Radboud University Nijmegen

BachelorScriptie

Lemma van Sperner en Cohomologie

Auteur:
Erik Bosch
4073460

Coordinator:
Dr. M. Müger

9 juli 2014

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Deze scriptie gaat over het Lemma van Sperner. Deze scriptie zal vooral draaien om een artikel van Ivanov[2]. Ik heb dit onderwerp gekozen, omdat in de beschrijving van meneer Müger naar voren kwam dat het onderwerp over topologie en combinatoriek ging. Ik vind persoonlijk zowel topologie en combinatoriek erg interessante onderwerpen en ben achteraf ook niet teleurgesteld in mijn keuze. Het Lemma van Sperner is een erg interessant onderwerp en ik vond het interessant om te kijken naar de verschillende bewijzen en om uiteindelijk in te zien dat deze bewijzen in essentie allemaal hetzelfde zijn, maar dan toch uit verschillende gebieden van de wiskunde voortkomen.

In deze inleiding wil ik een idee geven van mijn proces en van de resultaten die uit de scriptie zijn voortgevloeid. Verder wil ik de lezer overtuigen dat het Lemma van Sperner niet zomaar een lemma is, maar dat dit gebruikt kan worden voor een aantal grotere stellingen.
Allereerst zal ik mijn proces toelichten. Toen ik begon aan deze scriptie had ik eigenlijk nog geen idee van simplices, ketens, coketens en cohomologiegroepen. Ik moest dus eerst deze kennis vergaren uit verschillende boeken en dictaten (Zie de referenties). Nadat ik zelf uiteindelijk een redelijk idee had gekregen van een cohomologiegroep moest ik nog gaan begrijpen wat de bewijzen uit het artikel van Ivanov[2] precies inhielden. Het combinatorische bewijs was relatief snel te begrepen, omdat dit bewijs meer tot de verbeelding sprak dan de cohomologische en coketens bewijzen. Daarna heb ik de overige twee bewijzen proberen te begrijpen en uiteindelijk ben ik begonnen met het schrijven van deze scriptie. Tijdens het schrijven zelf ben ik niet veel moeilijkheden tegengekomen ook al heb ik wel de nodige uurtjes naar mijn schrift zitten staren. Achteraf ben ik nu enigszins rustig de inleiding aan het schrijven, dus kan ik concluderen dat het schrijven van de scriptie redelijk goed ging.
En daarmee heb ik gelijk de resultaten van deze scriptie al nader toegelicht. Het doel van de scriptie was om de verschillende bewijzen van het Lemma van Sperner te begrijpen en uit te kunnen leggen aan mijn medestudenten, zodat zij ook zouden kunnen inzien dat deze bewijzen hetzelfde zijn. Ik denk persoonlijk redelijk geslaagd te zijn, maar laat aan de lezer over om dit te beoordelen.
Het Lemma van Sperner is niet alleen een leuk lemma met verschillende bewijzen. Er zijn ook een aantal belangrijke toepassingen waar het lemma voor gebruikt wordt. Zo kan het Lemma van Sperner gebruikt worden om de vastepuntsstelling van Brouwer snel en makkelijk te bewijzen.

2 Lemma van Sperner

Aangezien deze hele scriptie rond het Lemma van Sperner zal draaien is het vrij essentieel om eerst te weten wat het Lemma van Sperner precies inhoudt en hoe deze geformuleerd is. Hiervoor zullen we eerst een idee van een simplex moeten hebben en wat van de theorie moeten leren.
In de volgende sectie zal ik een definitie van een simplex geven en zullen we zien wat een simpliciaal complex is. In de sectie die daarop volgt zullen we toewerken naar het eerste bewijs van het Lemma van Sperner waarbij we gebruik maken van een combinatorisch argument.

2.1 Simplices

Om een simplex te definiëren moeten we eerst weten wat een verzameling affien onafhankelijke punten is. Let hierbij op dat deze definitie subtiel verschilt van een lineaire onafhankelijke verzameling punten. Nadat we een idee hebben van onafhankelijkheid kunnen we een definitie geven van een simplex.

Definitie 2.1. *$x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ zijn affien onafhankelijk als voor elke rij $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ geldt dat als $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ en $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ dan $\lambda_i = 0\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.*

Definitie 2.2. *Een n-dimensionaal simplex Δ is het convexe omhulsel van $n+1$ affien onafhankelijke punten $v_0, v_2, \ldots, v_n$.*
Oftewel

$$\Delta = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \Big\}$$

Voorbeeld 2.3. *Een 2-dimensionaal simplex is een simpele driehoek.*

Opmerking 2.4. *Een n-dimensionaal simplex Δ is dus altijd gesloten in $\mathbb{R}^n$.*

We zullen een simplex voortaan noteren aan de hand van zijn hoekpunten, $\Delta = v_0 v_1 \ldots v_n$. Als we weten over welk simplex we praten, dan zullen we een punt $t \in \Delta = v_0 v_1 \ldots v_n$ noteren aan de hand van zijn coördinaten $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ die uniek zijn op omwisseling van de hoekpunten na. Voor het Lemma van Sperner is het ook erg belangrijk dat we naar verschillende kanten van een simplex kunnen kijken, daarom geven we daar een definitie van.

Definitie 2.5. *Een k-dimensionale kant van een simplex* $\Delta = v_0v_1 \dots v_n$ *is het convexe omhulsel van een deelverzameling* $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \subset \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.

Opmerking 2.6. *Elk k-dimensionaal kant is ook een k-dimensionaal simplex.*

We zullen een 0-dimensionale kant vanaf nu een punt noemen en een $n-1$-dimensionale kant een gezicht. Merk op dat we een kant ook kunnen zien als alle punten van Δ waarbij een aantal coördinaten alleen de waarde 0 mogen aannemen.
Hierna kunnen we het barycentrum van een simplex $\Delta = v_0v_1 \dots v_n$ definiëren.

Definitie 2.7. *Het barycentrum van een simplex* $\Delta = v_0v_1 \dots v_n$ *is*

$$b(\Delta) = \frac{1}{n+1}v_0 + \frac{1}{n+1}v_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}v_n.$$

Het is duidelijk dat $b(\Delta) \in \Delta$, maar dat $b(\Delta)$ in geen enkel gezicht bevat is, omdat dan minstens één van de coördinaten 0 zou moeten zijn. Als volgt willen we voor het Lemma van Sperner een simplex kunnen opdelen in een simpliciaal complex.

Definitie 2.8. *Een simpliciaal complex is een verzameling* K *van simplices zodanig dat:*

1. $\forall \sigma \in K$ *zitten alle kanten van* σ *ook in* K.
2. $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in K$ *geldt dat* $\sigma_1 \cap \sigma_2$ *een kant van zowel* σ_1 *als* σ_2 *is.*

Eigenlijk heeft elk simpliciaal complex ook een oriëntatie. Deze hebben we voor het combinatorische bewijs niet nodig en voor het cohomologische en coketenbewijs zullen we ervoor zorgen dat we de oriëntatie ook kunnen weglaten. We zullen de oriëntatie dus verder niet meer noemen.

Opmerking 2.9. *Een simpliciaal complex heeft dimensie* k *als de maximale dimensie van alle simplices in* K *gelijk is aan* k.

Definitie 2.10. *Zij* X *een simpliciaal complex. Dan definiëren we* $|X| = \cup\{\sigma \mid \sigma \in X\}$

Definitie 2.11. *Zij* X, Y *simpliciale complexen. We noemen* $f : X \to Y$ *een simpliciale functie als* f *een functie is die kanten van een simplex in* X *afbeeld op kanten van een simplex in* L *en die affien is op elk simplex. oftewel*

$$f(\sum_i \lambda_i v_{\sigma_i}) = \sum_i \lambda_i f(v_{\sigma_i})$$

Merk op dat f *dus eigenlijk een functie is van* $|X|$ *naar* $|Y|$.

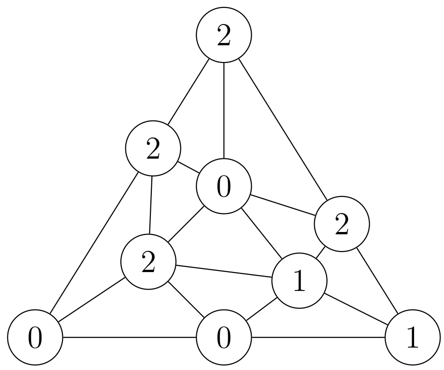
We hebben nu een algemeen beeld van een simplex en we weten ook hoe we een simpliciaal complex kunnen maken. Dan rest ons nog in deze subsectie om het Lemma van Sperner te formuleren.

Lemma 2.12 (Lemma van Sperner)**.** *Zij Δ een n-dimensionaal simplex waarbij de hoekpunten genummerd zijn met $0, 1, \ldots, n$. Zij Δ^i het gezicht tegenover hoekpunt i. Stel dat we Δ opdelen in simplices zodat er een simpliciaal complex Δ' ontstaat wat Δ overdekt. Nummer de punten van Δ' met $0, 1, \ldots, n$ met de volgende voorwaarde: Als een punt $v \in \Delta^i$ dan is de nummering van v niet gelijk aan i.*
Dan bevat Δ' een oneven aantal n-dimensionale simplices met de nummering $0, 1, \ldots, n$.

Nu we precies weten wat het Lemma van Sperner precies inhoudt kunnen we verder gaan om deze te bewijzen.

2.2 Combinatorisch bewijs

Voor het combinatorische bewijs gaan we natuurlijk uit van het dubbel tellen principe wat centraal staat in de combinatorische tak van de wiskunde. Dit principe houdt in dat we iets op verschillende manieren kunnen tellen, maar dat er altijd dezelfde uitkomst uit moet komen.



Figuur 1: Een genummerd simpliciaal complex in twee dimensies

Voor het Lemma van Sperner moeten we nog twee opmerkingen maken. Deze opmerkingen zijn inzichtelijk snel in te zien door te kijken naar de eigenschappen van een simpliciaal complex.

Opmerking 2.13. *Zij Δ' het simpliciale complex van dimensie n zoals in het Lemma van Sperner. Een $n-1$-dimensionaal simplex in de rand van Δ' is het gezicht van precies één n-dimensionale simplices in Δ'*

Opmerking 2.14. *Zij Δ' het simpliciale complex van dimensie n zoals in het Lemma van Sperner. Een $n-1$-dimensionaal simplex in het inwendige van Δ' is het gezicht van precies twee n-dimensionale simplices in Δ'*

Na deze twee opmerkingen kunnen we het Lemma van Sperner bewijzen

Bewijs van het Lemma van Sperner.
We bewijzen het Lemma van Sperner door middel van inductie op de dimensie n van Δ. Hierbij is $n = 0$ triviaal, want een 0-dimensionale simplex

is een punt. Dit is alleen op te delen in datzelfde punt die gelijk dezelfde nummering zal krijgen. Er is dan dus precies één 0-dimensionale simplex die dezelfde nummering heeft als het originele simplex.

Stel $n > 0$. We kunnen de nummering van de punten in Δ' zien als een functie

$$f : \Delta' \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

We kunnen dan paren (σ, σ') tellen waarbij $\sigma \in \Delta'$ een n-dimensionaal simplex is en $\sigma' \in \Delta'$ een gezicht van σ is dat surjectief wordt afgebeeld op Δ^n. We bekijken als eerst het aantal $n-1$-dimensionale simplices in de rand die surjectief op Δ^n worden afgebeeld. Deze simplices zijn allemaal bevat in Δ^n, want elk simplex $\sigma_0 \in \Delta^i$ met $i \neq n$ kan niet de nummering i aannemen door onze aanname en daarom niet surjectief op Δ^n afgebeeld worden. Maar dan weten we door de inductieaanname dat er een oneven aantal $n-1$-dimensionale simplices is die surjectief op Δ^n worden afgebeeld. Laten we zeggen dat hier a simplices van zijn.

We tellen nu het aantal $n-1$-dimensionale simplices in het inwendige van Δ' die surjectief door f op Δ^n worden afgebeeld. We weten niet precies hoeveel dit er zijn, maar we noemen dit aantal b.

Nu kunnen we kijken naar de n-dimensionale simplices σ_0 die bevat zijn in Δ'. Hier hebben we drie verschillende soorten van:

1. $\sigma_0 \in \Delta'$ waarbij σ_0 door f noch surjectief op Δ^n noch surjectief op Δ wordt afgebeeld.
2. $\sigma_0 \in \Delta'$ waarbij σ_0 door f surjectief op Δ^n wordt afgebeeld.
3. $\sigma_0 \in \Delta'$ waarbij σ_0 door f surjectief op Δ wordt afgebeeld.

Merk op dat dit alle soorten simplices zijn die in Δ' kunnen voorkomen.

De eerste groep simplices is niet belangrijk voor ons bewijs en kunnen we volledig negeren.

Bij de tweede groep kunnen we een aantal dingen zeggen. We weten dat σ_0 door f surjectief op Δ^n wordt afgebeeld, maar σ_0 bevat n punten die op $n-1$ punten worden afgebeeld. We weten dus dat $\exists v, w \in \sigma_0$ zodanig dat $f(v) = f(w)$, waarbij v, w punten zijn. Als we één van deze twee punten weglaten uit σ_0 hebben we dus een gezicht van σ_0 gevonden dat nog steeds surjectief op Δ^n wordt afgebeeld. We kunnen dus concluderen dat elk van deze simplices twee verschillende gezichten bevat die surjectief op Δ^n worden afgebeeld. Zij c het aantal simplices van deze vorm.

Als laatste hebben we n-dimensionale simplices σ_0 die surjectief op Δ worden afgebeeld. Dan is duidelijk dat $\exists v \in \sigma_0$ zodanig dat $f(v) = n$, want anders zou σ_0 niet surjectief op Δ worden afgebeeld. Dan is ook duidelijk dat, als we dit punt weglaten, we een gezicht van σ_0 hebben gevonden wat surjectief op Δ^n wordt afgebeeld. We zien dus dat elk simplex van deze vorm precies één gezicht bevat wat surjectief op Δ^n wordt afgebeeld. Zij d het aantal simplices van deze vorm.

We kunnen nu op twee manieren paren (σ, σ') gaan tellen. We kunnen eerst het aantal n-dimensionale simplices tellen en daarna het aantal bijbehorende gezichten. Als we dit doen zien we dat we de simplices van groep 3 één keer moeten tellen, omdat deze allen precies één gezicht hebben die op Δ^n wordt afgebeeld. De simplices van groep 2 moeten we precies twee keer tellen, omdat deze allen precies twee gezichten hebben die op Δ^n worden afgebeeld. Aangezien we c simplices van de derde vorm hadden en d simplices van de tweede vorm zien we dat het totaal aantal paren $c + 2d$ zal zijn.

Als we echter eerst het aantal gezichten tellen zien we dat we de gezichten in de rand precies één keer moeten tellen, omdat we door opmerking 2.13 weten dat er precies één n-dimensionaal simplex dit simplex als gezicht heeft. De gezichten in het inwendige moeten we dan door opmerking 2.14 precies twee keer tellen. In totaal krijgen we aan deze kant dus $a + 2b$.
We krijgen dan de volgende vergelijking:

$$a + 2b = c + 2d.$$

Waarbij we hadden aangenomen door inductie dat a oneven was. We zien dan direct dat c ook oneven moet zijn, maar c was precies het aantal n-dimensionale simplices die surjectief op Δ worden afgebeeld. We zien dus dat ons bewijs voltooid is.

$\square$

Dit was het eerste bewijs van het lemma van Sperner. We kunnen het lemma van Sperner op verschillende manieren bewijzen, wat in de volgende hoofdstukken gedaan wordt.

3 Coketen bewijs

We willen nu het combinatorische bewijs vergelijken met het coketen bewijs van het Lemma van Sperner. Hiervoor moeten we eerst weten wat een coketen is en wat een coketencomplex is. In de eerste sectie van dit hoofdstuk zullen we bekijken wat homologie is en wat een ketencomplex is. In het tweede deel van dit hoofdstuk kunnen we dit uitbreiden naar een coketencomplex. Nadat we hier een idee van hebben zullen we een tweede bewijs geven van het Lemma van Sperner waarbij we gebruik zullen maken van coketens.

3.1 Homologie

Om homologie en ketencomplexen te begrijpen hebben we eerst het standaardsimplex nodig. Hierna kunnen we een aantal functies definiëren die ons later zullen helpen met een voorbeeld van een ketencomplex en die verder zeer algemeen gebruikt worden.

Definitie 3.1. *Het standaard n-dimensionale simplex Δ_n is gedefinieerd als volgt:*

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Opmerking 3.2. *De hoekpunten van Δ_n zijn precies de eenheidsvectoren.*

Nu kunnen we de functie $\delta_i^n : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ definiëren:

Definitie 3.3. $\delta_i^n : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ *is als volgt gedefinieerd:*

$$\delta_i^n : (t_0, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}).$$

Verder zal het volgende lemma later van pas komen.

Lemma 3.4. $\forall n \geq 2$ *en* $n-2 \geq i \geq j \geq 0$ *hebben we:*

$$\delta_j^n \circ \delta_i^{n-1} = \delta_{i+1}^n \circ \delta_j^{n-1}$$

Bewijs. Stel $(t_0, \ldots, t_{n-2}) \in \Delta_{n-2}$. Dan geldt dat:

$$\begin{aligned} \delta_j^n(\delta_i^{n-1}((t_0, \ldots, t_{n-2}))) &= \delta_j^n((t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-2})) \\ &= (t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-2}). \end{aligned}$$

En aan de andere kant zien we:

$$\begin{aligned}\delta_{i+1}^n(\delta_j^{n-1}((t_0,\ldots,t_{n-2}))) &= \delta_{i+1}^n((t_0,\ldots,t_{j-1},0,t_j,\ldots,t_{n-2})) \\ &= (t_0,\ldots,t_{j-1},0,t_j,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_{n-2}).\end{aligned}$$

We zien dus dat deze twee hetzelfde zijn en dat voltooid ons bewijs. □

We kunnen nu $C_n(X)$ definiëren die we later zullen gebruiken bij de constructie van een speciaal soort ketencomplex $C_\bullet$. Verder zal $C_n(X)$ ook van groot belang zijn bij het definiëren van coketencomplexen en daarbij dus ook belangrijk zijn voor het bewijs van het Lemma van Sperner.

Definitie 3.5. *Zij X een simpliciaal complex. Dan is $S_n(X)$, $n > 0$ de verzameling van simpliciale functies $f : \Delta_n \to X$ en $C_n(X)$ de abelse groep gegenereerd door $S_n(X)$ met coëfficiënten in een abelse groep G.*

We zullen voortaan aannemen dat $G = \mathbb{F}_2$. Dit is handig, omdat we dan geen rekening hoeven te houden met de oriëntatie van de simplices. We hebben ook niet meer nodig dan $\mathbb{F}_2$, omdat we alleen geïnteresseerd zijn in het verschil tussen even en oneven.
Ook zullen we het volgende homomorfisme nodig hebben.

Definitie 3.6. *Zij G een abelse groep en $a_\sigma \in G \ \ \forall \sigma \in S_n(X)$ dan definiëren we de randfunctie $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ als volgt:*

$$d_n : \sum_{\sigma \in S_n(X)} a_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in S_n(X)} a_\sigma \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i^n.$$

Merk op dat de $(-1)^i$ ontstaat door de oriëntatie. Doordat we in $\mathbb{F}_2$ werken kunnen we deze dus eigenlijk weglaten, omdat $1 = -1$ in $\mathbb{F}_2$. Dit doen we niet, omdat het makkelijker is om een aantal lemma's te bewijzen voor een willekeurige abelse groep G.

We kunnen nu een definitie geven van een ketencomplex. Hierna zullen we laten zien dat $C_\bullet : \ldots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$ ook een ketencomplex is.

Definitie 3.7. *Zij $A_n, n \geq 0$ abelse groepen en $f_n : A_n \to A_{n-1}$ een homomorfisme voor alle $n > 0$ zodanig dat:*

$$\ldots \xrightarrow{f_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots$$

en $f_{n-1} \circ f_n = 0 \ \forall n \geq 2$ *dan is* (A_n, f_n) *een niet negatief ketencomplex. Hierbij hebben we de volgende conventies:*

$$Z_n = \operatorname{Ker} f_n \subset A_n$$

$$B_n = \operatorname{Im} f_{n+1} \subset A_n$$

Merk op dat we dan een inclusie $B_n \subset Z_n \subset A_n$ hebben $\forall n \geq 1$ en dat dit ondergroepen van elkaar zijn. Verder zullen we een ketencomplex $\ldots \xrightarrow{f_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots$ noteren als $(A_\bullet, f_\bullet)$.
Vervolgens kunnen we bewijzen dat $(C_\bullet(X), d_\bullet)$, met $d_\bullet$ als in Definitie 3.6, ook een ketencomplex is voor elke topologische ruimte X. We weten al dat $C_n(X)$ een vrije abelse groep is voor elke willekeurige topologische ruimte. We hoeven dus alleen nog te bewijzen dat $d_{n-1} \circ d_n = 0$, $\forall n \geq 1$.

Lemma 3.8. $d_{n-1} \circ d_n = 0 \ \forall n \geq 1$ *met* d_n *als in Definitie 3.6.*

Bewijs. Zij $\alpha \in C_n(X)$ een generator van $C_n(X)$, dan:

$$\begin{aligned}
d_{n-1}d_n(\alpha) &= d_{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha \circ \delta_i^n \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} + \sum_{0 \leq i \leq j < n} (-1)^{i+j} \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} + \sum_{0 \leq i \leq j < n} (-1)^{i+j} \alpha \circ \delta_{j+1}^n \circ \delta_i^{n-1} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \alpha \circ \delta_j^n \circ \delta_i^{n-1} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} + \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j-1} \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} (\alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1} - \alpha \circ \delta_i^n \circ \delta_j^{n-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

We zien dan door de lineariteit dat dit voor heel $C_n(X)$ geldt. □

Verder is makkelijk te controleren dat d_n een homomorfisme is. We zien dus dat $(C_\bullet(X), d_\bullet)$ een ketencomplex is. Dit ketencomplex zullen we noteren als $C_\bullet(X)$ en als $C_\bullet$ als duidelijk is over welke ruimte X gesproken wordt of als er over een willekeurig simpliciaal complex X gesproken wordt.

Uit al deze definities kunnen we als volgt de homologie groep $H_n(A_\bullet)$ van $A_\bullet : \ldots \xrightarrow{d_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$, definiëren:

Definitie 3.9. *Zij $A_\bullet : \ldots \xrightarrow{d_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$ een ketencomplex. De homologie groep $H_n(A_\bullet)$ is gedefineerd door:*

$$H_n(A_\bullet) = Z_n/B_n, \ n \geq 1,$$

$$H_0(A_\bullet) = A_0/B_0.$$

Wederom hebben we een extra definitie voor $C_\bullet(X)$, omdat we deze homologie groepen vaker gebruiken.

Definitie 3.10. *Zij X een willekeurige simpliciaal complex. De homologie groep $H_n(X)$ is gedefineerd als de homologie groep $H_n(C_\bullet(X))$.*

Verder willen we ook een functie tussen ketencomplexen definiëren.

Definitie 3.11. *Zij $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ en $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ ketencomplexen, Dan noemen we een familie homomorfismes $f_n : C_n \to C'_n$ een ketenfunctie als het volgende diagram commuteert voor alle $n \geq 0$:*

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n \\ \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n \end{array}$$

Proposition 3.12. *Zij X, Y simpliciale complexen en $f : X \to Y$ een simpliciale functie. Dan induceert deze een ketenfunctie $f_* : C_{n+1}(X) \to C_{n+1}(Y)$ door $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$. Waarbij $\sigma \in C_{n+1}(X)$ een generator is. De rest van de functie wordt dan lineair voortgebracht.*

Bewijs. Stel dat $\sigma \in C_{n+1}(X)$. We moeten bewijzen dat $f_* \circ d_{n+1}(\sigma) =$

$d'_{n+1} \circ f_*(\sigma)$:

$$\begin{aligned} f_*(d_{n+1}(\sigma)) &= f_*(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \sigma \circ \delta_i^{n+1}) \\ &= f \circ (\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \sigma \circ \delta_i^{n+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i f \circ \sigma \circ \delta_i^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i f_*(\sigma) \circ \delta_i^{n+1} \\ &= d'_{n+1}(f_*(\sigma)) \end{aligned}$$

Dus f_* is inderdaad een ketenfunctie.

$\square$

Voordat we een beginnen met een definitie van coketens is het eerst handig om een exact rijtje te definiëren. Verder willen we nog opmerken dat een ketencomplex niet per se oneindig hoeft te zijn, maar ook best heel kort kan zijn.

Definitie 3.13. *Zij* $C_\bullet : \dots \to C_{k+1} \to C_k \to C_{k-1} \to \dots$ *een ketencomplex zodanig dat* $\mathrm{Im}(d_{k+1}) = \mathrm{Ker}(d_k)$*, dan noemen we dit ketencomplex exact in* C_k*.*
Als een ketencomplex exact is in C_k *voor alle* k *dan noemen we dat ketencomplex exact.*

3.2 Coketens

We hebben nu een basis idee van hoe een homologie groep en een ketencomplex eruit ziet. Hieruit kunnen we gaan begrijpen wat een cohomologie groep en een coketencomplex zijn. Voor het eerste bewijs hebben we alleen het idee van een coketencomplex nodig.

Definitie 3.14. *Zij* $C_\bullet : \dots \to C_{k+1} \to C_k \to C_{k-1} \to \dots$ *een ketencomplex en* N *een willekeurige abelse groep. Dan is*

$$\dots \xleftarrow{\partial^{k+1}} \mathrm{hom}(C_{k+1}, N) \xleftarrow{\partial^{k}} \mathrm{hom}(C_k, N) \xleftarrow{\partial^{k-1}} \mathrm{hom}(C_{k-1}, N) \xleftarrow{\partial^{k-2}} \dots$$

Met $\partial^n : \hom(C_n, N) \hom(C_{n+1}, N)$ *de coketenfunctie die voor alle* $n > 0$ *en voor* $\alpha \in C^n(X)$ *gegeven wordt door:*

$$\partial^n(\alpha) = \alpha \circ d_{n+1}$$

en waarbij $\hom(C_k, N)$ *de verzameling homomorfismes van* C_k *naar* N *is, ook een ketencomplex, waarbij de pijlen echter de andere kant op gaan. We kunnen dit op twee manieren oplossen. We kunnen deze groepen een negatieve index geven, waardoor ze wel dezelfde kant op gaan. We kiezen er echter voor om deze index te behouden en het een coketencomplex te noemen.*
We zullen dit noteren als $C^\bullet : \cdots \to C^{n-1} \to C^n \to C^{n+1} \to \ldots$ *met* $C^n = \hom(C_n, N)$.

Opmerking 3.15. *We willen dat* $C^\bullet$ *een coketencomplex is, dus moet* $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ *gelden voor alle* $n > 1$. *Maar het is makkelijk in te zien dat voor een generator* $\alpha \in C^n$ *geldt dat* $\partial_{n-1} \circ \partial_n(\alpha) = \alpha \circ d_{n+1} \circ d_{n+2} = \alpha \circ 0 = 0$, *waarbij* 0 *gezien moet worden als de 0 functie.*

Voor het lemma van Sperner zullen we er vanaf nu vanuit gaan dat $\mathbb{F}_2 = N$. Dit is ideaal, omdat we alleen geïnteresseerd zullen zijn in het verschil tussen even en oneven.
Voor het lemma moeten we dan nog een functie tussen coketencomplexen definiëren.

Definitie 3.16. *Zij* $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ *en* $(C^{\bullet\prime}, \partial^{\bullet\prime})$ *coketencomplexen, Dan noemen we een familie homomorfismes* $f^n : C^{n\prime} \to C^n$ *een coketenfunctie als het volgende diagram commuteert voor alle* $n \geq 0$*:*

$$\begin{array}{ccc} C^{n\prime} & \xrightarrow{\partial^{n\prime}} & C^{n+1\prime} \\ \big\downarrow{\scriptstyle f^n} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} \\ C^n & \xrightarrow{\partial^n} & C^{n+1} \end{array}$$

Proposition 3.17. *Zij* $f : X \to Y$ *een functie. Dan induceert deze een coketenfunctie* $f^* : C^{n+1}(Y) \to C^{n+1}(X)$ *door* $f^*(\sigma) = \sigma \circ f_*$. *Waarbij* $\sigma \in C^{n+1}(X)$ *een generator is en* f_* *de geïnduceerde functies* $f_* : C_{n+1}(X) \to C_{n+1}(Y)$. *De rest van de functie wordt dan lineair voortgebracht.*

Bewijs. We moeten bewijzen dat $\partial^n \circ f^* = f^* \circ \partial^{n\prime}$. Zij $\sigma \in C^{n\prime}$

$$\begin{aligned}\partial^n(f^*(\sigma)) &= \partial^n(\sigma \circ f_*)\\ &= \sigma \circ f_* \circ d_{n+1}\\ &= \sigma \circ d_{n+1} \circ f_*\\ &= f^*(\sigma \circ d_{n+1})\\ &= f^*(\partial^{n\prime}(\sigma))\end{aligned}$$

□

Opmerking 3.18. *Voor elk n-simplex $\sigma \in X$ kunnen we een element uit $C^n(X)$ aanwijzen die 1 is op σ en 0 anders. Dit element zullen we als σ noteren.*
Deze elementen vormen een basis voor $C^n(X)$.

Nu we een basis begrip van coketens hebben, kunnen we het Lemma van Sperner op een tweede manier bewijzen.

Bewijs van het Lemma van Sperner. We bewijzen het lemma van Sperner wederom met inductie op de dimensie n van Δ. Hierbij is $n = 0$ wederom triviaal om dezelfde reden als in het combinatorische bewijs.

We kijken naar het element $\Delta^n \in C^{n-1}(\Delta)$ en de simpliciale afbeelding $f : \Delta' \to \Delta$. We kunnen nu dit element van $C^{n-1}(\Delta)$ invullen in onze functies. Aan de ene kant krijgen we dan:

$$\begin{aligned}f^*(\partial^n(\Delta^n)) &= f^*(\Delta^n \circ d_n)\\ &= f^*(\Delta)\\ &= \Delta \circ f_*\\ &= \rho_1 + \cdots + \rho_h\end{aligned}$$

Waarbij we de tweede stap kunnen zetten omdat $\Delta = \Delta^n \circ d_n$ moet gelden, want er is geen ander n-dimensionaal simplex in $|\Delta|$. Verder zijn $\rho_1 \ldots, \rho_h$ de simplices waarvoor geldt dat f ze surjectief op Δ afbeeld. Dit is de enige functie in $C^n(\Delta')$ die gelijk is aan $\Delta \circ f_*$.
We zien dan al snel dat we, om het bewijs te voltooien, moeten laten zien dat h oneven is.
Als we aan de andere kant kijken zien we:

$$\begin{aligned}\partial^n(f^*(\Delta^n)) &= \partial^n(\Delta^n \circ f_*)\\ &= \partial^n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_g + \beta_1 + \cdots + \beta_k)\\ &= \hat{\alpha}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_g + \partial^n(\beta_1) + \cdots + \partial^n(\beta_k)\end{aligned}$$

Waarbij α_i een n-1 dimensionaal simplex in de rand van Δ' is en β_j een n-1 dimensionaal simplex in het inwendige van Δ'. Met de laatste stap weten we dan dat er precies een functie is voor $\partial^n(\alpha_i)$ en dat er een som van precies twee functies zijn voor elke $\partial^n(\beta_j)$. We noteren deze als $\hat{\alpha}_i$ en laten $\partial^n(\beta_j)$ staan maar tellen deze gewoon dubbel. Verder is het vrij snel te zien dat we de tweede stap kunnen maken, omdat dit precies alle simplices zijn die op Δ^n afgebeeld worden en dus de enige functie kan zijn.
Als we dan de coëfficienten bij elkaar optellen zien we dat $g+2k \equiv h \mod 2$, omdat we in $\mathbb{F}_2$ werken. Dit betekend dus dat $g \equiv h \mod 2$ en dit betekend dat h oneven is, want g is precies het aantal $n-1$-dimensionale simplices die op Δ^n wordt afgebeeld en dus door onze inductieaanname oneven. □

3.3 Vergelijking met het combinatorische bewijs

In het eerste coketenbewijs heb ik al een beetje laten zien hoe het coketenbewijs op het combinatorische bewijs lijkt. Dit kunnen we echter ook netjes bewijzen, wat we hieronder zullen doen. We kunnen namelijk inzien dat de functie f^* en ∂^n anders opgevat kunnen worden.

Lemma 3.19. *Zij $f : Y \to X$ een simpliciale functie en $\alpha \in C^n(X)$ een n-dimensionaal simplex dan is $f^*(\alpha) = \sum\{\beta \in Y$ n-dimensionaal $\mid f(\beta) = \alpha\}$.*

Bewijs. We weten dat $f^*(\alpha) = \alpha \circ f_* : C_n(X) \to \mathbb{F}_2$ en deze functie stuurt de elementen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C_n(X)$ die door f op α worden afgebeeld naar 1. De enige functie in $C^n(X)$ die dit doet is $\beta_1 + \cdots + \beta_n$. We zien dus dat deze twee dus wel gelijk moeten zijn. □

Lemma 3.20. *Zij $\alpha \in C^n(X)$, dan is $\partial^n(\alpha) = \sum\{\beta \in X \mid \beta$ is een gezicht van $\alpha\}$.*

Bewijs. We kunnen hier ongeveer hetzelfde idee toepassen als bij het vorige lemma. We zien dat $\partial^n(\alpha) = \alpha \circ d_{n+1}$ en dit is een functie die 1 is als we er $\beta \in_{n+1} (X)$ waarbij α een gezicht is van β in stoppen en 0 is op alle andere punten. De enige functie in C^{n+1} die dit doet is $\sum\{\beta \in X \mid \beta$ is een gezicht van $\alpha\}$ en dus moeten deze twee gelijk zijn. □

We kunnen dan ook het lemma 3.19 op een andere manier bewijzen.

Lemma 3.21. *Zij $f : (X', A') \to (X, A)$ een simpliciale functie zodanig dat $f : X' \to X$ met $f(A') \subset \varphi(A)$. en ∂^n de corand functie voor alle n. Dan geldt:*

$$f^* \circ \partial^n = \partial^n \circ f^*$$

Bewijs. Voor het bewijs merken we op dat er aan allebei de kanten een som van n-ketens zal komen te staan. Stel dat ρ een n-keten is die voorkomt in de som van $f^* \circ \partial^n(\alpha)$ met $\alpha \in C^{n-1}(X)$. Dan is $f(\rho)$ dus een simplex dat wordt afgebeeld op een simplex wat als gezicht α heeft, maar dat betekend dat er een gezicht van ρ door f op α wordt afgebeeld, maar dat betekend precies dat ρ ook in de som van $\partial^n \circ f * (\alpha)$ voorkomt.

Aan de andere kant, als ρ voorkomt in de som van $\partial^n \circ f^*(\alpha)$ dan is ρ dus een gezicht van een simplex β waarvoor geldt dat $f(\alpha) = \beta$. Maar dat betekend dat er een γ bestaat zodanig dat α een gezicht van γ is en $f(\gamma) = \rho$, maar dat betekend precies dat ρ in de som van $f^* \circ \partial^n(\alpha)$ voorkomt.
Daarmee zien we dat het lemma bewezen is. □

En daarna kunnen we het Lemma van Sperner ook op een andere, maar eigenlijk dezelfde, manier bewijzen.

Bewijs van het Lemma van Sperner. We bewijzen het Lemma van Sperner door middel van inductie op n. Hierbij is $n = 0$ om dezelfde reden als bij de voorgaande bewijzen.

Stel $n \geq 0$. We gebruiken Lemma 3.21 op Δ^n als coketen van Δ met $f : \Delta' \to \Delta$ met Δ en Δ' als in het Lemma 2.11. We houden dus de volgende vergelijking over:

$$f^*(\partial^n(\Delta^n)) = \partial^n(f^*(\Delta^n))$$

allereerst bekijken we $f^*(\partial^n(\Delta^n))$. We zien dan dat $\partial^*(\Delta^n)$ gelijk is aan alle n-dimensionale simplices die Δ^n als gezicht hebben. Echter weten we dat dit alleen Δ zelf is. We houden dus $f^*(\Delta)$ over. Maar $f^*(\Delta)$ is het aantal simplices die door f worden afgebeeld op Δ. Dus $f(\Delta) = \rho_1 + \cdots + \rho_g$.

Bekijk nu $\partial^n(f^*(\Delta^n))$. We weten dat $f^*(\Delta^n)$ gelijk is aan het aantal simplices wat door f op Δ^n wordt afgebeeld. Dus zij $f^*(\Delta^n) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_h$. Dan weten we dat ∂ lineair is, dus $\partial^n(f^*(\Delta_{n+1})) = \partial^n(\sigma_1 + \cdots + \sigma_h) = \partial^n(\sigma_1) + \cdots + \partial^n(\sigma_h)$. Verder kunnen we concluderen dat er twee verschillende soorten simplices zijn die op Δ^n worden afgebeeld. Namelijk de simplices in het inwendige van Δ' en simplices in het uitwendige van Δ'. Als we dan ∂^n toepassen op deze simplices zien we dat we in het eerste geval 2 simplices krijgen en in het tweede geval precies één simplex. We zien dus dat $\partial^n(f^*(\Delta_{n+1})) = \hat{\sigma}_1 + \cdots + \hat{\sigma}_k + \sigma'_{1_1} + \sigma'_{1_2} + \cdots + \sigma'_{l_1} + \sigma'_{l_2}$. Waarbij $\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_k$ de $n-1$-dimensionale simplices die door f op Δ^n worden afgebeeld. We zien dan dat we weer in dezelfde situatie terecht zijn gekomen als bij het eerste coketenbewijs en kunnen dus concluderen dat het lemma bewezen is. □

We zien dan dat het combinatorische bewijs en het coketting bewijs eigenlijk hetzelfde bewijs zijn.

4 Cohomologisch bewijs

4.1 Korte en lange exacte rijtjes

Voordat we een cohomologiegroep definiëren moeten we eerst wat weten over korte en lange exacte rijtjes.

Definitie 4.1. *Zij $A \subset X$ simpliciale complexen. Dan definiëren we $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$.*

Definitie 4.2. *Zij X een simpliciaal complex met ketencomplex $C_\bullet(X)$. We noemen $C_\bullet(X)$ exact als voor elke n geldt dat $\mathrm{Im}(d_{n+1}) = \mathrm{Ker}(d_n)$.*

In hoofdstuk 3 hebben we al een definitie van een exact rijtje gezien. Dit hebben we nu nodig om het Lemma van Sperner met cohomologie groepen te bewijzen. We willen opmerken dat een exact rijtje niet per se oneindig hoeft te zijn. Als we kijken naar het rijtje $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, dan is dit rijtje exact als $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$

Definitie 4.3. *Als we ketenfuncties f_*, g_* hebben zodanig dat $0 \to C_\bullet(X) \xrightarrow{f_*} C_\bullet(Y) \xrightarrow{g_*} C_\bullet(Z) \to 0$. Dan noemen we dit een kort exact rijtje als $0 \to C_n(X) \xrightarrow{f_n} C_n(Y) \xrightarrow{g_n} C_n(Z) \to 0$ exact is voor alle n.*

Opmerking 4.4. *Zij $A \subset X$ simpliciale complexen. Dan induceert de inclusie functie een functie f_n voor alle n zodat het volgende diagram commuteert.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & C_{n+1}(A) & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n(A) & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & {\scriptstyle f_{n+1}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_n}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_{n-1}}\big\downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Lemma 4.5. *Zij $A \subset X$ simpliciale complexen. Dan bestaat er een exact kort rijtje $0 \xrightarrow{f} C_\bullet(A) \xrightarrow{g} C_\bullet(X) \xrightarrow{h} C_\bullet(X, A) \xrightarrow{i} 0$.*

Bewijs. We willen bewijzen dat $0 \xrightarrow{f} C_n(A) \xrightarrow{g} C_n(X) \xrightarrow{h} C_n(X, A) \xrightarrow{i} 0$ voor alle $n \geq 0$.
We zien gelijk dat f, i gelijk moeten zijn aan de nulfuncties. We zien dus gelijk dat $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f = 0$ en $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Ker}\, i = C_n(X, A)$.
Kies dan voor g de ketenfunctie die geïnduceerd wordt door de inclusiefunctie. We zien dan makkelijk dat $\mathrm{Ker}(g) = 0$ en dat dit deel dus exact is. Verder zien we dan dat $\mathrm{Im}(g) = C_n(A)$.
Als we dan voor h de functie kiezen die een element $x \in C_n(X)$ naar zijn

klasse $|x| \in C_n(X, A)$ stuurt, zien we gelijk dat $\text{Im}(h) = C_n(X, A) = \text{Ker}\, i$ en $\text{Ker}(h) = C_n(A) = \text{Im}(g)$. We zien dus dat dit een exact rijtje is en dat we dus klaar zijn. □

Lemma 4.6. *Zij $A \subset X$ simpliciale complexen. Dan bestaat er een functie $\tilde{d}_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ zodat*

$$\dots \xrightarrow{\tilde{d}_{n+2}} C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\tilde{d}_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\tilde{d}_n} C_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\tilde{d}_{n-1}} \dots$$

Een ketencomplex is.

Bewijs. We hebben door Lemma 4.4 en 4.5 het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1}(A) \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n(A) \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1}(X, A) \arrow[r, "\tilde{d}_{n+1}"] \arrow[d] & C_n(X, A) \arrow[r, "\tilde{d}_n"] \arrow[d] & C_{n-1}(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Waarbij $d_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$ voor alle n en $0 \to C_n(A) \to C_{n+1}(X) \to C_{n+1}(X, A) \to 0$ een kort exact rijtje is die volgens Lemma 4.5 voor alle n bestaat.

We moeten dus nog de functie $\tilde{d}_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ op de plek van het vraagteken construeren. Stel dat we een element $x \in C_n(X, A)$ hebben en $y \in C_n(X)$ een representant. We definiëren $\tilde{d}_n(x) = |d_n(y)|$ waarbij $|d_n(y)|$ de klasse van $d_n(y)$ is.
Het is dan vrij makkelijk te zien dat voor $x \in C_n(X, A)$ geldt dat $\tilde{d}_{n-1}(\tilde{d}_n(x)) = |d_{n-1}(d_n(y))| = |0|$. Deze eigenschap voor een ketencomplex hebben we dus al.

Dan moeten we nog laten zien dat deze functie onafhankelijk is van de representant die we pakken. Stel dus dat we een tweede representant $z \in C_n(X)$ pakken. Dan weten we dat $y - z \in C_n(A)$. Maar dan volgt uit de commutativiteit van het diagram en het feit dat $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = C_{n-1}(A)$ dat $d_n(y - z) \in C_{n-1}(A)$. Maar dan zit ook $d_n(y) - d_n(z) \in C_{n-1}(A)$ en dan weten we dat de klassen gelijk zijn. □

Het is daarna vrij makkelijk in te zien dat ook $g_{n-1} \circ d_n = \delta_n \circ g_n$ geldt voor alle n. Stel dat $x \in C_n(X)$ dan is $\delta_n \circ g_n(x) = |d_n(x)|$ en aan de andere kant zien we dat $g_{n-1}(d_n(x)) = |d_n(x)|$ en dit is duidelijk gelijk aan elkaar.

Lemma 4.7. *Zij $A \subset X$ simpliciale complexen zodanig dat $0 \to C_\bullet(A) \xrightarrow{f_*} C_\bullet(X) \xrightarrow{g_*} C_\bullet(X, A) \to 0$ een kort exact rijtje is. Dan bestaat er een exact rijtje van cohomologie groepen voor alle n:*

$$H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A)$$

Bewijs. We gaan bewijzen dat er een exact rijtje $H_n(A) \xrightarrow{h_n} H_n(X) \xrightarrow{i_n} H_n(X, A)$ bestaat. Neem h_n de functie die een element $x \in H_n(A)$, met als representant $a \in \mathrm{Ker}(d'_n) \subset C_n(A)$, stuurt naar de klasse van $f_n(a)$ en i_n de functie die een element $y \in H_n(X)$, met als representant $b \in \mathrm{Ker}(d_n) \subset C_n(X)$, naar de klasse van $g_n(b)$ stuurt. Deze functies zijn goed gedefinieerd, omdat $d_n(f_n(a)) = f_{n-1}(d'_n(a)) = f_{n-1}(0)$ en omdat f_{n-1} injectief is moet dit gelijk zijn aan 0. Dan zien we dus dat $f_n(a)$ inderdaad in $\mathrm{Ker}(d_n)$ zit en dus een representant is voor een klasse in $H_n(X)$. Een soortgelijk argument kunnen we voor i gebruiken.
Dan weten we dat $i_n \circ h_n = 0$ doordat $g_n \circ f_n = 0$. We hoeven dus alleen nog te bewijzen dat $\mathrm{Ker}\, i_n \subset \mathrm{Im}\, h_n$ en dat deze functie niet afhangt van de gekozen representant.

De laatste van deze twee is makkelijk te checken. Stel dat $a' \in \mathrm{Ker}(d'_n) \subset C_n(A)$ een andere representant is van $x \in H_n(A)$. Dan weten we dat $a - a' \in \mathrm{Im}(d'_{n+1})$. Dus er bestaat $c \in C_{n+1}(A)$ zodanig dat $d'_{n+1}(c) = a - a'$. Maar dan weten we dat $f_n(d'_{n+1}(c)) = d_{n+1}(f_{n+1}(c))$. Doordat f injectief is zien we dan dat $f_n(a - a') \in \mathrm{Im}(d_{n+1})$ en dit betekend dat $f_n(a')$ in dezelfde klasse zit.

Dan moeten we nog bewijzen dat we daadwerkelijk een exact rijtje hebben. Zij $x \in H_n(X)$ zodanig dat $i_n(x) = 0$. Neem $a \in \mathrm{Ker}(d_n(X))$ een representant. Dan impliceert $i_n(x) = 0$ dat $g_n(a) \in \mathrm{Im}(\tilde{d}_{n+1})$. Dus we weten dat er een $b \in C_{n+1}(X, A)$ bestaat zodanig dat $d_{n+1}(b) = g_n(a)$. Verder weten we dat $\mathrm{Im}(g_{n+1}) = C_{n+1}(X, A)$, dus er bestaat een $c \in C_{n+1}(X)$ zodanig dat $g_{n+1}(c) = b$, maar dan weten we door de commutatieviteit dat

$$g_n(a) = \tilde{d}_{n+1}(g_{n+1}(c)) = g_n(d_{n+1}(c))$$

oftewel dat

$$g_n(a - d_{n+1}(c)) = 0$$

.
Dan weten we door de exactheid dat $\mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n)$, dus er bestaat een $e \in C_n(A)$ zodanig dat $f(e) = a - d_{n+1}(c)$. Oftewel dat $a = f(e) + d_{n+1}(c)$. Maar $x = [a] = [f(e) + d_{n+1}(c)] = [f_n(e)]$, dus $x \in \mathrm{Im}\, h_n$ en dat betekend dus dat we klaar zijn.

□

Stelling 4.8. *Zij $A \subset X$ simpliciale complexen zodanig dat $0 \to C_\bullet(A) \xrightarrow{f_*} C_\bullet(X) \xrightarrow{g_*} C_\bullet(X, A) \to 0$ een kort exact rijtje is. Dan bestaat er een lang exact rijtje van cohomologie groepen:*

$$\ldots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X, A) \to \ldots$$

Bewijs. Uit de voorgaande stelling weten we dat er een exact rijtje $H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A)$ bestaat.
We moeten dan nog een functie $\delta_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ construeren zodat de hele rij exact wordt. We zullen eerst een functie construeren.
Zij $x \in H_n(X, A)$ en $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{d}_n)$ een representant. We weten dat $\mathrm{Im}(g_n) = C_n(X, A)$, dus er bestaat een $b \in C_n(X)$ zodanig dat $g_n(b) = a$. Verder weten we dat:

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ker}(\tilde{d}_n) &\Rightarrow \tilde{d}_n(a) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{d}_n(g_n(b)) = 0 \\ &\Rightarrow g_{n-1}(d_n(b)) = 0 \end{aligned}$$

Waarbij de laatste stap geldt door de commutativiteit.
We weten dan dat $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(g_{n-1})$, dus er bestaat een $c \in C_{n-1}(A)$ zodanig dat $f_{n-1}(c) = \tilde{d}_n(b)$.
Dan geldt:

$$\begin{aligned} d_{n-1}(d_n(b)) = 0 &\Rightarrow d_{n_1}(f_{n-1}(c)) = 0 \\ &\Rightarrow f_{n-2}(d_{n-1}(c)) = 0 \end{aligned}$$

En we weten dat f_{n-2} injectief is, dus $\mathrm{d}_{n-1}(c) = 0$, dus $c \in \mathrm{Ker}(d_{n-1})$.
We kunnen dus definiëren dat $\delta(x) = [c] \in H_{n-1}(A)$ met $c = f_{n-1}^{-1}(d_n(b))$. Dan rest ons nog te bewijzen dat deze welgedefinieerd is en dus niet afhangt

van de keuze van de representant.

Stel dat $a' \in \mathrm{Ker}(\tilde{d}_n)$ een andere representant is. Dan weten we dat $a - a' \in \mathrm{Im}(\tilde{d}_{n+1})$. Door de surjectiviteit van g zien we dan dat er een $e \in C_{n+1}(X)$ bestaat zodanig dat $g_n(d_{n+1}(e)) = a - a'$. Als we dan $a = g_n(b)$ invullen zien we dat de verandering van a in a' een verandering van b naar $b - d_{n+1}(e)$ geeft, maar dit verandert niks aan c, omdat $d_n \circ d_{n+1} = 0$. We zien dan dus dat dit dezelfde klasse oplevert.
Verder kan er wellicht een andere b' bestaan zodat $g_n(b') = a$, maar dan moet dit de oorspronkelijke b zijn die met iets vermenigvuldigt is uit $\mathrm{Ker}(g_n)$. We weten dat $\mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n)$, maar als we bij b iets optellen van de vorm $f_n(k)$ dan zien we dat $c = f_{n-1}^{-1}(d_n(b)) + f_{n-1}^{-1}(d_n(f_n(k)))$. Maar we weten door de commutativiteit dat $d_n(f_n(k)) = f_{n-1}^{-1}(d'_n(k))$ dus dit laatste moet gelijk zijn aan $d'_n(k)$. Maar dan tellen we bij c dus iets op wat in $\mathrm{Im}(d'_n)$ zit en dit verandert de klasse van c niet. We zien dus dat het niet uitmaakt wat voor representanten we kiezen.
Als laatste moeten we nog laten zien dat dit een homomorfisme is, maar dit volgt vrijwel direct uit de definitie van onze functie.

Nu we δ hebben geconstrueerd moeten we nog laten zien dat we een exacte rij krijgen. Als eerste bekijken we $\delta_n \circ i_n$. Zij $x \in H_n(X)$ en $u \in \mathrm{Ker}(d_n)$ een representant. Dan geldt dat $g_n(u)$ een representant is van $i_n(x)$. We mogen in onze constructie van δ dan dus $g_n(u) = a$ kiezen en dan krijgen we $b = u$. Maar $u \in \mathrm{Ker}(d_n)$ dus $d_n(u) = 0$. In onze constructie zien we dan dat $c = f_{n-1}^{-1}(d_n(u)) = 0$.
Dan moeten we nog laten zien dat $\mathrm{Ker}(\delta_n) \subset \mathrm{Im}(i_n)$. Zij $x \in \mathrm{Ker}(\delta_n)$. Dit betekend dat c in de constructie van δ_n in $\mathrm{Im}(d'_n)$ moet zitten. Dus er is een $k \in C_n(A)$ zodanig dat $d'_n(k) = c$. Dan geldt dat $d_n(b) = f_{n-1}(c) = f_{n-1}(d'_n(k)) = d_n(f_n(k))$. We weten dan dus dat $d_n(b - f_n(k)) = 0$. Dus $b - f_n(k) \in \mathrm{Ker}(d_n)$. We kunnen dus de functie i_n hierop toepassen omdat $b - f_n(k)$ een representant is van een klasse in $H_n(X)$ en zien dan dat $|g_n(b - f_n(k))| = |g_n(b) - g_n(f_n(k))| = |g_n(b)| = |a| = x$. We zien dan dat dit deel exact is.

We bekijken nu $h_{n-1} \circ \delta_n$. In onze constructie krijgen we dat $\delta(y) = |c|$ met $c = f_{n-1}^{-1}(d_n(b))$. Dat betekend dat $h_{n-1}(\delta_n(|c|) = |d_n(b)|$. Maar dit is nul in $H_{n-1}(X)$, omdat $d_{n-1}(b) \in \mathrm{Im}(d_{n-1})$.
Dan moeten we nog laten zien dat $\mathrm{Ker}(h_{n-1}) \subset \mathrm{Im}(\delta_n)$. Stel $x \in \mathrm{Ker}(h_{n-1})$ en zij $y \in \mathrm{Ker}(d'_n)$ een representant van x. Dan zien we dat $f_{n-1}(y) \in \mathrm{Im}(d_n)$ zit, omdat $x \in \mathrm{Ker}(h_{n-1})$. Dus er bestaat een $z \in C_n(X)$ zodanig dat $d_n(z) = f_{n-1}(y)$. Door de commutativiteit weten we dan dat $0 = g_{n-1}(f_{n-1}(y)) =$

$g_{n-1}(d_n(z)) = \tilde{d}_n(g_n(z))$. Dus $g_n(z) \in \mathrm{Ker}(\tilde{d}_n)$. We kunnen dus onze functie δ gebruiken, omdat $g_n(z)$ een representant van een klasse moet zijn. Dan zien we dat in onze constructie we $a = g_n(z)$ kunnen kiezen. Dan kunnen we $b = z$ kiezen. Door onze constructie zien we dan dat $c = f_{n-1}^{-1}(d_n(z)) = y$. Dus $\delta(|g_n(z)|) = x$ en daarmee zijn we klaar.

□

4.2 Cohomologie

Voor het cohomologische bewijs moeten we onze kennis nog iets verder uitbreiden naar cohomologische groepen $H^n(X)$.

Definitie 4.9. *Zij $C^\bullet(X)$ een coketen, dan definieren we de cohomologie groep $H^n(X)$ als volgt :*

$$H^n(X) = \mathrm{Ker}(d^n)/\,\mathrm{Im}(d^{n-1})$$

Lemma 4.10. *Zij A, B, C abelse groepen en $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ een kort exact rijtje. Dan kunnen we extra functie g', f' opschrijven die wellicht niet bestaan zodat we het volgende krijgen.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "f'"] \arrow[r, shift left, "g"] & C \arrow[l, shift left, "g'"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

- *Er bestaat een functie f' zodanig dat $f' \circ f = \mathrm{Id}_A$.*
- *Er bestaat een functie g' zodanig dat $g' \circ g = \mathrm{Id}_B$.*
- *B is isomorf met de directe som van A, C.*

Dit Lemma zullen we nodig hebben bij het bewijs van het volgende Lemma. Ik zal het echter niet bewijzen, maar als mensen geïnteresseerd zijn dan is dit Lemma makkelijk op internet te vinden onder de naam 'splitting lemma'.

Lemma 4.11. *Zij $A \subset X$ simpliciale complexen en $0 \to C_\bullet(A) \xrightarrow{f_*} C_\bullet(X) \xrightarrow{g_*} C_\bullet(X, A) \to 0$ een kort exact rijtje. Dan induceert deze een kort exact rijtje $0 \leftarrow C^\bullet(A) \xleftarrow{f^*} C^\bullet(X) \xleftarrow{g^*} C^\bullet(X, A) \leftarrow 0$.*

Bewijs. We hebben net als de vorige keer links en rechts de nulfunctie staan. We zien dan dus dat $\mathrm{Im}(f^*) = C^\bullet(A)$ en $\mathrm{Ker}(g^*) = 0$.

We weten dat $C^\bullet(X) = (C_n(X), N)$. Het ligt dus voor de hand om voor $\sigma \in C^\bullet(X)$ te definiëren dat $f^*(\sigma) = \sigma \circ f_*$ en op dezelfde manier voor $\rho \in C^\bullet(X, A)$ te definiëren dat $g^*(\rho) = \rho \circ g_*$. Dan is duidelijk dat $\mathrm{Im}(f^*(X)) \subset C^\bullet(A)$, dus moeten we nog bewijzen dat $C^\bullet(A) \subset \mathrm{Im}(f^*(X))$. Stel $x \in C^\bullet(A)$.
Stel $y \in \mathrm{Ker}(g^*)$. Dan geldt dat $y \circ g_* = 0$. Dus geldt dan dat $y(g_*(C_n(X)) = 0$, maar $g_*(C_n(X)) = C_n(X, A)$, dus $y(C_n(X, A)) = 0$ en dan moet wel gelden dat $y = 0$. We zien dan dat dit deel dus exact is.

Dan moeten we nog controleren of dit exact is in $C^\bullet(X)$, maar $f^*(g^*(\rho)) = f^*(\rho \circ g_*) = \rho \circ g_* \circ f_* = \rho \circ 0 = 0$. We hoeven dus alleen nog te controleren dat $\mathrm{Ker}\, f^* \subset \mathrm{Im}\, g^*$.
Stel $x \in \mathrm{Ker}\, f^*$, dus $f^*(x) = x \circ f_* = 0$. We zoeken $y \in C^n(X, A)$ zodanig dat $g^*(y) = y \circ g_* = x$. We kunnen vrij makkelijk inzien dat er een functie f'_* bestaat zodanig dat $f'_* \circ f_* = \mathrm{Id}_{C_n(A)}$. We weten dat f_* injectief is, dus neem $f'_*(x) = y$ als $f_*(y) = x$ en stuur de rest naar 0. Dit is voor het lemma een goede functie, omdat er geen verdere eisen aan de functies worden gesteld. Door Lemma 4.9 zien we dan dat er een functie g'_* bestaat zodanig dat $g'_* \circ g_* = \mathrm{Id}_{C_\bullet(X)}$. Dan geldt dat $x \circ g'_* \in C^n(X, A)$ en er geldt dat $g_*(x \circ g'_*) = x \circ g'_* \circ g_* = x$. Dus geldt dat $\mathrm{Ker}\, f^* \subset \mathrm{Im}\, g^*$ en daarmee dat dit deel ook exact is en we dus het korte exacte rijtje hebben gevonden wat we wilden. $\square$

Uit dit exacte rijtje krijgen we dan, op een soortgelijke manier als bij het homologische rijtje, een lang exact rijtje van cohomologie groepen:

$$\cdots \to H^{n-1}(X, A) \to H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(A) \to H^n(X, A) \to H^n(X) \to H^n(A) \to \ldots$$

Opmerking 4.12. *Het volgende diagram is commutatief*

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(\partial\Delta) & \xrightarrow{\delta} & H^n(\Delta, \partial\Delta) \\ \big\downarrow \varphi_\partial^* & & \big\downarrow \varphi^* \\ H^{n-1}(\partial\Delta') & \xrightarrow{\delta} & H^n(\Delta', \partial\Delta') \end{array}$$

Hierbij zijn φ_∂^* en φ^* de functies die geinduceerd worden door een simpliciale afbeelding $\varphi : \Delta' \to \Delta$.

Allereerst kunnen we inzien dat al deze groepen isomorf zijn aan $\mathbb{F}_2$. Dit is omdat we kunnen laten zien dat $\partial\Delta \cong S^{n-1}$, waarbij S^{n-1} de sphere van dimensie n-1 is. Dan is een zeer bekend bewijs dat $H^{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{F}_2$ en $H^0(S^{n-1}) = \mathbb{F}_2$ als we onze coëfficienten in $\mathbb{F}_2$ hebben. Ook weten we dat $H^m(S^{n-1}) = 0$ als $m \neq 0, n-1$ Ik zal dit bewijs echter niet in deze scriptie herproduceren. Dan kunnen we hetzelfde concluderen over $H^k(\partial\Delta')$.

Voor de andere groepen is een soortgelijk bewijs waaruit volgt dat deze ook congruent zijn aan $\mathbb{F}_2$.

We willen dan inzien dat δ een isomorfisme is. We weten dat $\dots \to H^{n-1}(\Delta) \to H^{n-1}(\partial\Delta) \to H^n(\Delta, \partial\Delta) \to H^n(\Delta) \to \dots$ een exact rijtje is. Verder kunnen we bewijzen dat $H^k(\Delta) = 0$ voor alle $k \geq 1$. We krijgen dan dus een exact rijtje $0 \to H^{n-1}(\partial\Delta) \xrightarrow{\delta} H^n(\Delta, \partial\Delta) \to 0$. Hieruit volgt direct dat δ een isomorfisme moet zijn.
Deze zelfde aanpak kunnen we toepassen op $H^{n-1}(\partial\Delta') \xrightarrow{\delta} H^n(\Delta', \partial\Delta')$.

We kunnen nu verder met het bewijzen van het lemma van Sperner

Bewijs van het Lemma van Sperner. We gaan weer vanuit inductie redeneren en wederom is $n = 1$ een triviaal geval. Stel dan dat $n > 1$.
Als eerste kunnen we inzien dat φ_∂^* gelijk is aan de vermenigvuldiging van de graad modulo 2 van φ_∂. Deze graad is op zijn beurt weer gelijk aan het aantal n-1-simplices die door φ_∂ op een willekeurige n-1 simplex in $\partial\Delta$, dus bijvoorbeeld op Δ^n. Als we deze graad h noemen zien we dus dat $h = 1 \mod 2$ wegens onze inductieaanname. Op dezelfde manier zien we dat φ^* gelijk is aan de multiplicatie van een getal e, wat het aantal n dimensionale simplices is van Δ' die op Δ worden afgebeeld. doordat δ een isomorfisme is zien we dat $e = h \mod 2$ moet gelden. Hiermee zien we dus dat het bewijs voltooid is. □

4.3 Vergelijking

We zien vrij makkelijk in dat we dit bewijs om kunnen zetten in het cokettenbewijs. Dit bewijs hebben we in de vorige sectie al nader bekeken en zijn toen tot de conclusie gekomen dat dit bewijs in essentie hetzelfde was als het combinatorische bewijs. We kunnen dus concluderen dat het cohomologische bewijs ook hetzelfde is als het combinatorische bewijs.

Referenties

[1] Looijenga, E.. Algebraic Topology - an introduction. Dictaat te vinden op http://pub.math.leidenuniv.nl/ jongrsde/olderteaching/algtop2011/algtop.pdf

[2] Ivanov, N. V.. Sperner's Lemma, the Brouwer Fixed-Point Theorem, and Cohomology.

[3] Müger, M.(2002). Syllabus on Homology Theory. Amsterdam, Netherlands: Korteweg-de Vries Institute.

[4] Hatcher, A. (2001). Algebraic Topology. Te vinden op http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf

[5] Bredon, G.E. (1993). Topology and Geometry. New York, America: Sprinker-Verslag.