t (met de oriëntatie mee) X . Er zijn twee mogelijkheden:

- X is een overkruising¹⁴

In dit geval kunnen we h aanpassen door hem van t tot net na X stijgend te maken. Het is dan een ontwaringsfunctie met een zelfkruising minder tussen t en b , dus per inductie geldt $L(D) = a^{\bar{\omega}(D)} \delta^{\#D-1}$.

- X is een onderkruising¹⁵

Omdat h tussen t en b monotoon dalend is kan de onderkruising X niet met het stuk van c tussen t en b zijn, hij moet dus met het stuk van c tussen b en t zijn, zoals te zien in Figuur 3.2a.

Om $L(D)$ te berekenen passen we (3.3) toe op kruising X . De bijbehorende diagrammen D_- , D_+ en D_∞ van component c van D zijn in Figuur 3.2b t/m 3.2d weergegeven. Voor D_- geldt het geval hierboven (X is een overkruising), en dus:

$$L(D_-) = a^{\bar{\omega}(D_-)} \delta^{\#D_- - 1} \quad (3.17)$$

¹⁴Gezien vanaf t gaat hij bovenlangs.

¹⁵Gezien vanaf t gaat hij onderlangs.

In D_0 is c gesplitst in twee componenten die beide een ontwaringsfunctie hebben (met de extra b' en t' op de plaats van kruising X) en geen kruisingen tussen t en b' respectievelijk een kruising minder tussen t' en b , dus per subinductie geldt:

$$L(D_0) = a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D_0-1} \quad (3.18)$$

Door in D_∞ de orientatie opnieuw in te voeren vanaf b (de pijlen in het stuk rond t draaien dan om) is te zien dat D_∞ een ontwaringsfunctie heeft. $D_\infty \in \mathcal{D}_{n-1}$ dus per inductie geldt:

$$L(D_\infty) = a^{\bar{\omega}(D_\infty)} \delta^{\#D_\infty-1} \quad (3.19)$$

Verder geldt¹⁶:

$$\bar{\omega}(D_0) = \bar{\omega}(D_\infty) \quad (3.20)$$

$$\bar{\omega}(D) = \bar{\omega}(D_0) \pm 1 \quad (3.21)$$

$$\bar{\omega}(D_-) = \bar{\omega}(D_0) \mp 1 \quad (3.22)$$

$$\#D = \#D_- = \#D_\infty = \#D_0 - 1 \quad (3.23)$$

Nu passen we (3.3) toe:

$$\begin{aligned} L(D) &= z(L(D_0) + L(D_\infty)) - L(D_-) \\ &= z(a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D_0-1} + a^{\bar{\omega}(D_\infty)} \delta^{\#D_\infty-1}) - a^{\bar{\omega}(D_-)} \delta^{\#D_- - 1} \\ &= z(a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D} + a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1}) - a^{\bar{\omega}(D_0) \mp 1} \delta^{\#D-1} \\ &= a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} (z(\delta + 1) - a^{\mp 1}) \\ &= a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} (z(\frac{a + \frac{1}{a}}{z} - 1 + 1) - a^{\mp 1}) \\ &= a^{\bar{\omega}(D_0)} \delta^{\#D-1} a^{\pm 1} \\ &= a^{\bar{\omega}(D_0) \pm 1} \delta^{\#D-1} \\ &= a^{\bar{\omega}(D)} \delta^{\#D-1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

En hiermee is de subinductie bewezen, dus d) geldt.

We hebben nu aangetoond dat a) t/m d) op \mathcal{D}_n gelden als we een ordening op de componenten gekozen hebben en op elk component een orientatie. We moeten nog laten zien dat L niet van deze keuzes afhankelijk is.

3. Maakt de keuze van orientatie op elk component uit? Zij gegeven $D \in \mathcal{D}_n$ met een ordening op de componenten, een gegeven orientatie op elk component en bijbehorend opklimmend diagram αD . Neem component c_i

¹⁶In Figuur 3.2 heeft X als teken $-$, maar de tekening had ook zo kunnen zijn dat dit $+$ was geweest, vandaar de \pm en \mp .

en draai de orientatie om, noem het hierbij horende diagram βD . Het diagram βD is nu geen opklimmend diagram, maar heeft wel een ontwaringsfunctie¹⁷. Met d volgt nu dat $L(\beta D) = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$. Dus de keuze van orientatie op de componenten heeft geen invloed op $L(D)$.

4. Maakt de ordening op de componenten uit voor $L(D)$? In dit bewijs maken we gebruik van Lemma B.0.9 in Appendix B, dat meetkundig is en nogal technisch. Zij gegeven een diagram $D \in \mathcal{D}_n$, met een ordening op de componenten en het daarbijbehorende opklimmende diagram αD . Zij ook gegeven een andere ordening op de componenten en een daarbijhorend opklimmend diagram βD . Nu moeten we bewijzen dat $L(\beta D) = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$. In dat geval hadden we ook kunnen beginnen met de alternatieve ordening en kunnen definiëren dat $L(\beta D) = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$ en daaruit kunnen laten volgen dat $L(\alpha D) = a^{\bar{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1}$, en maakt de ordening dus niet uit. We gaan nu βD bekijken en $L(\beta D)$ uitrekenen.

- Haal eerst losse cirkels die geen kruisingen hebben met de rest van de knoop en met zichzelf naar buiten (dus, als deze ingesloten liggen, haal ze rechts of links van de rest van het diagram). Omdat dit losse componenten zijn die geen kruisingen met de rest van de knoop hadden, verandert dit L niet.
- Ga opzoek naar een binneste lus van het diagram. Met een lus wordt een stuk van een component bedoeld dat op dezelfde kruising begint en eindigt zonder dat er op dat stuk zelfkruisingen zijn (eventueel wel met de rest van de component waarvan de lus deel uitmaakt, maar niet met andere stukken van de lus). Met binneste wordt bedoeld dat zich binnen de lus geen andere lussen of componenten met zelfkruisingen bevinden.

Als er helemaal geen kruisingen met de lus zijn (dan ligt er ook niets in de lus omdat het een binneste lus is) haal dan de lus weg met een Reidemeisterbeweging I. Nu krijg je een diagram $\beta D'$ met een kruising minder, en het is een opklimmend diagram, dus per inductie $L(\beta D') = a^{\bar{\omega}(\beta D')} \delta^{\#D-1}$. In dit geval geldt¹⁸:

$$L(\beta D) = a^{\pm 1} a^{\bar{\omega}(\beta D')} \delta^{\#D-1} = a^{\pm 1} a^{\bar{\omega}(\beta D) \mp 1} \delta^{\#D-1} = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$$

Als er wel kruisingen zijn met de lus dan zijn dit draadstukken zonder zelfkruisingen (omdat het een binneste lus is).

- Binnen de lus zijn nu 2-hoeken te vinden tussen een stuk lus en een kruisend draadstuk. Dit soort 2-hoeken kunnen ook voorkomen tussen kruisende draadstukken¹⁹. Zoek nu een binneste 2-hoek (dus: een

¹⁷Het is op een component na wel een opklimmend diagram; component c_i was in αD ook opklimmend, maar in βD loop je er in de andere richting overheen, dus afdalend. Het component heeft nog wel een ontwaringsfunctie.

¹⁸De \pm en \mp hangen af van het teken van de kruising van de lus.

¹⁹De draadstukken mogen zichzelf niet kruisen in de lus, maar elkaar wel.

2-hoek waarin geen andere 2-hoeken zitten). Er mogen wel kruisende draden in door de 2-hoek lopen. Als dit soort kruisende draden er niet zijn dan is de 2-hoek weg te halen met een Reidemeisterbeweging II. Het zo gevormde diagram $\beta D'$ heeft 2 kruisingen minder en dus per inductie geldt: $L(\beta D') = a^{\bar{\omega}(\beta D')} \delta^{\#D-1}$, en omdat Reidemeister II bewegingen geen invloed hebben op het Kaufmannpolynoom L geldt dus²⁰

$$L(\beta D) = L(\beta D') = a^{\bar{\omega}(\beta D')} \delta^{\#D-1} = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1} \quad (3.25)$$

- Als dit soort kruisende draden er wel zijn, noem dan de twee draadstukken die de 2-hoek vormen p en q , noem de snijpunten A en B en noem het oppervlak dat ze begrenzen R . We kunnen nu Lemma B.0.9 toepassen. Hieruit volgt dat er een driehoek is met een zijde in p . Op deze driehoek kunnen we nu een Reidemeister III beweging toepassen²¹ zodat de kruising die *in* de 2-hoek lag nu buiten de 2-hoek (aan de andere kant van p) komt te liggen. Nu begrenzen p en q een nieuwe 2-hoek, en is het Lemma weer van toepassing. Ga zo door met driehoeken verwijderen tot er geen enkele draad meer is die de 2-hoek kruist. Nu kan de 2-hoek, net als hierboven, met een Reidemeister II beweging worden weggehaald. Noem het zo verkregen diagram $\beta D'$. Wederom geldt per inductie $L(\beta D') = a^{\bar{\omega}(\beta D')} \delta^{\#D-1}$. De diagrammen βD en $\beta D'$ zijn regulier isotoop, dus: $L(\beta D) = L(\beta D') = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$.

Nu hebben we dus bewezen dat $L(\beta D) = a^{\bar{\omega}(\beta D)} \delta^{\#D-1}$, en dus maakt de ordening op de componenten niets uit voor L .

We hebben nu dus de inductie bewezen (want a) t/m d) gelden voor willekeurige $D \in \mathcal{D}_n$ als ze gelden voor alle $D \in \mathcal{D}_{n-1}$) en de welgedefinieerdheid van L bewezen (de waarde van $L(D)$ hangt niet af van de keuze van basispunten op de componenten, de keuze van orientatie op elk component, de keuze van een ordening op de componenten en de keuze van de volgorde waarin we de kruisingen terugzetten om van αD naar D te komen). We hebben nu ook i) t/m iv) bewezen:

- i) Is bewezen met d): de niet-knoop heeft een ontwaringsfunctie en 1 component, dus $L(\bigcirc) = a^0 \delta^{1-1} = 1$, en dit is wat we moesten bewijzen.
- ii) is bewezen met b).
- iii) is bewezen met a).
- iv) is bewezen met c): van knopen die regulier isotoop zijn kunnen de diagrammen in elkaar worden overgevoerd met Reidemeisterbewegingen²² II en III,

²⁰Bedenk dat $\bar{\omega}(\beta D) = \bar{\omega}(\beta D')$ omdat een Reidemeister II beweging altijd over twee kruisingen met tegengesteld teken gaat.

²¹Omdat het om een opklimmend diagram gaat liggen de draden automatisch boven elkaar op een manier dat er een Reidemeisterbeweging III mogelijk is. Ze zijn niet geknoopt.

²²Omdat de inductie inmiddels compleet is geldt dit voor alle Reidemeisterbewegingen II en III, niet alleen degene die nooit meer kruisingen maken.

en volgens b) verandert dit L niet, dus zulke knopen hebben hetzelfde polynoom L .

Het enige dat we nog moeten aantonen is dat L het unieke polynoom is met eigenschappen i) t/m iv). Stel dat er een ander polynoom

$$L' : \{\text{Diagrammen van ongeoriënteerde knopen en schakels}\} \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$$

bestaat dat aan i) t/m iv) voldoet. Dan is er een kleinste $n \in \mathbb{N}$ met een knoop $K \in \mathcal{D}_n$ waarvoor geldt $L(K) \neq L'(K)$. Nu is het, door de recursieve vorm van de stelling, altijd mogelijk om $L(K)$ en $L'(K)$ uit te rekenen vanaf een opklimmend diagram met behulp van (3.3) en (3.2). Om te bewijzen dat L uniek is is het dus genoeg om te bewijzen dat er voor een opklimmend diagram geen andere keuze mogelijk is dan $L(\alpha K) = a^{\bar{\omega}(\alpha K)} \delta^{\#K-1}$.

Laten we van een opklimmend diagram αD met n componenten een diagram zonder kruisingen maken, door de Reidemeisterbewegingen toe te passen. Reidemeisterbewegingen II en III hebben verder geen invloed op het polynoom en op $\bar{\omega}(D)$. Reidemeisterbeweging I levert bij het toepassen altijd een factor $a^{\pm 1}$ op, afhankelijk van het teken van de kruising die werd weggehaald. Hierbij geeft het weghalen van een $+$ -kruising een factor a^{-1} . Uiteindelijk krijgen we zo een diagram van de niet-schakel zonder kruisingen met n componenten, dat we βD noemen. Hiervoor geldt:

$$L(\beta D) = a^{-\bar{\omega}(\alpha D)} a^{\bar{\omega}(\alpha D)} \delta^{\#D-1} = \delta^{n-1} \quad (3.26)$$

Het polynoom van een niet-schakel zonder kruisingen van n componenten kunnen we met (3.3) en de eis dat $L(\bigcirc) = 1$ uitrekenen, dit hebben we in Lemma B.0.7 gedaan. Met de eisen i) t/m iv) is er dus geen ander polynoom mogelijk dan L , dus L is uniek. □

3.2 Het verband tussen het Kauffmanpolynoom en andere knoopinvarianten

We hebben nu een polynoom op ongeoriënteerde knoopdiagrammen van reguliere isotopie. In Hoofdstuk 2 zijn we ook zo'n polynoom tegengekomen. We zullen eerst laten zien dat het *bracket*polynoom van Kauffman een speciaal geval is van L . Net zoals we het *bracket*polynoom konden uitbreiden naar een polynoom van omgevende isotopie (het Jones polynoom), kunnen we L uitbreiden naar een polynoom van omgevende isotopie F , het Kauffmanpolynoom. We zullen vervolgens laten zien dat het Jonespolynoom een speciaal geval is van het Kauffmanpolynoom.

Lemma 3.2.1. *Het bracketpolynoom van Kauffman wordt uit L verkregen door $a = -A^3$ en $z = A + \frac{1}{A}$ te kiezen.*

Bewijs. Hiervoor moeten we Definitie 2.1.1 nagaan.

- i) Met (2.1) en (3.1): $L(\bigcirc) = 1 = \langle \bigcirc \rangle$
- ii) Hiervoor moeten we kijken wat het effect van een losse niet-knoop zonder kruisingen op L heeft. Het uitrekenen van $L(K)$ gebeurt aan de hand van het opklimmend diagram.

$$L(\alpha(K \cup \bigcirc)) = a^{\bar{\omega}(\alpha K \cup \bigcirc)} \delta^{\#(K \cup \bigcirc)-1} = a^{\bar{\omega}(\alpha K)} \delta^{\#K-1+1} = \delta L(\alpha K)$$

Omdat de cirkel geen kruisingen heeft met de rest van het diagram volgt nu ook dat $L(K \cup \bigcirc) = \delta L(K)$.

$$\begin{aligned} L(K \cup \bigcirc) \Big|_{z=A+\frac{1}{A}, a=-A^3} &= \delta L(K) \Big|_{z=A+\frac{1}{A}, a=-A^3} \\ &= \left(\frac{a + \frac{1}{a}}{z} - 1 \right) L(K) \Big|_{z=A+\frac{1}{A}, a=-A^3} \\ &= \left(\frac{-A^3 - \frac{1}{A^3}}{A + \frac{1}{A}} - 1 \right) L(K) \\ &= \left(-A^2 - \frac{1}{A^2} + 1 - 1 \right) L(K) \\ &= dL(K) \end{aligned}$$

En dit komt overeen met (2.2) voor het *bracket*polynoom.

- iii) Om dit te bewijzen tellen we (2.3) en (2.4) bij elkaar op:

$$\langle \nearrow \searrow \rangle + \langle \searrow \nearrow \rangle = \left(A + \frac{1}{A} \right) (\langle \smile \rangle + \langle \frown \rangle)$$

Dit is precies

$$L(\nearrow \searrow) + L(\searrow \nearrow) = z(L(\smile) + L(\frown)) \Big|_{z=A+\frac{1}{A}}$$

Dus (2.3) van het *bracket*polynoom komt inderdaad overeen met (3.3) van het polynoom L in het speciale geval dat $z = A + \frac{1}{A}$.

□

Het *bracket*polynoom van Kauffman is dus inderdaad een speciaal geval van het polynoom L . Nu gaan we het polynoom L uitbreiden naar een polynoom van omgevende isotopie.

Definitie 3.2.2. Het Kauffmanpolynoom

$$F : \{\text{Georiënteerde knopen en schakels in } \mathbb{R}^3\} \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$$

is gedefinieerd door

$$F(K) = a^{-\omega(K)} L(K) \tag{3.27}$$

waarbij ω het kruisingsgetal uit Definitie 2.2.4 is en L op georiënteerde schakels gedefinieerd is door de orientatie weg te laten.

Stelling 3.2.3. *Het Kauffmanpolynoom F is een invariant van omgevende isotopie.*

Bewijs. Zowel het polynoom $L(K)$ als het kruisingsgetal $\omega(K)$ zijn invarianten van reguliere isotopie, dus het Kauffmanpolynoom $F(K)$ is een invariant van reguliere isotopie. Het enige dat we nog moeten aantonen is dat F invariant is onder Reidemeisterbeweging I.

$$F(\text{I}) = a^{-(-1)}L(\text{I}) = aa^{-1}L(\text{I}) = a^0L(\text{I}) = F(\text{I})$$

Waarbij we gebruiken dat:

$$\omega(\text{I}) = -1 \quad \text{en} \quad \omega(\text{II}) = 0$$

We bekijken ook de andere mogelijke Reidemeisterbeweging I, daarvoor is het bewijs analoog:

$$F(\text{II}) = a^{-(1)}L(\text{II}) = a^{-1}aL(\text{II}) = a^0L(\text{II}) = F(\text{II})$$

Waarbij we gebruiken dat

$$\omega(\text{II}) = 1$$

Hiermee is bewezen dat F invariant is onder Reidemeisterbeweging I. F is dus een invariant van omgevende isotopie. □

Het Jones polynoom uit Propositie 2.2.7 is een speciaal geval van het Kauffmanpolynoom. Het verband tussen de twee polynomen wordt bewezen in de volgende Propositie, waarbij we gebruik maken van Lemma 3.2.1.

Propositie 3.2.4. *Het Jones polynoom V wordt uit het Kauffmanpolynoom F verkregen door $a = -t^{-\frac{3}{4}}$ en $z = t^{-\frac{1}{4}} + t^{\frac{1}{4}}$ te kiezen.*

Bewijs. De keuzes voor a en z zijn niet nieuw, ze zijn consistent met Lemma 3.2.1 en Definitie 2.2.6:

$$\begin{aligned} a = -A^3 \quad \text{en} \quad A = t^{-\frac{1}{4}} \quad \text{combineert tot} \quad a = -t^{-\frac{3}{4}} \\ z = A + \frac{1}{A} \quad \text{en} \quad A = t^{-\frac{1}{4}} \quad \text{combineert tot} \quad z = t^{-\frac{1}{4}} + t^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Wegens deze consistentie kunnen we de Propositie nu bewijzen:

$$F(K) = a^{-\omega(K)}L(K) \Big|_{z=t^{-\frac{1}{4}}+t^{\frac{1}{4}}, a=-t^{-\frac{3}{4}}, A=t^{-\frac{1}{4}}} = (-1)^{\omega(K)}t^{3\omega(K)/4}\langle K \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}}$$

$$V(K) = (-A)^{-3\omega(K)}\langle K \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} = (-1)^{-3\omega(K)}t^{3\omega(K)/4}\langle K \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\text{Waarbij we gebruiken dat } L(K) \Big|_{z=t^{-\frac{1}{4}}+t^{\frac{1}{4}}} = \langle K \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \text{ en } (-1)^{-3} = -1$$

□

Bijlage A

Voorbeelden

Omdat sommige voorbeelden bij het uitrekenen van een polynoom niet noodzakelijk zijn voor de rest van dit stageverslag en veel ruimte innemen door de plaatjes zijn ze hier opgenomen in een appendix.

Voorbeeld A.0.5. Om Definitie 2.1.1 te illustreren wordt hieronder voor de *trefoil* T het *bracket*polynoom $\langle T \rangle$ stap voor stap uitgerekend. In de tekst met uitleg wordt met (kleur) het *bracket*polynoom bedoeld van de getekende knoop in die kleur.

Stap 1 De *trefoil* T heeft drie knooppunten. Om hem te vereenvoudigen gebruiken we (2.3) op het knooppunt middenonder. Nu moeten we voor beide knopen met nog maar twee kruisingen hetzelfde doen.

$$\langle \text{trefoil} \rangle = A \cdot \langle \text{red trefoil} \rangle + B \cdot \langle \text{green trefoil} \rangle$$

Stap 2 We gaan eerst de groene knoop verder vereenvoudigen. Van de twee overgebleven knooppunten splitsen we eerst degene linksboven met behulp van (2.4). Beide knopen hebben nog een knooppunt, en moeten dus nog verder vereenvoudigd worden.

$$\langle \text{green trefoil} \rangle = A \cdot \langle \text{blue trefoil} \rangle + B \cdot \langle \text{yellow trefoil} \rangle$$

Stap 3 We werken nu verder met de blauwe knoop. De kruising vereenvoudigen we met behulp van (2.4). We zien gelijk dat de bruine knoop gewoon de onknoop is, en dus volgens (2.1) geldt:

$$\langle \text{bruin} \rangle = 1$$

The diagram shows an equation: $\langle \text{blue knot} \rangle = A \cdot \langle \text{gray knot} \rangle + B \cdot \langle \text{brown knot} \rangle$. The blue knot on the left has a crossing. The gray knot in the middle is the same as the blue knot but with the crossing removed. The brown knot on the right is a simple unknot.

Stap 4 De grijze knoop vereenvoudigen we met behulp van (2.2). De roze knoop is de onknoop, dus geldt:

$$\langle \text{grijs} \rangle = d \cdot 1 = d$$

The diagram shows an equation: $\langle \text{gray knot} \rangle = d \cdot \langle \text{pink knot} \rangle$. The gray knot on the left consists of two separate loops. The pink knot on the right is a single unknot.

Stap 5 Nu we de polynomen voor de grijze en de bruine knoop kennen kunnen we die voor de blauwe berekenen:

$$\langle \text{blauw} \rangle = A \cdot \langle \text{grijs} \rangle + B \cdot \langle \text{bruin} \rangle = A \cdot d + B \cdot 1 = Ad + B$$

Stap 6 We werken nu verder met de gele knoop. De kruising vereenvoudigen we met behulp van (2.4). We zien gelijk dat de lichtblauwe knoop dezelfde is als de bruine, dus:

$$\langle \text{lichtblauw} \rangle = \langle \text{bruin} \rangle = 1$$

De mosgroene knoop bestaat net als de grijze uit twee losse onknopen, dus:

$$\langle \text{mosgroen} \rangle = \langle \text{grijs} \rangle = d$$

Hieruit volgt voor de gele knoop:

$$\langle \text{geel} \rangle = A \cdot \langle \text{lichtblauw} \rangle + B \cdot \langle \text{mosgroen} \rangle = A \cdot 1 + B \cdot d = A + Bd$$

$$\langle \text{geel} \rangle = A \cdot \langle \text{lichtblauw} \rangle + B \cdot \langle \text{mosgroen} \rangle$$

Stap 7 Nu we zowel de gele als de blauwe knoop kennen kunnen we het *bracket*polynoom van de groene uitrekenen:

$$\langle \text{groen} \rangle = A \cdot \langle \text{blauw} \rangle + B \cdot \langle \text{geel} \rangle = A \cdot (Ad + B) + B \cdot (A + Bd) = A^2d + 2AB + B^2d$$

Stap 8 Nu gaan we de rode knoop vereenvoudigen door de kruising linksboven te splitsen en (2.4) toe te passen. De oranje knoop is dezelfde als de blauwe, dus:

$$\langle \text{oranje} \rangle = \langle \text{blauw} \rangle = Ad + B$$

De paarse knoop is de oranje met een losse cirkel eraan toegevoegd, dus met (2.2):

$$\langle \text{paars} \rangle = d \cdot \langle \text{oranje} \rangle = d \cdot (Ad + B) = Ad^2 + Bd$$

Nu kunnen we ook het *bracket*polynoom van de rode berekenen:

$$\langle \text{rood} \rangle = A \cdot \langle \text{paars} \rangle + B \cdot \langle \text{oranje} \rangle = A \cdot (Ad^2 + Bd) + B \cdot (Ad + B) = A^2d^2 + 2ABd + B^2$$

$$\langle \text{rood} \rangle = A \cdot \langle \text{paars} \rangle + B \cdot \langle \text{oranje} \rangle$$

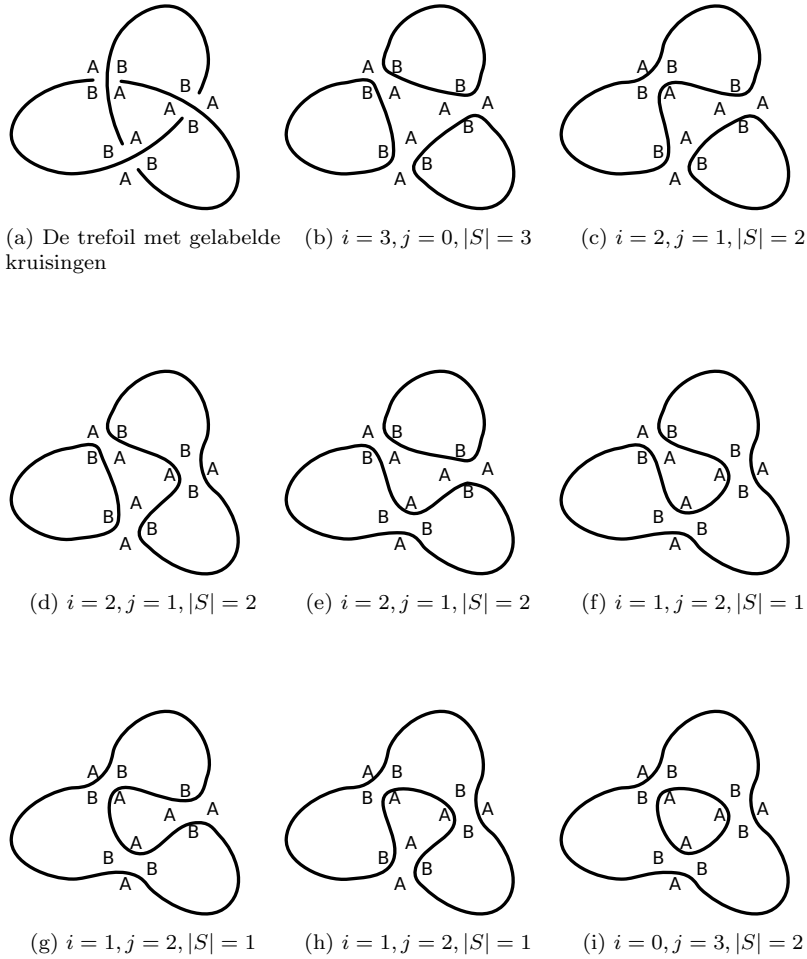
Stap 8 Nu kunnen we ook het *bracket*polynoom voor de *trefoil* berekenen:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= A \cdot \langle \text{rood} \rangle + B \cdot \langle \text{groen} \rangle = A \cdot (A^2d^2 + 2ABd + B^2) + B \cdot (A^2d + 2AB + B^2d) \\ &= A^3d^2 + 2A^2Bd + AB^2 + A^2Bd + 2AB^2 + B^3d \\ &= A^3d^2 + 3A^2Bd + 3AB^2 + B^3d \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Voorbeeld A.0.6. Om Definitie 2.1.6 te illustreren zullen we ook het haakjespolynoom $[T]$ van de *trefoil* T uitrekenen. De *trefoil* heeft drie kruisingen, dus er zijn 2^3 toestanden (zie Figuur A.1). In de figuur kunnen we voor elke toestand eenvoudig i, j en $|S|$ aflezen voor elke toestand. We sommeren van links naar rechts van boven naar onder over de toestanden:

$$\begin{aligned}
[T] &= \sum_{S \in \mathcal{S}} [T|S] d^{|S|-1} = A^3 B^0 d^{3-1} + A^2 B^1 d^{2-1} + A^2 B^1 d^{2-1} + A^2 B^1 d^{2-1} \\
&\quad + A^1 B^2 d^{1-1} + A^1 B^2 d^{1-1} + A^1 B^2 d^{1-1} + A^0 B^3 d^{2-1} \\
&= A^3 d^2 + 3A^2 B d + 3AB^2 + B^3 d \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Voor de *trefoil* geldt dus $[T] = \langle T \rangle$ (zie (A.1)), hetgeen overeenkomt met Propositie 2.1.7.



Figuur A.1: De *trefoil* en de 8 bijbehorende toestanden. Bij elke toestand S zijn i (het aantal kruisingen dat op manier A gesplitst is), j (het aantal kruisingen dat op manier B gesplitst is) en $|S|$ (het aantal cirkels waaruit de toestand bestaat) aangegeven.

Bijlage B

Berekeningen

Omdat sommige bewijzen hele lange maar niet moeilijke rekenstukken bevatten heb ik die hier apart als lemma opgenomen.

Lemma B.0.7. *Zij D een diagram van de niet-schakel zonder kruisingen die uit n componenten bestaat. Dan geldt: $L(D) = \delta^{n-1}$.*

Bewijs. We kunnen dit per inductie bewijzen.

Inductiebasis: het diagram van de cirkel \bigcirc heeft inderdaad als polynoom $L(\bigcirc) = 1$, en dit klopt met $\delta^{1-1} = 1$

Inductie: Noem een diagram bestaande uit n losse cirkels N , en eentje bestaande uit $n - 1$ losse cirkels M . Stel voor M geldt: $L(M) = \delta^{n-1-1} = \delta^{n-2}$. Te bewijzen: $L(N) = \delta^{n-1}$. Voor dit bewijs gebruiken we (3.5) en (3.3), hoewel we nog niet hebben aangetoond dat het polynoom L welgedefinieerd is. We willen dat knoopdiagrammen aan (3.3) en (3.5) voldoen, dus we gaan het polynoom voor n losse cirkels nu *construeren* met behulp van die Formules. Om de diagrammen in het bewijs niet te groot te maken worden $n - 2$ losse cirkels als K aangeduid. We beginnen met het toepassen van (3.3) op N , waarbij de ‘kruising’ tussen de $n - 1^e$ en de n^e cirkel als D_∞ wordt genomen.

$$L(K \bigcirc \bigcirc) + L(K \bigcirc \bigcirc) = z(L(K \bigcirc \bigcirc) + L(K \bigcirc \bigcirc)) \quad (\text{B.1})$$

Om nu een uitdrukking voor $L(N)$ te vinden kunnen we de andere drie termen vereenvoudigen. De D_0 term is niets anders dan $L(M)$:

$$L(K \bigcirc \bigcirc) = L(K \bigcirc) = L(M) = \delta^{n-2}$$

In de D_+ en de D_- term kunnen we vereenvoudigen met (3.5).

$$\begin{aligned} L(K \bigcirc \bigcirc) &= aL(K \bigcirc) = aL(M) = a\delta^{n-2} \\ L(K \bigcirc \bigcirc) &= a^{-1}L(K \bigcirc) = a^{-1}L(M) = a^{-1}\delta^{n-2} \end{aligned}$$

Nu kunnen we in (B.1) de andere drie termen invullen om $L(N)$ te berekenen:

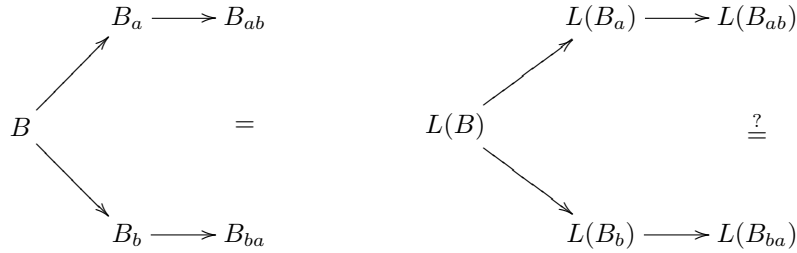
$$\begin{aligned} L(N) &= L(K \circlearrowleft \circlearrowright) = \frac{a\delta^{n-2} + a^{-1}\delta^{n-2}}{z} - \delta^{n-2} \\ &= \left(\frac{a + \frac{1}{a}}{z} - 1\right)\delta^{n-2} = \delta\delta^{n-2} = \delta^{n-1} \end{aligned}$$

En dat is wat we aan moesten tonen. \square

Lemma B.0.8. *Zij $D \in \mathcal{D}_n$ met een orientatie en een basispunt op elk component en een ordening op de componenten, en zij αD het bijbehorende opklimmende diagram. Dan maakt de volgorde waarin we de kruisingen in αD goedzetten om D te krijgen voor het polynoom $L(D)$ niet uit.*

Bewijs. Je maakt dus een keuze om de kruisingen in een bepaalde volgorde goed te zetten, en we willen bewijzen dat die volgorde niet uitmaakt. Dat kunnen we doen door te bewijzen dat het omwisselen van de volgorde van twee kruisingen die je na elkaar goedzet geen invloed heeft op het polynoom $L(D)$. Als twee burens in de reeks verwisselen niets uit maakt dan volgt daaruit dat elke permutatie van de volgorde waarin je de kruisingen goedzet hetzelfde polynoom oplevert.

We kunnen dit inzien door de volgorde waarin we twee kruisingen a en b goedzetten te verwisselen: noem het diagram op dat moment in de goedzetreeks B , noem hem B_{ab} nadat eerst a en daarna b zijn goedgezet en noem hem B_{ba} nadat eerst b en dan a zijn goedgezet. Het is duidelijk dat $B_{ab} = B_{ba}$, maar de vraag is of ook geldt $L(B_{ab}) = L(B_{ba})$. In Figuur B.1 staat dit in een diagram uitgelegd.



Figuur B.1: Maakt de volgorde uit?

De volgende berekening is niet moeilijk, maar het is makkelijk in de war te raken met subscripten. Notatie: waar het subscript a of b ontbreekt is de betreffende kruising nog in dezelfde toestand als in B . Subscript a of b betekent dat de betreffende kruising goedgezet is. Subscript \bar{a} en \bar{b} betekent dat de betreffende kruising in een van het type D_0 veranderd is en subscript \hat{a} en \hat{b} betekent dat de betreffende kruising in een van het type D_∞ is veranderd. Van links naar rechts in de subscripten is de volgorde van het goedzetten van kruisingen.

In dit bewijs gaan we gebruiken dat

$$L(B_{\bar{a}\bar{b}}) = L(B_{\bar{b}\bar{a}}) \quad (\text{B.2})$$

Dit is zo omdat het hier gaat om een knoop waarin de kruisingen a en b geen kruisingen meer zijn, dus $B_{\bar{a}\bar{b}}, B_{\bar{b}\bar{a}} \in \mathcal{D}_{n-2}$, en per inductie zijn hun polynomen dus gelijk aan elkaar (want $B_{\bar{a}\bar{b}} = B_{\bar{b}\bar{a}}$). Analoog geldt:

$$L(B_{\hat{a}\hat{b}}) = L(B_{\hat{b}\hat{a}}) \quad (\text{B.3})$$

$$L(B_{\hat{a}\bar{b}}) = L(B_{\bar{b}\hat{a}}) \quad (\text{B.4})$$

$$L(B_{\hat{a}\hat{b}}) = L(B_{\hat{b}\hat{a}}) \quad (\text{B.5})$$

Analoog geldt voor $B_{a\bar{b}}$ en $B_{\bar{b}a}$, ook per inductie (want $B_{a\bar{b}}, B_{\bar{b}a} \in \mathcal{D}_{n-1}$) dat uit $B_{a\bar{b}} = B_{\bar{b}a}$ volgt:

$$L(B_{a\bar{b}}) = L(B_{\bar{b}a}) \quad (\text{B.6})$$

Evenzo geldt:

$$L(B_{b\bar{a}}) = L(B_{\bar{a}b}) \quad (\text{B.7})$$

$$L(B_{a\hat{b}}) = L(B_{\hat{b}a}) \quad (\text{B.8})$$

$$L(B_{b\hat{a}}) = L(B_{\hat{a}b}) \quad (\text{B.9})$$

Zet nu in de knoop B eerst a goed. Het polynoom dat bij B_a hoort is te berekenen door (3.3) toe te passen op kruising a in B :

$$L(B) + L(B_a) = z(L(B_{\bar{a}}) + L(B_{\hat{a}}))$$

Zet vervolgens in B_a kruising b goed en bereken het bijbehorende polynoom:

$$L(B_a) + L(B_{ab}) = z(L(B_{a\bar{b}}) + L(B_{a\hat{b}}))$$

Door deze te combineren vinden we:

$$\begin{aligned} L(B_{ab}) &= z(L(B_{a\bar{b}}) + L(B_{a\hat{b}})) - L(B_a) \\ &= z(L(B_{a\bar{b}}) + L(B_{a\hat{b}})) - (z(L(B_{\bar{a}}) + L(B_{\hat{a}})) - L(B)) \\ &= z(L(B_{a\bar{b}}) + L(B_{a\hat{b}}) - L(B_{\bar{a}}) - L(B_{\hat{a}})) + L(B) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Zet nu in de knoop B eerst b goed. Het polynoom dat bij B_b hoort is te berekenen door (3.3) toe te passen op kruising b in B :

$$L(B) + L(B_b) = z(L(B_{\bar{b}}) + L(B_{\hat{b}}))$$

Zet vervolgens in B_b kruising a goed en bereken het bijbehorende polynoom:

$$L(B_b) + L(B_{ba}) = z(L(B_{b\bar{a}}) + L(B_{b\hat{a}}))$$

Door deze te combineren vinden we:

$$\begin{aligned}
L(B_{ba}) &= z(L(B_{b\bar{a}}) + L(B_{b\hat{a}})) - L(B_b) \\
&= z(L(B_{b\bar{a}}) + L(B_{b\hat{a}})) - (z(L(B_{\bar{b}}) + L(B_{\hat{b}})) - L(B)) \\
&= z(L(B_{b\bar{a}}) + L(B_{b\hat{a}}) - L(B_{\bar{b}}) - L(B_{\hat{b}})) + L(B) \tag{B.11}
\end{aligned}$$

(B.10) en (B.11) lijken al enigszins op elkaar. In de termen waarin pas één kruising is weggehaald zetten we de tweede kruising goed. Met de relaties die dit oplevert kunnen we aantonen dat (B.10) en (B.11) inderdaad aan elkaar gelijk zijn.

Laten we in $B_{\bar{a}}$ kruising b goedzetten:

$$L(B_{\bar{a}}) + L(B_{\bar{a}b}) = z(L(B_{\bar{a}\bar{b}}) + L(B_{\bar{a}\hat{b}})) \tag{B.12}$$

En in $B_{\hat{a}}$ kruising b goedzetten:

$$L(B_{\hat{a}}) + L(B_{\hat{a}b}) = z(L(B_{\hat{a}\bar{b}}) + L(B_{\hat{a}\hat{b}})) \tag{B.13}$$

En in $B_{\bar{b}}$ kruising a goedzetten, en vast omschrijven:

$$\begin{aligned}
L(B_{\bar{b}}) + L(B_{\bar{b}a}) &= z(L(B_{\bar{b}\bar{a}}) + L(B_{\bar{b}\hat{a}})) \\
L(B_{\bar{b}\bar{a}}) &= \frac{L(B_{\bar{b}}) + L(B_{\bar{b}a})}{z} - L(B_{\bar{b}\hat{a}}) = L(B_{\bar{a}\bar{b}}) \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Waarbij we in de allerlaatste stap (B.2) toepassen. Nu zetten we in $B_{\hat{b}}$ kruising a goed, en schrijven hem vast om:

$$\begin{aligned}
L(B_{\hat{b}}) + L(B_{\hat{b}a}) &= z(L(B_{\hat{b}\bar{a}}) + L(B_{\hat{b}\hat{a}})) \\
L(B_{\hat{b}\hat{a}}) &= \frac{L(B_{\hat{b}}) + L(B_{\hat{b}a})}{z} - L(B_{\hat{b}\bar{a}}) = L(B_{\hat{a}\hat{b}}) \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Waarbij we in de allerlaatste stap (B.5) toepassen. Nu gebruiken we (B.14) om een uitdrukking voor $L(B_{\bar{a}})$ te krijgen.

$$\begin{aligned}
L(B_{\bar{a}}) &= z(L(B_{\bar{a}\bar{b}}) + L(B_{\bar{a}\hat{b}})) - L(B_{\bar{a}b}) \\
&= z\left(\left(\frac{L(B_{\bar{b}}) + L(B_{\bar{b}a})}{z} - L(B_{\bar{b}\hat{a}})\right) + L(B_{\bar{a}\hat{b}})\right) - L(B_{\bar{a}b}) \\
&= L(B_{\bar{b}}) + L(B_{\bar{b}a}) - L(B_{\bar{a}b}) + z(L(B_{\bar{a}\hat{b}}) - L(B_{\bar{b}\hat{a}})) \tag{B.16}
\end{aligned}$$

En nu gebruiken we (B.15) om een uitdrukking voor $L(B_{\hat{a}})$ te krijgen:

$$\begin{aligned}
L(B_{\hat{a}}) &= z(L(B_{\hat{a}\bar{b}}) + L(B_{\hat{a}\hat{b}})) - L(B_{\hat{a}b}) \\
&= z(L(B_{\hat{a}\bar{b}}) + \left(\frac{L(B_{\hat{b}}) + L(B_{\hat{b}a})}{z} - L(B_{\hat{b}\bar{a}})\right)) - L(B_{\hat{a}b}) \\
&= L(B_{\hat{b}}) + L(B_{\hat{b}a}) - L(B_{\hat{a}b}) + z(L(B_{\hat{a}\bar{b}}) - L(B_{\hat{b}\bar{a}})) \tag{B.17}
\end{aligned}$$

Als we de zo gevonden uitdrukkingen voor $L(B_{\bar{a}})$ en $L(B_{\hat{a}})$ invullen in (B.10):

$$\begin{aligned} L(B_{ab}) &= z(L(B_{a\bar{b}}) + L(B_{a\hat{b}}) - L(B_{\bar{a}}) - L(B_{\hat{a}})) + L(B) \\ &= z(L(B_{a\bar{b}}) + L(B_{a\hat{b}}) - (L(B_{\bar{b}}) + L(B_{\bar{b}a}) - L(B_{\bar{a}b}) + z(L(B_{\bar{a}\bar{b}}) - L(B_{\bar{b}\bar{a}}))) \\ &\quad - (L(B_{\hat{b}}) + L(B_{\hat{b}a}) - L(B_{\hat{a}b}) + z(L(B_{\hat{a}\hat{b}}) - L(B_{\hat{b}\hat{a}})))) + L(B) \end{aligned}$$

Deze groeperen we in machten van z , waarbij we de termen die gaan wegvallen alvast naast elkaar zetten:

$$\begin{aligned} L(B_{ab}) &= z^2(L(B_{\bar{b}\bar{a}}) - L(B_{\bar{a}\bar{b}}) + L(B_{\hat{b}\hat{a}}) - L(B_{\hat{a}\hat{b}})) + L(B) \\ &\quad + z(L(B_{a\bar{b}}) - L(B_{\bar{b}a}) + L(B_{a\hat{b}}) - L(B_{\hat{b}a}) + L(B_{\bar{a}b}) + L(B_{\hat{a}b}) - L(B_{\bar{b}}) - L(B_{\hat{b}})) \end{aligned}$$

Nu vallen eerste vier z -termen weg door (B.6) en (B.8) en de z^2 -termen vallen weg door (B.3) en (B.4). In de laatste stap passen we (B.7) en (B.9) toe :

$$\begin{aligned} L(B_{ab}) &= z(L(B_{\bar{a}b}) + L(B_{\hat{a}b}) - L(B_{\bar{b}}) - L(B_{\hat{b}})) + L(B) \\ &= L(B_{ba}) \end{aligned} \tag{B.18}$$

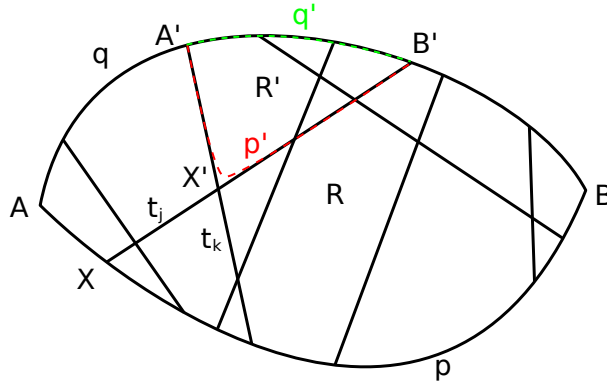
Het wisselen van de volgorde waarin je twee kruisingen goedzet heeft dus geen invloed op het polynoom L . We hebben nu bewezen dat de volgorde waarin we de kruisingen van αD goedzetten om D te krijgen niet uitmaakt. \square

Het volgende meetkundige lemma is nodig bij het bewijs van Stelling 3.1.1 en is hier opgenomen omdat het vrij technisch is.

Lemma B.0.9. *Zij gegeven twee krommes p en q in \mathbb{R}^2 die elkaar alleen in hun eindpunten snijden zodat het door $p \cup q$ begrensde compacte oppervlak R convex is en noem de twee snijpunten A en B . Zij gegeven krommes t_1, t_2, \dots, t_n in R , die $p \cup q$ slechts in hun eindpunten snijden, een eindpunt met p en een eindpunt met q . Neem aan dat als $i \neq j$ dan bestaat $t_i \cup t_j$ uit hoogstens een punt, dat kruisingen transversaal zijn en dat er geen driedubbele punten zijn. De zo gevormde graaf (met als punten alle snijpunten van de krommes en als zijden $p \cup q \cup_i t_i$) scheidt R in een verzameling disjuncte veelhoeken; een van deze veelhoeken is een driehoek met een zijde in p en een van deze veelhoeken is een driehoek met een zijde in q .*

Bewijs. We bewijzen dit met inductie op het aantal snijdende krommes n . Voor $n = 1$ geldt dat R in twee driehoeken gesplitst is, die elk een zijde hebben die deel van p is en een zijde die deel van q is. De inductiebasis klopt dus. Neem nu aan dat de stelling voor $n - 1$ geldt, en bekijk een situatie met n snijdende krommes. Noem het eindpunt van de t_i die het dichtste bij A ligt op p kruising X . Noem de kromme die in X eindigt t_j , en noem zijn eindpunt op q kruising B' . Zoek nu, als dat mogelijk is, uit $\{t_i | i \neq j\}$ een t_k met $t_k \cap t_j = X'$ en $t_k \cap q = A'$ zodanig dat op t_k tussen X' en A' geen kruisingen zijn met andere t_i 's. Wanneer

er meerdere mogelijkheden voor zo'n t_k zijn, kies dan degene zodat X' op t_j zo dicht mogelijk bij B' ligt. Wanneer zo'n t_k niet bestaat, kies dan p als t_k met $A' = A$ en $X' = X$. Noem de boog die van A' naar X' over t_k en dan via t_j naar B' loopt p' . Noem het stuk van q tussen A' en B' nu q' , en noem het oppervlak begrensd door $p' \cup q'$ nu R'^1 .



Figuur B.2: Een mogelijke situatie bij het Bewijs van Lemma B.0.9. Daarbij is p' als rode stippellijn getekend, om je beter voor te kunnen stellen dat X' geen hoek is in R' .

Als er nu geen t_i zijn in R' dan is R' de gezochtte driehoek met een zijde in q . Als er wel t_i door R' heenlopen, dan zijn dit er minder dan n (want t_j vormt de rand en loopt er dus sowieso niet doorheen). Dus per inductie is er een driehoek in R' met een zijde in q' . Dit is ook een driehoek in R met een zijde in q . Een driehoek in R' met A' als hoekpunt zou ook X' in een zijde hebben liggen (want er zijn geen kruisingen tussen A' en X'), en de driehoek zou dan in R een vierhoek zijn, omdat X' daar wel een kruising is. Dit kan niet voorkomen, want we hebben t_k zo gekozen dat het degene is zodat X' het dichtst mogelijk bij B' ligt. Als er een driehoek zou zijn in R' met A' als hoekpunt, dan zou de zijde die niet deel van p' en q' uitmaakt, dus de kruisende t_i , ook voldoen aan de voorwaarden voor t_k , en dan zou X' dicht bij B' liggen, dus zo'n driehoek bestaat niet. De gevonden driehoek in R' zal dus ook een driehoek zijn in R .

Analoog kun je bewijzen dat er ook een driehoek is met een zijde in p . □

¹Dus voor R' is X' geen kruispunt, maar voor R wel. Dit staat geïllustreerd in Figuur B.2.

Bibliografie

- [1] G. Burde and H. Zieschang. *Knots*. de Gruyter, 2003.
- [2] V.F.R. Jones. A polynomial invariant for knots via von neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, pages 103–111, 1985.
- [3] Louis H. Kauffman. State models and the jones polynomial. *Topology*, 26(3):395–407, 1987.
- [4] Louis H. Kauffman. An invariant of regular isotopy. *transactions of the american mathematical society*, 318(2):417–471, 1990.
- [5] W.B. Raymond Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, 1997.
- [6] W.B. Raymond Lickorish and Kenneth C. Millett. A polynomial invariant of oriented links. *Topology*, pages 107–141, 1987.
- [7] Alexei Sossinsky. *Knots: Mathematics with a twist*. Harvard University Press, 2002.