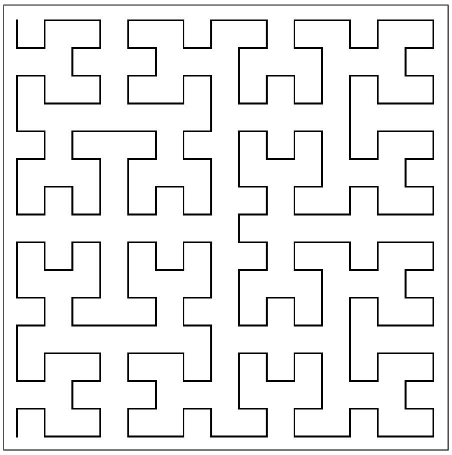
Radboud Universiteit Nijmegen

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

De stelling van Hahn en Mazurkiewicz



Naam:	Lennaert Stronks
Studentnummer:	4062175
Studie:	Wiskunde
Begeleider:	dr. M.H.A.H. Müger
Datum:	10 juli 2014

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Het kwam als een grote verrassing in 1890, Giuseppe Peano's constructie van een continue surjectie van het eenheidsinterval $[0, 1]$ *naar het eenheidsvierkant* $[0, 1] \times [0, 1]$*. Peano's kromme ging in tegen het op dat moment gangbare dimensiebegrip. Omstreeks 1913 kwamen Hans Hahn (1879-1938) en Stefan Mazurkiewicz (1888-1945) onafhankelijk van elkaar tot een stelling die precies zegt welke ruimtes het beeld zijn van een continue functie op* $[0, 1]$*. In het onderstaande stuk bekijken we deze stelling in detail, alsmede een generalisatie.*

Alvorens we de stelling van Hahn en Mazurkiewicz bewijzen zullen we eerst de nodige topologie herhalen. Dit betreft onder andere de separatieaxioma's T_1 t/m T_4, compactheid, volledigheid, samenhang en padsamenhang. De lezer die bekend is met deze concepten kan dit gedeelte overslaan. Twee belangrijke bouwstenen die we vervolgens bekijken, zijn de stelling van Mazurkiewicz en Moore (die voldoende voorwaarden geeft om padsamenhang van samenhangende ruimtes veilig te stellen) en de stelling van Hausdorff (die zegt dat elke compacte ruimte het beeld is van een continue functie op de Cantorverzameling). De stelling van Hahn en Mazurkiewicz zegt dan dat de beelden van continue functies op het eensheidsinterval precies de Peanocontinua zijn, dat wil zeggen: compacte, samenhangende, lokaal samenhangende metrische ruimtes.

Vervolgens beschouwen we een generalisatie van de stelling van Hahn en Mazurkiewicz, zoals in 1998 gepresenteerd door R. Ayala, M.J. Chávez en A. Quintero in [2]. We pogen hierbij ook de 'gegeneraliseerde Peanocontinua' (lokaal compacte, samenhangende, lokaal samenhangende metrische ruimtes) te karakteriseren. Het ligt voor de hand om te kijken naar continue functies op $[0, \infty)$, maar het zal blijken dat continue functies niet alle eigenschappen van gegeneraliseerde Peanocontinua overdragen. Perfecte afbeeldingen doen dit wel, maar niet elk gegeneraliseerd Peanocontinuüm is het beeld van een perfecte afbeelding op $[0, \infty)$. We zullen daarom ook de halfrechte moeten vervangen door iets algemeners. Topologische bomen blijken prima te functioneren en de uiteindelijke stelling (zie Stelling 4.4.3) zegt onder andere dat er bij elk gegeneraliseerd Peanocontinuüm X een boom T bestaat en een perfecte surjectie $f : T \to X$. De constructie van dergelijke bomen en bijbehorende perfecte afbeeldingen leunt zwaar op de Freudenthalcompactificatie, die we daarom in detail zullen behandelen.

2 Topologische ruimtes

2.1 Basisconcepten

Allereerst herhalen we enige topologie. Na vastleggen van enige notatie zullen we een aantal basisbegrippen omtrent (continue) functies, afsluitingen, bases en netten kort aanstippen. Verder bespreken we kort de separatieaxioma's $T_1, ..., T_4$ *en geven Tietze's uitbreidingsstelling en de metriseerbaarheidsstelling van Urysohn. Ten slotte bekijken we een aantal eigenschappen van directe sommen, quotiënten en producten van topologische ruimtes. We zullen lang niet alles bewijzen en veel resultaten vrijelijk (zonder verwijzing) inzetten.*

2.1.1 Notatie

In het onderstaande is (X, τ) steeds een topologische ruimte, waarbij we de topologie τ lang niet altijd expliciet zullen vermelden. Metrische ruimtes schrijven we als (X, d) (en de metriek d ondergaat hetzelfde lot als τ). Elke metrische ruimte is in het bijzonder een topologische ruimte en we noteren de metrische topologie als τ_d. Voor een deelruimte Y van X noteren we de deelruimtetopologie (resp. deelruimtemetriek) als τ_Y (resp. d_Y). In een metrische ruimte is $B(x, r) \coloneqq \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ een bol met straal r rond x en $C(x, r) \coloneqq \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ een bal met straal r rond x. Standaard noteren we de afsluiting van een deelverzameling $Y \subset X$ met $\overline{Y}$, het inwendige van Y met Y° en de rand van Y met $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y^\circ$. Echter, wanneer $Z \subset Y \subset X$ zullen we soms uitwijken naar de notaties $\mathrm{Cl}_Y(Z)$ voor de afsluiting van Z in Y, $\mathrm{Int}_Y(Z)$ voor het inwendige van Z in Y en $\mathrm{Fr}_Y(Z)$ voor de rand van Z, opdat er geen verwarring ontstaat. Ten slotte: voor een functie $f : X \to Y$ en $Z \subset Y$, is $f^{-1}(Z) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$. Wanneer $Z = \{z\}$, schrijven we $f^{-1}(z)$ in plaats van $f^{-1}(\{z\})$.

2.1.2 Functies

Lemma 2.1.1 *Zij X, Y verzamelingen, $A, B \subset X$; $C, D \subset Y$ en $f : X \to Y$ een functie. Dan is:*
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *(= geldt voor willekeurige $A, B \Leftrightarrow f$ is injectief).*
- $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$ *(= geldt voor willekeurige $A, B \Leftrightarrow f$ is injectief).*
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.
- $A \subset f^{-1}(f(A))$ *(= geldt voor willekeurige $A \Leftrightarrow f$ is injectief).*
- $C \supset f(f^{-1}(C))$ *(= geldt voor willekeurige $C \Leftrightarrow f$ is surjectief).*

Definitie 2.1.2 Zij X, Y topologische ruimtes. Een functie $f : X \to Y$ heet
- **continu** als $f^{-1}(V) \subset X$ open is voor elke open $V \subset Y$.
- **open** als $f(U) \subset Y$ open is voor elke open $U \subset X$.
- **gesloten** als $f(U) \subset Y$ gesloten is voor elke gesloten $U \subset X$.
- een **homeomorfisme** als f continu, open (of gesloten) en bijectief is.

We noemen X en Y **homeomorf** als er een homeomorfisme $f : X \to Y$ bestaat (notatie $X \cong Y$).

Notatie 2.1.3 Voor topologische ruimtes X, Y is $C(X, Y)$ de ruimte van alle continue functies $f : X \to Y$. Als $X = Y$ schrijven we $C(X)$ in plaats van $C(X, X)$.

Opmerking 2.1.4 Voor metrische ruimtes X, Y zullen we hier en daar ook de ε-δ-definitie van continuïteit gebruiken, die (voor metrische ruimtes) equivalent is aan de bovenstaande (topologische) definitie. In het bijzonder hebben we:

Definitie 2.1.5 Een functie $f : X \to Y$ tussen twee metrische ruimtes X en Y heet **uniform continu** als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor elke $x, y \in X$ met $d(x, y) < \delta$ geldt: $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definitie 2.1.6 Zij $(X,d),(Y,d')$ metrische ruimtes. Een **isometrie** is een afbeelding $\iota : X \to Y$ die voldoet aan $d'(\iota(x),\iota(y)) = d(x,y)$ voor alle $x,y \in X$.

Lemma 2.1.7 *Zij $f : X \to Y$ een functie. Dan zijn equivalent:*
(i) f is open.
(ii) Voor elke $x \in X$ en elke (open) omgeving U van x, bestaat er een open $V \subset Y$ zodanig dat $f(x) \in V \subset f(U)$.

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii) Zij U een open omgeving van $x \in X$. Dan is $V \coloneqq f(U)$ open en $f(x) \in V = f(U)$.
(i) $\Leftarrow$ (ii) Zij $U \subset X$ open en $y \in f(U)$. Dan is er een $x \in U$ zodanig dat $f(x) = y$. Per aanname bestaat er een open $V \subset Y$ zodanig dat $y = f(x) \in V \subset f(U)$. Aangezien dit kan voor elke $y \in f(U)$, volgt dat $f(U)$ open is. $\square$

Lemma 2.1.8 *Zij $f : X \to Y$ gesloten. Dan is er voor elke $y \in Y$ en elke open U met $f^{-1}(y) \subset U$, een open omgeving V van y zodanig dat $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U$.*

Bewijs: Zij $y \in Y$ en $U \subset X$ open met $f^{-1}(y) \subset U$. Dan is $X \setminus U$ gesloten en dus is $f(X \setminus U) \subset f(X)$ gesloten. Definieer $V \coloneqq f(X) \setminus f(X \setminus U)$. Er geldt $y \in V$, aangezien $(X \setminus U) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ en dus is V een open omgeving van y. Bovendien is:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}\left(f(X) \setminus f(X \setminus U)\right) \\ &= f^{-1}(f(X)) \setminus f^{-1}(f(X \setminus U) \\ &\subset X \setminus (X \setminus U) = U, \end{aligned}$$

waaruit de claim volgt. $\square$

2.1.3 Afsluiting en inwendige

Lemma 2.1.9 *Zij (X,τ) een topologische ruimte en $Y \subset X$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*
(i) $x \in \overline{Y}$.
(ii) $U \cap Y \neq \emptyset$ voor elke (open) omgeving U van x.

Bewijs: Er geldt:

$$\begin{aligned} x \in \overline{Y} &\Leftrightarrow x \notin (X \setminus Y)^\circ. \\ &\Leftrightarrow \text{Voor elke open omgeving } U \text{ van } x \text{ is } U \not\subset (X \setminus Y)^\circ. \\ &\Leftrightarrow \text{Voor elke open omgeving } U \text{ van } x \text{ is } U \cap Y \neq \emptyset. \end{aligned}$$

$\square$

Gevolg 2.1.10 *Zij $U \subset X$ open en $Y \subset X$ zodanig dat $U \cap Y = \emptyset$. Dan is $U \cap \overline{Y} = \emptyset$.*

Bewijs: Zij $y \in \overline{Y}$. Dan is $V \cap Z \neq \emptyset$ voor elke open omgeving V van y. Aangezien $U \cap Y = \emptyset$, kan U geen open omgeving van y zijn en dus is $y \notin U$. $\square$

Definitie 2.1.11 Een deelruimte $Y \subset X$ heet **dicht** als $\overline{Y} = X$.

Lemma 2.1.12 *Zij X, Y topologische ruimtes, $W \subset X$ en $Z \subset Y$ beiden dicht en $f : X \to Y$ continu en gesloten zodanig $f(W) = Z$. Dan is f surjectief.*

Bewijs: Omdat $f(X) = f\left(\overline{W}\right)$ en f gesloten is, is $f\left(\overline{W}\right) \subset Y$ gesloten. Aangezien $Z = f(W) \subset f\left(\overline{W}\right)$, is $Y = \overline{Z} \subset f\left(\overline{W}\right) = f(X)$ en dus is f surjectief. $\square$

Definitie 2.1.13 Een ruimte (X,τ) heet **separabel** als er een aftelbare $Y \subset X$ bestaat met $\overline{Y} = X$.

Lemma 2.1.14 *Zij $\{Y_i\}_{i \in I}$ een familie van deelverzamelingen van een ruimte X. Dan is $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$.*

Bewijs: Zij $x \in \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$ willekeurig en N een omgeving van x. Dan is $x \in \overline{Y_j}$ voor een zekere $j \in I$, dus is $Y_j \cap N \neq \emptyset$ volgens Lemma 2.1.9. In het bijzonder is $\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) \cap N \neq \emptyset$, dus volgt (weer met Lemma 2.1.9), dat $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$. $\square$

Definitie 2.1.15 Zij X, Y metrische ruimtes, $f : X \to Y$ een functie en $Z \subset X$. Dan heet Z **begrensd** als er een $x \in X$ en een $R > 0$ bestaan zodanig dat $Z \subset B(x, R)$. Verder heet f **begrensd** als $f(X) \subset Y$ begrensd is.

Definitie 2.1.16 Zij $Z \subset X$ niet-leeg en begrensd. Dan is $\operatorname{diam}(Z) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in Z\}$ de **diameter** van Z. Voor een begrensde functie $f : X \to Y$, is $\operatorname{diam}(f) := \operatorname{diam}(f(X))$ de **diameter** van f.

Voorbeeld 2.1.17 Zij X een metrische ruimte. Dan is $\operatorname{diam}(B(x, r)) \leq 2r$ voor elke $x \in X$, $r > 0$. Immers: $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < 2r$ voor alle $y, z \in B(x, r)$.

Definitie 2.1.18 Zij X een metrische ruimte, $Y \subset X$ en $x \in X$. Dan is $\operatorname{dist}(x, Y) := \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}$ de **afstand** van x tot Y.

Propositie 2.1.19 *Zij X een metrische ruimte en $Y \subset X$. Dan is de afbeelding dist: $X \to [0, \infty)$, $x \mapsto$dist(x, Y) continu.*

Bewijs: Zij $x \in X$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is voor elke $w \in B(x, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(w, Y) &= \inf_{y \in Y} d(w, y), \\
&\leq \inf_{y \in Y} d(w, x) + d(x, y), \\
&= d(w, x) + \inf_{y \in Y} d(x, y), \\
&< \operatorname{dist}(x, Y) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.20 *Zij $Y \subset X$ en $x \in X$. Dan zijn equivalent:*
(i) $x \in \overline{Y}$.
(ii) dist$(x, Y) = 0$.
(iii) $U \cap Y \neq \emptyset$ *voor elke open omgeving* U *van* x.

Bewijs: (i) ⇒ (ii) Omdat $x \in \overline{Y}$, is er een rij $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ in Y die naar x convergeert. Er geldt $\lim_{n \to \infty} d(x, y_n) = 0$, waaruit volgt dat $\operatorname{dist}(x, Y) = 0$.
(ii) ⇒ (iii) Zij U een open omgeving van x. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat $B(x, \varepsilon) \subset U$. Omdat $\operatorname{dist}(x, Y) = 0$, bestaat er een $y \in Y$ met $d(x, y) < \varepsilon$ en dus is $y \in B(x, \varepsilon)$, waaruit volgt dat $U \cap Y \neq \emptyset$.
(iii) ⇒ (i) Zie Propositie 2.1.9. □

2.1.4 Separatieaxioma's

Definitie 2.1.21 Zij (X, τ) een topologische ruimte. We noemen X:
- T_1 als er voor elke paar $x, y \in X$, $x \neq y$ een $U \in \tau$ bestaat zodanig dat $x \in U$, $y \notin U$.
- T_2 (**Hausdorff**) als er voor elk paar $x, y \in X$, $x \neq y$ disjuncte, $U, V \in \tau$ bestaan zodanig dat $x \in U$ en $y \in V$.
- T_3 (**regulier**) als X is T_1 en er verder voor elke gesloten $C \subset X$ en $y \in X \setminus C$ disjuncte, $U, V \in \tau$ bestaan zodanig dat $C \subset U$ en $y \in V$.
- T_4 (**normaal**) als X is T_1 en er verder voor elk paar disjuncte, $C, D \subset X$ disjuncte, $U, V \in \tau$ bestaan zodanig dat $C \subset U$ en $D \subset V$.

Propositie 2.1.22 *Er geldt:* $T_4 \underset{(i)}{\Rightarrow} T_3 \underset{(ii)}{\Rightarrow} T_2 \underset{(iii)}{\Rightarrow} T_1$.

Bewijs: Zij (X, τ) een topologische ruimte.
(i) Zij $C \subset X$ gesloten en niet-leeg en $y \in X \setminus C$. Omdat X T_1 is, is $\{y\}$ gesloten en dus bestaan er disjuncte, $U, V \in \tau$ zodanig dat $C \subset U$ en $\{y\} \subset V$.
(ii) Zij $x, y \in X$, $x \neq y$. Dan is $\{x\} \subset X$ gesloten (want X is T_1) en dus bestaan er disjuncte, $U, V \in \tau$ zodanig dat $\{x\} \subset U$ en $y \in V$.
(iii) Zij $x, y \in X$, $x \neq y$. Dan bestaan er disjuncte, $U, V \in \tau$ zodanig dat $x \in U$, $y \in V$. In het bijzonder is X dus T_1. □

Propositie 2.1.23 *Elke deelruimte Y van een Hausdorffruimte (X, τ) is Hausdorff.*

Bewijs: Voor $x, y \in Y$, $x \neq y$ bestaan er disjuncte $U, V \in \tau$ zodanig dat $x \in U$ en $y \in V$. Aangezien $U \cap Y, V \cap Y$ open zijn in Y en $x \in U \cap Y$, $y \in V \cap Y$, zien we dat Y Hausdorff is. $\square$

Propositie 2.1.24 *Voor een topologische ruimte (X, τ) zijn equivalent:*
(i) X is regulier.
(ii) Voor elke open omgeving U van $x \in X$ is er een $V \in \tau$ zodanig dat $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii) Zij $x \in X$ en U een open omgeving van x. Dan is $x \notin C := X \setminus U$ en dus bestaan er wegens de regulariteit van X disjuncte, open V, W zodanig dat $C \subset V$ en $x \in W$. Omdat $W \cap V = \emptyset$ volgt uit Propositie 2.1.10 dat $\overline{W} \cap V = \emptyset$ en dus is $\overline{W} \cap C = \emptyset$. Maar dat betekent dat $\overline{W} \subset X \setminus C = U$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Zij $C \subset X$ gesloten en $y \in X \setminus C$. Dan is $U := X \setminus C$ een open omgeving van y en dus bestaat er een $V \subset U$ zodanig dat $y \in V \subset \overline{V} \subset U$. Neem $W := X \setminus \overline{V} \in \tau$. Dan is $x \in V$, $C \subset W$ en $V \cap W = \emptyset$. $\square$

Propositie 2.1.25 *Elke metrische ruimte (X, d) is normaal.*

Bewijs: Zij $C, D \subset X$ gesloten en disjunct. Dan zien we dat voor elke $x \in C$ en $y \in D$ geldt: $\mathrm{dist}(x, D) > 0$ en $\mathrm{dist}(y, C) > 0$ wegens Propositie 2.1.9. Definieer

$$U := \bigcup_{x \in C} B\left(x, \frac{\mathrm{dist}(x, D)}{2}\right) \text{ en } V := \bigcup_{y \in D} B\left(y, \frac{\mathrm{dist}(y, C)}{2}\right).$$

Dan zijn U, V open en $C \subset U$, $D \subset V$. Veronderstel dat $z \in U \cap V$. Dan is $z \in B\left(x, \frac{\mathrm{dist}(x,D)}{2}\right)$ en $z \in B\left(y, \frac{\mathrm{dist}(y,C)}{2}\right)$ voor zekere $x \in C$, $y \in D$. Maar dan is $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\mathrm{dist}(x,D)}{2} + \frac{\mathrm{dist}(y,C)}{2} \leq \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x, y)$ en dat kan niet, dus $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Stelling 2.1.26 (Tietze) *Zij X een normale topologische ruimte en $C \subset X$ gesloten. Dan bestaat er voor elke continue $f : C \to \mathbb{R}$ een continue uitbreiding $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ zodanig dat $\overline{f}|_C = f$.*

Definitie 2.1.27 Een topologische ruimte (X, τ) heet **metriseerbaar** als er een metriek d op X bestaat zodanig dat $\tau = \tau_d$.

We geven nu de metriseerbaarheidsstelling van Urysohn, die we later geregeld zullen inzetten. Voor een bewijs kan de lezer onder andere terecht bij [1] en [8].

Stelling 2.1.28 (Urysohn) *Elke reguliere ruimte (X, τ) met tweede aftelbaarheidseigenschap is metriseerbaar.*

2.1.5 Bases

Definitie 2.1.29 Zij (X, τ) een topologische ruimte. Een familie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X heet een **basis** voor τ, als elke $U \in \tau$ te schrijven is als $U = \bigcup B_i$ voor zekere $B_i \in \mathcal{B}$.

Opmerking 2.1.30 Een $\mathcal{B} \subset 2^X$ is een basis voor $\tau \Leftrightarrow$ voor elke open omgeving U van een $x \in X$ bestaat er een $B \in \mathcal{B}$ zodanig dat $x \in B \subset U$.

Propositie 2.1.31 *Zij $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ een familie van deelverzamelingen van een verzameling X. Definieer $\tau := \{\bigcup_{i \in J} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, J \subset I\}$. Dan is τ een topologie op X (met basis $\mathcal{B}$), als:*
- *$\bigcup_{i \in I} B_i = X$,*
- *Voor elk paar $U, V \in \mathcal{B}$ is $U \cap V = \bigcup\{W \in \mathcal{B} \mid W \subset U \cap V\}$.*

Definitie 2.1.32 Een topologische ruimte (X, τ) heeft de **tweede aftelbaarheidseigenschap** als er een aftelbare basis $\mathcal{B}$ voor τ bestaat.

Propositie 2.1.33 *Als (X, τ) de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft, dan heeft elke deelruimte $Y \subset X$ deze ook.*

Bewijs: Zij $\mathcal{B}$ een aftelbare basis voor τ. Definieer $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$. Dan is $\mathcal{B}_Y$ zeker aftelbaar. Zij $U \in \tau_Y$. Dan is er een $V \in \tau$ zodanig dat $U = V \cap Y$ en omdat $\mathcal{B}$ een basis is voor τ, is $V = \bigcup B_i$ voor zekere $B_i \in \mathcal{B}$. Aangezien $U = \bigcup(B_i \cap Y)$, zien we dat $\mathcal{B}_Y$ een basis is voor τ_Y. $\square$

Propositie 2.1.34 *Als (X, τ) de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft, dan is X separabel.*

Bewijs: Zij $\mathcal{B}$ een aftelbare basis voor τ. Kies een $x_B \in B$ voor elke $B \in \mathcal{B}$. Dan is $Y := \{x_B \in X \mid B \in \mathcal{B}\}$ aftelbaar. Zij $y \in X$ willekeurig en U een open omgeving van y. Omdat U open is, bestaat er een $B \in \mathcal{B}$ zodanig dat $B \subset U$ en dus is $x_B \in U \cap Y$. Met Lemma 2.1.9 volgt dat $y \in \overline{Y}$ en dus is $\overline{Y} = X$. □

Propositie 2.1.35 *Elke separabele metrische ruimte (X, d) heeft de tweede aftelbaarheidseigenschap.*

Bewijs: Zij $Y \subset X$ aftelbaar zodanig dat $\overline{Y} = X$. Definieer $\mathcal{B} := \{B\left(y, \frac{1}{n}\right) \ |y \in Y, \, n \in \mathbb{N}\}$. Dan is $\mathcal{B}$ aftelbaar. Zij $U \in \tau$. Dan is er voor elke $y \in U$ een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $B\left(y, \frac{1}{n}\right) \subset U$. Maar nu is $\bigcup_{y \in U} B\left(y, \frac{1}{n}\right) = U$, waaruit volgt dat $\mathcal{B}$ een basis is voor τ. □

Gevolg 2.1.36 *Zij (X, d) een separabele metrische ruimte en $Y \subset X$. Dan is Y separabel.*

Bewijs: Omdat X separabel is, heeft deze de tweede aftelbaarheidseigenschap wegens Propositie 2.1.35. Volgens Propositie 2.1.33 heeft Y dan ook de tweede aftelbaarheidseigenschap en dus is Y separabel (Propositie 2.1.34). □

2.1.6 Netten

Definitie 2.1.37 Een **gerichte verzameling** is een paar $(I, \leq)$, waarbij $\leq \subset I \times I$ voldoet aan:

- (Reflexiviteit) $x \leq x$ voor elke $x \in I$.
- (Transitiviteit) Als $x \leq y$ en $y \leq z$ dan $x \leq z$.
- (Gerichtheid) Voor elke $x, y \in I$ bestaat er een $z \in I$ zodanig dat $x \leq z$ en $y \leq z$.

Definitie 2.1.38 Zij (X, τ) een topologische ruimte en I een gerichte verzameling. Een **net** in X is een afbeelding $I \to X$ $\iota \mapsto x_\iota$. We noteren netten als $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$.

Opmerking 2.1.39 Aangezien $(\mathbb{N}, \leq)$ een gerichte verzameling is, zijn rijen precies de netten geïndiceerd door $\mathbb{N}$.

Definitie 2.1.40 Zij $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ een net in X en $Y \subset X$. We noemen $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$:

- **vaak in** Y als er voor elke $\iota_0 \in I$ een $\iota \geq \iota_0$ bestaat zodanig dat $x_\iota \in Y$.
- **uiteindelijk in** Y als er een $\iota_0 \in I$ bestaat zodanig dat $x_\iota \in Y$ voor elke $\iota \geq \iota_0$.

Definitie 2.1.41 Zij $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ een net in (X, τ). Een $x \in X$ is een **acumulatiepunt** van $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ als $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ vaak in elke open omgeving U van x is. We zeggen dat $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ convergeert naar x als $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in elke open omgeving U van x is, notatie: $x_\iota \to x$.

Propositie 2.1.42 *Zij X, Y topologische ruimtes en $f : X \to Y$ een functie. Dan zijn equivalent:*

(i) f is continu.
(ii) Voor elk net $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ dat naar een $x \in X$ convergeert, convergeert $\{f(x_\iota)\}_{\iota \in I}$ naar $f(x)$.

Definitie 2.1.43 Een net $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ heet **universeel** als voor elke $Y \subset X$ geldt dat $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in Y is of uiteindelijk in $X \setminus Y$.

2.1.7 Constructies

Definitie 2.1.44 Voor een familie van verzamelingen $\{X_i\}_{i \in I}$ is de **directe som** gedefinieerd door:

$$X := \bigoplus_{i \in I} X_i = \{(i, x) \in I \times \bigcup_{i \in I} X_i \mid x \in X_i\}.$$

Verder is voor elke $i \in I$ de **inclusieafbeelding** $\iota_i : X_i \to X$ gedefinieerd door $\iota_i(x) := (i, x)$.

Definitie 2.1.45 Zij $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ de directe som van een familie van topologische ruimtes $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. De **directesomtopologie** op X is $\tau_\oplus := \{U \subset X \mid \iota_i^{-1}(U) \in \tau_i\}$. Voor een $U \in \tau_\oplus$ schrijven we vaak $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$ voor $U_i \in \tau_i$.

Notatie 2.1.46 Voor een eindige familie topologische ruimtes $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ schrijven we vaak $X = X_1 \oplus ... \oplus X_n$ voor de directe som.

Propositie 2.1.47 *De inclusieafbeeldingen $\iota_i : X_i \to X$ zijn continu, open en gesloten voor elke $i \in I$.*

Definitie 2.1.48 Voor een verzameling X en een equivalentie $\sim$ op X is het **quotiënt**:

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

De **quotiëntafbeelding** is de surjectie $q : X \to X/\sim$ gedefinieerd door $q(x) = [x]$.

Definitie 2.1.49 Zij (X, τ) een topologische ruimte en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan is de **quotiëntenruimte** $(X/\sim, \tau_\sim)$, waarbij $\tau_\sim := \{U \subset X \mid q^{-1}(U) \in \tau\}$.

Propositie 2.1.50 *Voor elke quotiëntenruimte is de quotiëntafbeelding continu.*

Definitie 2.1.51 Voor een familie van verzamelingen $\{X_i\}_{i \in I}$ is het **product** gedefinieerd door:

$$X := \prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} x_i \mid f(i) \in X_i \text{ voor alle } i \in I\}.$$

Verder is voor elke $i \in I$ de **projectieafbeelding** $p_i : X \to X_i$ gedefinieerd door $p_i(f) := f(i)$.

Definitie 2.1.52 Zij $X = \prod_{i \in I} X_i$ het product van een familie van topologische ruimtes $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. De **producttopologie** op X is τ_Π gedefinieerd door de basis $\mathcal{B}_\Pi := \{p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \mid i_1, ..., i_n \in I, U_{i_j} \in \tau_{i_j} \text{ voor } j = 1, ..., n\}$.

Notatie 2.1.53 Voor een eindige familie topologische ruimtes $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ schrijven we vaak $X = X_1 \times ... \times X_n$ voor het product.

Opmerking 2.1.54 Voor een eindig product $X = X_1 \times ... \times X_n$ is de bovenstaande basis van τ_Π gelijk aan $\mathcal{B}_\Pi = \{U_1 \times ... \times U_n \mid U_i \in \tau_i\}$. Elke gesloten deelverzameling C van $X_1 \times ... \times X_n$ is van de vorm $C = \bigcap (C_1 \times ... \times C_n)$ voor gesloten $C_i \subset X_i$.

Propositie 2.1.55 *De projectieafbeeldingen $p_i : X \to X_i$ zijn allen continu en open.*

Propositie 2.1.56 *Als (X, τ) en (Y, σ) de tweede aftelbaarheidseigenschap hebben, dan heeft $(X \times Y, \tau_\Pi)$ deze ook.*

Bewijs: Zij $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ aftelbare bases voor τ, respectievelijk σ. Dan is $\mathcal{B}_\Pi := \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$ een aftelbare basis voor τ_Π gezien Opmerking 2.1.54. □

Propositie 2.1.57 *Het product van twee reguliere ruimtes (X, τ),(Y, σ) is regulier.*

Bewijs: Zij U een open omgeving van $(x, y) \in X \times Y$. Dan volgt uit Propositie 2.1.55 dat $U_1 := p_1(U)$, $U_2 := p_2(U)$ open omgevingen van x respectievelijk y zijn. Met Propositie 2.1.24 bestaan er $V_1 \in \tau$ en $V_2 \in \sigma$ zodanig dat $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$ en $y \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset U_2$. Nu zien we dat voor $V := p_1^{-1}(V_1) \cap p_2^{-1}(V_2)$ geldt: $(x, y) \subset V \subset \overline{V} \subset U$ en dus volgt uit Propositie 2.1.24 dat $X \times Y$ regulier is. □

Gevolg 2.1.58 *Het product van twee metrische ruimtes X, Y met de tweede aftelbaarheidseigenschap is metriseerbaar.*

Bewijs: Uit Propositie 2.1.25 volgt dat X en Y regulier zijn en dus is $X \times Y$ regulier (Propositie 2.1.57). Uit Propositie 2.1.56 volgt dat $X \times Y$ de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft en dus is $X \times Y$ metriseerbaar volgens Stelling 2.1.28. □

Opmerking 2.1.59 In feite is elk aftelbaar product van willekeurige metrische ruimtes metriseerbaar, maar omdat Propositie 2.1.58 reeds onze belangen behartigt en met een veel korter argument te bewijzen is, gaan we hier niet verder op in.

2.2 Compactheid

In deze sectie kijken we naast algemene compactheid ook naar lokale compactheid, σ-compactheid en volledigheid. Belangrijke stellingen zijn de stelling van Tychonov, de doorsnijdingsstelling van Cantor en de stelling van Heine-Borel.

2.2.1 Compactheid

Definitie 2.2.1 Een topologische ruimte (X, τ) heet **compact** als elke open overdekking van X een eindige deeloverdekking heeft.

De volgende karakterisering van compactheid is erg nuttig:

Propositie 2.2.2 *Een topologische ruimte (X, τ) is compact $\Leftrightarrow$ elk universeel net $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ heeft een convergent deelnet.*

Propositie 2.2.3 *Zij $K_1, ..., K_n \subset X$ compact. Dan is $K \coloneqq \bigcup_{i=1}^n K_i$ compact.*

Bewijs: Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van K. Dan is $\mathcal{U}$ in het bijzonder een open overdekking van elke K_i. Vanwege de compactheid van K_i, zijn er voor elke i $U_{i_1}, ..., U_{i_{m_i}} \in \mathcal{U}$ zodanig dat $K_i \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{i_j}$. Maar dan is $K \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{i_j}$, waaruit volgt dat $\{U_{i_j}\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$ van K is, dus K is compact. $\square$

Propositie 2.2.4 *Zij (X, τ) compact en $K \subset X$ gesloten. Dan is K compact.*

Bewijs: Zij $\{U_i\}_{i \in I}$ een open overdekking van K. Dan is $X \backslash K$ open, dus $\{X \backslash K\} \cup \{U_i\}_{i \in I}$ is een open overdekking van X en die heeft vanwege de compactheid van X een eindige deeloverdekking $\{X \setminus K\} \cup \{U_{i_j}\}_{j=1}^n$. We zien dat $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$ een eindige deeloverdekking van de oorspronkelijke overdekking $\{U_i\}_{i \in I}$ van K is, waaruit volgt dat K compact is. $\square$

Propositie 2.2.5 *Zij (X, τ) Hausdorff en $K \subset X$ compact. Dan is K gesloten.*

Bewijs: Zij $x \in X \backslash K$ willekeurig. Omdat X Hausdorff is, bestaan er voor elke $y \in K$ disjuncte, $U_y, V_y \in \tau$ zodanig dat $x \in U_y$ en $y \in V_y$. Nu is $\{V_y\}_{y \in K}$ een open overdekking van K en dus zijn er $y_1, ..., y_n \in K$ zodanig dat $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Zij $U \coloneqq \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. Dan is U open en $U \cap K = \emptyset$ en dus is $x \subset U \subset X \setminus K$. Hieruit volgt dat $X \setminus K$ open is en dus is $K \subset X$ gesloten. $\square$

Gevolg 2.2.6 *Zij (X, d) een metrische ruimte en $K \subset X$. Dan is K compact $\Leftrightarrow$ K gesloten is.*

Propositie 2.2.7 *Zij (X, τ) Hausdorff, $C \subset X$ gesloten en $K \subset X$ compact. Dan is $K \cap C$ compact.*

Bewijs: K is compact en dus gesloten wegens Propositie 2.2.5. Omdat $K \cap C$ gesloten is volgt met Propositie 2.2.4 dat $K \cap C$ compact is. $\square$

Propositie 2.2.8 *Zij X, Y topologische ruimtes, $f : X \to Y$ continu en $K \subset X$ compact. Dan is $f(K) \subset Y$ compact.*

Bewijs: Zij $\{U_i\}_{i \in I}$ een open overdekking van $f(K)$. Dan is $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ een open overdekking van K, die vanwege de compactheid van K een eindige deeloverdekking $\{f^{-1}(U_{i_j})\}_{j=1}^n$ heeft. Nu is $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$ een open overdekking van $f(K)$ en daarmee een eindige deeloverdekking van $\{U_i\}_{i \in I}$. Hieruit volgt dat $f(K)$ compact is. $\square$

Gevolg 2.2.9 *Zij X, Y topologische ruimtes, X compact, Y Hausdorff en $f : X \to Y$ continu. Dan is f gesloten.*

Bewijs: Zij $K \subset X$ gesloten. Dan is K compact volgens Propositie 2.2.4 en dus is $f(K) \subset Y$ compact met Propositie 2.2.8. Uit Propositie 2.2.5 volgt dat $f(K)$ gesloten is in Y, dus is f gesloten. $\square$

Gevolg 2.2.10 *Zij X, Y topologische ruimtes, X compact, Y Hausdorff en $f : X \to Y$ een continue bijectie. Dan is f een homeomorfisme.*

Bewijs: Zij $g = f^{-1}$. Uit Gevolg 2.2.9 volgt dat g continu is en dus is f een homeomorfisme. $\square$

Propositie 2.2.11 *Zij (X, τ) een compacte topologische ruimte en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan is de quotiëntenruimte $X/\sim$ ook compact.*

Bewijs: De quotiëntafbeelding $q : X \to X/\sim$ is een continue surjectie. Met Propositie 2.2.8 volgt dat $X/\sim$ compact is. $\square$

De volgende stelling geven we zonder bewijs. Een uitgebreide behandeling van deze stelling is te vinden in [1], waar vier verschillende bewijzen aan bod komen.

Stelling 2.2.12 (Tychonov) *Zij $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ een familie van compacte topologische ruimtes. Dan is $\prod_{i\in I} X_i$ compact.*

Propositie 2.2.13 *Elke compacte metrische ruimte (X, d) is separabel.*

Bewijs: Zij $\mathcal{U}_n := \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X\}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{U}_n$ is een open overdekking van X en dus volgt uit de compactheid dat er $x_1^{(n)}, ..., x_{m_n}^{(n)}$ bestaan zodanig dat $\bigcup_{k=1}^{m_n} B(x_k^{(n)}, \frac{1}{n}) = X$ voor elke n. Definieer $Y := \{x_k^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \le k \le m_n\}$. We laten zien dat $\overline{Y} = X$. Zij $x \in X$ willekeurig. Dan bestaat er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $x_k^{(n)} \in Y$ zodanig dat $x \in B(x_k^{(n)}, \frac{1}{n})$. Omdat $d(x_k^{(n)}, x) < \frac{1}{n}$ voor elke n, zien we dat de rij $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ naar x convergeert. Hiermee is $\overline{Y} = X$, waaruit volgt dat X separabel is. $\square$

Gevolg 2.2.14 *Elke compacte metrische ruimte (X, d) heeft de tweede aftelbaarheidseigenschap.*

Propositie 2.2.15 *Zij (X, τ) Hausdorff en $K, L \subset X$ niet-leeg, disjunct en compact. Dan bestaan er disjuncte open U, V zodanig dat $K \subset U$, $L \subset V$.*

Bewijs: Zij $y \in K$ vast. Dan bestaan er voor elke $x \in X$ twee disjuncte open U_x, V_x zodanig dat $x \in U_x$ en $y \in V_x$. Omdat K compact is, bestaan er $x_1, ..., x_n \in K$ zodanig dat $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Definieer $U_y := \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ en $V_y := \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{x_i}$. Dan zijn U_y, V_y disjuncte open verzamelingen met $K \subset U_y$ en $y \in V_y$. Dit kunnen we doen voor elke $y \in L$ en uit de compactheid van L volgt dan dat er $y_1, ..., y_m \in L$ zijn zodanig dat $L \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{y_i}$. Definieer $V := \bigcup_{i=1}^{m} V_{y_i}$ en $U := \bigcap_{i=1}^{m} U_{y_i}$. Dan zijn $U, V \in \tau$ disjunct en $K \subset U$, $L \subset V$. $\square$

Propositie 2.2.16 *Elke compacte Hausdorffruimte (X, τ) is normaal.*

Bewijs: Zij $C, D \subset X$ gesloten en disjunct. Dan zijn C, D compact en dus bestaan er volgens Propositie 2.2.15 disjuncte, open U, V zodanig dat $C \subset U$ en $D \subset V$, met andere woorden: X is normaal. $\square$

Gevolg 2.2.17 *Zij (X, τ) compact Hausdorff. Dan zijn equivalent:*
(i) X heeft de tweede aftelbaarheidseigenschap.
(ii) X is metriseerbaar.

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii) Uit Propositie 2.2.16 volgt dat X normaal is en dus zien we met Stelling 2.1.28 dat X metriseerbaar is.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Elke compacte metrische ruimte heeft de tweede aftelbaarheidseigenschap wegens Propositie 2.2.14. $\square$

2.2.2 Lokale compactheid

Definitie 2.2.18 Een topologische ruimte (X, τ) heet **lokaal compact** als iedere $x \in X$ een compacte omgeving heeft.

Opmerking 2.2.19 Elke compacte ruimte is duidelijk lokaal compact, maar de omkering geldt niet: $\mathbb{R}$ is lokaal compact, maar niet compact.

Propositie 2.2.20 *Zij (X, τ) lokaal compact en Hausdorff en $U \subset X$ open. Dan is U lokaal compact.*

Bewijs: Zij $x \in U$ willekeurig en $K \subset X$ een compacte omgeving van x. Bepaal met Lemma 2.1.24 een open V zodanig dat $x \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Met Propositie 2.2.7 is $\left(K \cap \overline{V}\right) \subset U$ een compacte omgeving van x in U, waaruit volgt dat U lokaal compact is. $\square$

Propositie 2.2.21 *Zij (X, τ) lokaal compact en Hausdorff en $C \subset X$ gesloten. Dan is C lokaal compact.*

Bewijs: Zij $x \in C$ willekeurig. Omdat X lokaal compact is, bestaat er een compacte $K \subset X$ die x bevat. Vanwege Propositie 2.2.7 is $K \cap C \subset C$ compact, waaruit volgt dat C lokaal compact is. $\square$

Gevolg 2.2.22 *Zij (X,τ) lokaal compact en Hausdorff. Dan heeft elke $x \in X$ een omgevingsbasis van compacte verzamelingen.*

Bewijs: Zij $x \in X$ willekeurig en U een open omgeving van x. U is lokaal compact volgens Propositie 2.2.20 en dus bestaat er een compacte $K \subset X$ zodat $x \in K \subset U$. $\square$

Propositie 2.2.23 *Zij X lokaal compact en $K \subset X$ compact. Dan bestaan er $U, L \subset X$ zodanig dat U open is, L compact en $K \subset U \subset L$.*

Bewijs: Voor elke $x \in K$ hebben we een open U_x en een compacte L_x zodanig dat $x \in U_x \subset L_x$. Dan is $\{U_x\}_{x \in K}$ een open overdekking van K en dus bestaan er $x_1, ..., x_n \in K$ zodanig dat $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^n L_{x_i}$. Aangezien $U \coloneqq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ open is en $L \coloneqq \bigcup_{i=1}^n L_{x_i}$ compact (vanwege Propositie 2.2.3), zijn we klaar. $\square$

Lemma 2.2.24 *Zij (X,τ) lokaal compact en Hausdorff, $x \in X$ en N een omgeving van x. Dan is er een open $V \subset X$ zodanig dat $x \in V \subset \overline{V} \subset N$ en $\overline{V}$ compact is.*

Bewijs: Omdat X lokaal compact is, bestaat er een compacte omgeving $K \subset N$ die x bevat. Wegens Lemma 2.1.24 bestaat er een $V \in \tau$ zodanig dat $x \subset V \subset \overline{V} \subset K$. Omdat $\overline{V} \subset K$ gesloten is, volgt uit Propositie 2.2.4 dat $\overline{V}$ compact is. $\square$

Gevolg 2.2.25 *Elke lokaal compacte Hausdorffruimte (X,τ) is regulier.*

Bewijs: Voor elke open omgeving U van een $x \in X$ is er een $V \in \tau$ zodanig dat $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, met $\overline{V}$ compact. Uit Propositie 2.1.24 volgt dat X regulier is. $\square$

Lemma 2.2.26 *Zij (X,τ) lokaal compact. Dan is er voor elke compacte $K \subset X$ een compacte $L \subset X$ zodanig dat $K \subset L^\circ$.*

Bewijs: Vanwege de lokale compactheid van X is er voor elke $x \in K$ een compacte K_x en een open U_x zodanig dat $x \in U_x \subset K_x$. Omdat K compact is, bestaan er $x_1, ..., x_n \in K$ zodanig dat $K \subset U \coloneqq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Definieer $L \coloneqq \bigcup_{i=1}^n K_{x_i}$. Dan is L compact wegens Propositie 2.2.3 en er geldt: $K \subset U \subset L$, dus $K \subset L^\circ$. $\square$

Propositie 2.2.27 *Zij $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topologische ruimtes, X lokaal compact en $f : X \to Y$ continu en open. Dan is $f(X) \subset Y$ lokaal compact.*

Bewijs: Zij $y \in f(X)$ willekeurig en $x \in X$ zodanig dat $f(x) = y$. X is lokaal compact, dus x heeft een compacte omgeving K. Aangezien f continu is, volgt met Propositie 2.2.8 dat $f(K)$ compact is. Zij U open, zodanig dat $x \in U \subset K$. Aangezien f open is, volgt dat $f(U)$ open is en omdat $y \in f(U) \subset f(K) \subset f(X)$, zien we dat $f(K)$ een compacte omgeving van y is. $\square$

Propositie 2.2.28 *Zij $(X,\tau), (Y,\sigma)$ lokaal compacte ruimtes. Dan is $X \times Y$ ook lokaal compact.*

Bewijs: Zij $(x,y) \in X \times Y$. Dan bestaan er compacte $K \subset X$ en $L \subset Y$ en $U \in \tau$, $V \in \sigma$ zodanig dat $x \in U \subset K$ en $y \in V \subset L$. Omdat $K \times L$ compact is en $U \times V$ open is in $X \times Y$, zien we dat $K \times L$ een compacte omgeving van (x,y) is en dus is $X \times Y$ lokaal compact. $\square$

Definitie 2.2.29 Een deelruimte $Y \subset X$ heet **lokaal gesloten** als er een open $U \subset X$ en een gesloten $C \subset X$ bestaan, zodanig dat $Y = U \cap C$.

Propositie 2.2.30 *$Y \subset X$ is lokaal gesloten $\Leftrightarrow$ Y is open in $\overline{Y}$.*

Bewijs: ($\Rightarrow$) Veronderstel dat $Y = U \cap C$ voor een open U en een gesloten C. Per definitie van de afsluiting is $\overline{Y} \subset C$. Maar dan is $Y = U \cap C \supset U \cap \overline{Y} \supset Y$, waaruit volgt dat Y open is in $\overline{Y}$.
($\Leftarrow$) Als $Y \subset \overline{Y}$ open is, bestaat er een open $U \subset X$ die voldoet aan $Y = U \cap \overline{Y}$. Aangezien $\overline{Y}$ gesloten is zien we dat Y lokaal gesloten is. $\square$

Lemma 2.2.31 *Zij (X,τ) een Hausdorffruimte en $Y \subset X$ dicht en lokaal compact. Dan is $Y \in \tau$.*

Bewijs: Veronderstel dat Y niet open is. Dan bestaat er een $y \in Y$ zodanig dat voor elke $U \in \tau$ geldt: $U \not\subset Y$. Omdat

Y lokaal compact is, bestaat er een compacte K en een $U \in \tau$ zodanig dat $y \in U \cap Y \subset K \subset Y$. Dan is $U \setminus K \neq \emptyset$, aangezien $U \not\subset Y$. Maar nu is $U \setminus K \in \tau$ en dus is $(U \setminus K) \cap Y \neq \emptyset$, omdat $Y \subset X$ dicht is (zie Gevolg 2.1.10). Dit is in tegenspraak met de aanname dat $U \cap Y$ een deelverzameling is van K en dus zien we dat Y open moet zijn. $\square$

Propositie 2.2.32 *Zij X een lokaal compacte Hausdorffruimte en $Y \subset X$. Dan is Y lokaal compact $\Leftrightarrow$ Y is lokaal gesloten.*

Bewijs: ($\Rightarrow$) Omdat Y lokaal compact is en dicht in zijn afsluiting, volgt uit Lemma 2.2.31 dat Y open is in $\overline{Y}$ Met Propositie 2.2.30 zien we dat Y lokaal gesloten is.
($\Leftarrow$) Zij $Y = U \cap C$ voor een open $U \subset X$ en een gesloten $C \subset X$. U is lokaal compact vanwege Propositie 2.2.20 en C ook, wegens Propositie 2.2.21. Zij $y \in Y$ en K een compacte omgeving van y in U en L een compacte omgeving van y in C. Dan is $K \cap L$ een compacte omgeving van y in $U \cap C$ en dus zien we dat Y lokaal compact is. $\square$

Definitie 2.2.33 Een ruimte (X, τ) heet **σ-compact** als $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ voor compacte K_n.

Propositie 2.2.34 *Zij (X, τ) een lokaal compacte Hausdorffruimte met de tweede aftelbaarheidseigenschap. Dan is X σ-compact.*

Bewijs: Zij $\mathcal{B}$ een aftelbare basis voor τ en $x \in X$. Voor elke open omgeving U van x bestaat er volgens Lemma 2.2.24 een open V met compacte afsluiting zodanig dat $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Omdat $\mathcal{B}$ een basis is, bestaat er een $B_x \in \mathcal{B}$ zodanig dat $x \in B_x \subset V$. Omdat $\overline{B_x}$ gesloten is in $\overline{V}$, is $\overline{B_x}$ compact. We zien dus dat $x \in B_x \subset \overline{B_x} \subset U$. Aangezien $\bigcup_{x \in X} \overline{B_x} = X$ en $\{B_x\}_{x \in X} \subset \mathcal{B}$ is, volgt uit de aftelbaarheid van $\mathcal{B}$ dat X inderdaad σ-compact is. $\square$

Propositie 2.2.35 *Elke σ-compacte metrische ruimte (X, d) is separabel.*

Bewijs: Zij $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ compact zodat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = X$. Dan is er met Propositie 2.2.13 voor elke n een aftelbare $Y_n \subset K_n$ zodanig dat $\overline{Y_n} = K_n$. Nu is $Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ aftelbaar en er geldt:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{Y_n} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n} = \overline{Y} \subset X,$$

en dus is X separabel. $\square$

2.2.3 Volledigheid

Definitie 2.2.36 Een metrische ruimte (X, d) heet **volledig** als elke Cauchyrij convergeert in X.

Propositie 2.2.37 *Zij X volledig en $C \subset X$ gesloten. Dan is C volledig.*

Bewijs: Een Cauchyrij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in C is convergent in X, omdat X volledig is. Aangezien C al zijn limietpunten bevat, volgt dat $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ook convergeert in C. $\square$

Voorbeeld 2.2.38 Open deelverzamelingen van volledige ruimtes hoeven niet volledig te zijn. Zo is $U := (0, 2) \subset \mathbb{R}$ open, maar de Cauchyrij $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert niet in U.

Stelling 2.2.39 (Cantor) *Zij X een volledige metrische ruimte en $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij niet-lege gesloten deelverzamelingen van X, zodat $K_1 \supset K_2 \supset ...$ en $\operatorname{diam}(K_n) \to 0$ voor $n \to \infty$. Dan is $\#(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) = 1$.*

Bewijs: We laten eerst zien dat $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Kies voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $x_n \in K_n$. De rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchyrij, immers: voor een willekeurige $\varepsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$: $\operatorname{diam}(K_n) < \varepsilon$, dus is voor $n, m \geq N$: $d(x_n, x_m) \leq \sup \{d(x, y) \mid x, y \in K_N\} < \varepsilon$. Omdat X volledig is, is $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent; laat $x := \lim_{n \to \infty} x_n$ zijn. We laten zien dat $x \in K$: Voor elke $m \in \mathbb{N}$ is $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$ een convergente rij in K_m die naar x convergeert. K_m is gesloten, waaruit volgt dat $x \in K_m$ voor elke m en dus inderdaad $x \in K$. Ten slotte: stel $x, y \in K$. Dan $x, y \in K_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dus $d(x, y) \leq \operatorname{diam}(K_n) \to 0$. Hieruit volgt dat $d(x, y) = 0$ en dus $x = y$. We zien dat $\#(K) = 1$. $\square$

Gevolg 2.2.40 *Zij (X, d) lokaal compact en volledig. Dan zijn er voor elke $x \in X$ compacte $K_1, K_2, ... \subset X$ zodanig dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.*

Bewijs: Elke $x \in X$ heeft een omgevingsbasis van compacte verzamelingen, dus voor elke $n \in \mathbb{N}$ is er een compacte $K_n \subset X$ die x bevat zodanig dat $K_n \subset B(x, 2^{-n})$. We kunnen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $K_1 \supset K_2 \supset ....$ Met Stelling 2.2.39 volgt dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$. □

Definitie 2.2.41 Zij (X, d) een metrische ruimte. We noemen X **rijcompact** als elke rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X een convergente deelrij heeft.

Definitie 2.2.42 Een metrische ruimte (X, d) heet **totaal begrensd** als er voor elke $r > 0$ een eindig aantal $x_1, ..., x_n \in X$ bestaan zodanig dat $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$.

Stelling 2.2.43 *Zij (X, d) een metrische ruimte. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*
(i) X is compact,
(ii) X is rijcompact,
(iii) X is volledig en totaal begrensd.

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii) Zij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in X zonder convergente deelrij. Dan heeft $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ geen limietpunten en dus is er voor elke $y \in X$ een open omgeving U_y zodanig dat $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_y\}$ eindig is. Omdat X compact is, bestaan er $y_1, ..., y_n \in X$ zodanig dat $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Maar dan heeft de rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ slechts eindig veel verschillende elementen, wat in tegenspraak is met het ontbreken van een limietpunt. Hieruit volgt dat $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij moet hebben.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchyrij in X. Vanwege de rijcompactheid van X heeft $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$; zij $x := \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig en bepaal $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ zodanig dat:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ voor alle } n, m > N_1,$$
$$d(x_{n_j}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ voor alle } j > N_2.$$

Zij $j > \max\{N_1, N_2\}$. Dan is $n_j \geq j$ en er geldt:

$$d(x_j, x) \leq d(x_j, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

waaruit volgt dat $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ook naar x convergeert. we zien dus dat X volledig is. Veronderstel dat X niet totaal begrensd is. Dan bestaat er een $r > 0$ zodanig dat $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r) \subsetneq X$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke $x_1, ..., x_n \in X$. Zij $x_1 \in X$ willekeurig. Kies een $x_2 \in X \setminus B(x_1, r)$, $x_3 \in X \setminus (B(x_1, r) \cup B(x_2, r))$, etc. Dit geeft een rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, met $d(x_n, x_m) \geq r$ voor elke $n, m \in \mathbb{N}$. Maar dan heeft $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ geen convergente deelrij, wat in tegenspraak is met de aanname dat X rijcompact is. Hieruit volgt dat X totaal begrensd moet zijn.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Veronderstel dat $\{U_i\}_{i\in I}$ een open overdekking is van X zonder eindige deeloverdekking. Omdat X totaal begrensd is, bestaan er $x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)} \in X$ zodanig dat $X = \bigcup_{j=1}^{n_1} B(x_j^{(1)}, \frac{1}{2})$. Dan is er een $k_1 \in \{1, ..., n_1\}$ zodanig dat $B(x_{k_1}^{(1)}, \frac{1}{2})$ niet overdekt kan worden door een eindig aantal U_i's. Noem $x^{(1)} = x_{k_1}^{(1)}$. Dan is $B(x^{(1)}, \frac{1}{2})$ totaal begrensd en dus bestaan er $x_1^{(2)}, ..., x_{n_2}^{(2)}$ zodanig dat $B(x^{(1)}, \frac{1}{2}) = \bigcup_{j=1}^{n_2} B(x_j^{(2)}, \frac{1}{4})$. Wederom is er een k_2 zodanig dat $B(x_{k_2}^{(2)}, \frac{1}{4})$ niet overdekt kan worden door een eindig aantal U_i's, noem $x^{(2)} = x_{k_2}^{(2)}$. Dit proces kunnen we itereren en dit geeft een Cauchyrij $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ zodanig dat elke $B(x^{(n)}, \frac{1}{n+1})$ niet overdekbaar is door een eindig aantal U_i's. Vanwege de volledigheid van X is er een $x \in X$ zodanig dat $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$. Voor x bestaat er een $i \in I$ zodanig dat $x \in U_i$ en dus kunnen we een $\varepsilon > 0$ vinden zodanig dat $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Bepaal een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ en $d(x, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dan is:

$$B\left(x^{(N)}, \frac{1}{N+1}\right) \subset B\left(x^{(N)}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i,$$

wat in tegenspraak is met de veronderstelling dat $B(x^{(N)}, \frac{1}{N+1})$ niet overdekbaar is door een eindig aantal U_i's. Hieruit volgt dat X compact moet zijn. □

Stelling 2.2.44 (Lebesgue) *Zij X een compacte metrische ruimte en $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Dan is er een $\lambda > 0$ zodanig dat er voor elke $Y \subset X$ met $\operatorname{diam}(Y) < \lambda$ een $U \in \mathcal{U}$ bestaat met $Y \subset U$.*

Bewijs: Voor elke $x \in X$ is er een $U_x \in \mathcal{U}$ zodanig dat $x \in U_x$. Bepaal voor iedere x een $\lambda_x > 0$ zodat $B(x, 2\lambda_x) \subset U_x$. Dan is $\{B(x, \lambda_x)\}_{x\in X}$ een open overdekking van X, dus bestaan er $x_1, ..., x_n$ zodanig dat $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \lambda_{x_i}) = X$. Neem nu $\lambda := \min_{i=1,..,n}(\lambda_{x_i}) > 0$ en zij $Y \subset X$ zodanig dat $\operatorname{diam}(Y) < \lambda$. Zij $y \in Y$ willekeurig. Dan is er een x_i zodanig dat $y \in B(x_i, \lambda_{x_i})$ en dus is $B(y, \lambda) \subset B(x_i, 2\lambda_{x_i})$, want voor $z \in B(y, \lambda)$ is $d(z, x_i) \leq d(z, y) + d(y, x_i) < \lambda + \lambda_{x_i} \leq 2\lambda_{x_i}$. We zien dat $Y \subset B(y, \lambda) \subset B(x_i, 2\lambda_{x_i}) \subset U_{x_i}$. □

Definitie 2.2.45 Bovenstaande $\lambda > 0$ heet een **Lebesguegetal** van $\mathcal{U}$.

Stelling 2.2.46 (Heine-Borel) *Een deelverzameling $K \subset \mathbb{R}^n$ is compact $\Leftrightarrow$ K is gesloten en begrensd.*

Bewijs: ($\Rightarrow$) Zij $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Dan is K gesloten wegens Propositie 2.2.5. Verder heeft de open overdekking $\{B(x,1)\}_{x\in K}$ van K een eindige deeloverdekking $\{B(x_1,1),...,B(x_n,1) \mid x_i \in K \text{ voor alle } i\}$. Nu is $K \subset B(x_1, m+1)$, met $m = \max_{1\leq i\leq n}\{d(x_1,x_i)\}$ (omdat voor een willekeurige $y \in K$ geldt $y \in B(x_j,1)$ voor een zekere j) en dus is:

$$d(x_1,y) \leq d(x_1,x_j) + d(x_j,y) \leq m+1.$$

($\Leftarrow$) Een gesloten interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ is compact, dus volgt uit Stelling 2.2.12 dat $[a,b]^n$ compact is. Omdat $K \subset \mathbb{R}^n$ begrensd is, is $K \subset [a,b]^n$ voor zekere $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. $[a,b]^n$ is volgens het bovenstaande gesloten in $\mathbb{R}^n$ en dus is K gesloten in $[a,b]^n$. Uit Propositie 2.2.4 volgt dat K compact is. $\square$

Opmerking 2.2.47 In het bewijs van ($\Leftarrow$) hebben we de stelling van Heine-Borel voor $n = 1$ gebruikt. Voor een bewijs daarvan, zie bijvoorbeeld [7].

Voorbeeld 2.2.48 Zij X, Y metrische ruimtes. Dan is $C_b(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ begrensd en continu}\}$, met $d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$ een metrische ruimte.

Stelling 2.2.49 *Zij X, Y metrische ruimtes, zodat Y volledig is. Dan is $C_b(X,Y)$ volledig.*

Bewijs: Zij $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ een Cauchyrij in $C_b(X,Y)$. Dan is voor elke $x \in X$ de rij $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ een Cauchyrij in Y en dus volgt uit de volledigheid van Y dat $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ convergeert. Definieer daarom $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor iedere $x \in X$. We moeten laten zien dat $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ naar f convergeert met betrekking tot d_∞. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig en bepaal een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n, m \geq \mathbb{N}$ geldt: $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$. Dan is voor alle $n \geq N$:

$$d_\infty(f,f_n) = \sup_{x\in X} d(f(x),f_n(x)) = \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in X} d(f_m(x),f_n(x)) < \lim_{m\to\infty} \varepsilon = \varepsilon$$

We moeten nu nog laten zien dat f daadwerkelijk in $C_b(X,Y)$ zit. Zij daarvoor weer $\varepsilon > 0$ en $x \in X$ willekeurig. Kies een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d_\infty(f,f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ voor alle $n \geq \mathbb{N}$ en bepaal een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $y \in X$ met $d(x,y) < \delta$ geldt: $d(f_N(x),f_N(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &\leq d(f(x),f_N(x)) + d(f_N(x),f_N(y)) + d(f_N(y),f(y)) \\ &\leq d_\infty(f,f_N) + d(f_N(x),f_N(y)) + d_\infty(f_N,f) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

voor alle $y \in B(x,\delta)$, dus f is continu. Verder is f begrensd, aangezien:

$$d(f(x),y) \leq d(f(x),f_N(x)) + d(f_N(x),y) < \frac{\varepsilon}{3} + M$$

voor een $y \in Y$ met $\sup_{x\in X} d(f_N(x),y) < M$. Hiermee zien we dat $f \in C_b(X,Y)$ en dus is $C_b(X,Y)$ volledig. $\square$

Propositie 2.2.50 *Zij X compact en $f : X \to Y$ continu. Dan is f uniform continu.*

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig en bepaal voor elke $x \in X$ een $\delta_x > 0$ zodanig dat voor alle $y \in B(x,\delta_x)$ geldt: $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. $\{B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)\}_{x\in X}$ is een open overdekking van X en dus bestaan er $x_1,...,x_n \in X$ zodanig dat $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}) = X$. Zij $\delta := \min_{i=1,...,n} \frac{\delta_{x_i}}{2}$ en $x, y \in X$ willekeurig. Dan is er een $i \in \{1,...,n\}$ zodanig dat $x \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$ en omdat $d(x_i,y) \leq d(x_i,x) + d(x,y) < \delta_{x_i} + \delta < 2\frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}$, zien we dat $x, y \in B(x_i,\delta_{x_i})$, dus $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Hiermee is f uniform continu. $\square$

Definitie 2.2.51 Een **completering** van een metrische ruimte (X,d) is een metrische ruimte $(\hat{X},\hat{d})$ met een afbeelding $\iota : X \to \hat{X}$ zodanig dat:

- $(\hat{X},\hat{d})$ is volledig,
- ι is een isometrie,
- $\iota(X) \subset \hat{X}$ is dicht.

Stelling 2.2.52 *Elke metrische ruimte heeft een unieke completering.*

Definitie 2.2.53 Twee metrieken d, d' op een ruimte X zijn **equivalent** als $\tau_d = \tau_{d'}$.

Propositie 2.2.54 *Zij X een verzameling en d, d' twee metrieken op X. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*
(i) d en d' zijn equivalent.
(ii) Een rij $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ convergeert in (X, d) $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ convergeert in (X, d').

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii) Zij $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ een convergente rij in (X, d) en zij $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Voor elke $U \in \tau_{d'}$ is $U \in \tau_d$ en dus bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x_n \in U$ voor alle $n \geq N$. Hieruit volgt dat $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ook in (X, d') convergeert naar x. De andere kant op gaat net zo.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Zij $U \in \tau_d$ en $C := X \setminus U$. Als $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ een convergente rij in (C, d') is, dan is deze rij ook convergent in (C, d) en dus is $\lim_{n\to\infty} x_n \in C$. Hieruit volgt dat C gesloten is m.b.t. d' en dus is $U \in \tau_{d'}$. De omkering gaat op dezelfde wijze. $\square$

Propositie 2.2.55 *Zij X een volledige metrische ruimte en $U \subset X$ open. Dan is U volledig metriseerbaar, oftewel: er bestaat een metriek d' op U zodanig dat (U, d') volledig is en d' equivalent is aan d_U.*

Bewijs: Zij $f : U \to (0, \infty)$ de functie gedefinieerd door $f(x) := \frac{1}{\mathrm{dist}(x, X\setminus U)}$. Dan is f continu wegens Propositie 2.1.19. Definieer:

$$d'(x, y) := d(x, y) + |f(x) - f(y)|.$$

We laten eerst zien dat dit een metriek op U definieert:

- Het is duidelijk dat $d'(x, y) \geq 0$ voor alle $x, y \in U$. Stel $d'(x, y) = 0$. Dan is $d(x, y) = 0$ en dus $x = y$. Omgekeerd: als $x = y$, dan is $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = 0$ en dus is $d'(x, y) = 0$.
- $d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)| = d(y, x) + |f(y) - f(x)| = d'(y, x)$ voor alle x, y.
- Zij $x, y, z \in U$ willekeurig. Dan is:

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= d(x, y) + |f(x) - f(y)| \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) + |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \\ &= d'(x, y) + d'(y, z). \end{aligned}$$

Zij nu $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ een Cauchyrij in (U, d'). Dan is het ook een Cauchyrij in (U, d) en bovendien bestaat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt:

$$|f(u_n) - f(u_N)| = \left| \frac{1}{\mathrm{dist}(u_n, X \setminus U)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(u_N, X \setminus U)} \right| < \varepsilon,$$

waaruit volgt dat

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(u_n, X \setminus U)} \in \left[\frac{1}{\mathrm{dist}(u_N, X \setminus U)} - \varepsilon, \frac{1}{\mathrm{dist}(u_N, X \setminus U)} + \varepsilon \right],$$

voor elke $n \geq N$. Kies nu $\varepsilon > 0$ zo dat $\frac{1}{\mathrm{dist}(u_N, X\setminus U)} - \varepsilon > 0$. Dan is $\frac{1}{\mathrm{dist}(u_n, X\setminus U)} - \varepsilon > 0$ en dus is ook $\mathrm{dist}(u_n, X\setminus U) > 0$ voor alle $n \geq \mathbb{N}$. Bepaal een $\delta > 0$ zodanig dat $u_n \in U_\delta := \{x \in U \mid \mathrm{dist}(x, X \setminus U) \geq \delta\}$ voor elke $n \geq N$. We laten zien dat $U_\delta \subset U$ gesloten is. Zij $x \in \overline{U_\delta}$. Dan is $\mathrm{dist}(x, U) = 0$, dus is er voor elke $\alpha > 0$ een $y \in U_\delta$ met $d(x, y) < \alpha$. Hiermee zien we dat $\mathrm{dist}(x, X\setminus U) \geq \mathrm{dist}(y, X\setminus U) - d(x, y) \geq \delta - \alpha$. Omdat $\alpha > 0$ willekeurig gekozen was, volgt hieruit dat $\mathrm{dist}(x, X \setminus U) \geq \delta$ en dus is $x \in U_\delta$. We zien dat U_δ gesloten is en met Propositie 2.2.37 dus volledig. Hieruit volgt dat $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ convergeert in (U, d). Al met al hebben we laten zien dat elke Cauchyrij in (U, d') convergeert in (U, d). In het bijzonder convergeert ook elke convergente rij uit (U, d') in (U, d). Omgekeerd: als $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ een convergente rij is in (U, d) met $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, dan volgt uit de continuïteit van f dat $\lim_{n\to\infty} |f(u_n), f(u)| = 0$ en dus volgt dat $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ convergent in (U, d'). We zien dat d en d' equivalent zijn en dat (U, d') volledig is. $\square$

Stelling 2.2.56 *Elke lokaal compacte metrische ruimte X is volledig metriseerbaar.*

Bewijs: Met Stelling 2.2.52 heeft X een unieke completering $\hat{X}$; bekijk X als deelruimte van $\hat{X}$. X is lokaal compact en dus lokaal gesloten met de vorige propositie. Met Propositie 2.2.30 zien we dat X open is in $\overline{X} = \hat{X}$. Maar dan volgt uit Propositie 2.2.55 dat X volledig metriseerbaar is. $\square$

2.3 Samenhang en padsamenhang

We bespreken nu kort een aantal soorten samenhang van topologische en metrische ruimtes en in het bijzonder de relatie tussen samenhang en padsamenhang. We zullen bovendien zien dat elke samenhangende, lokaal compacte metrische ruimte σ-compact is.

2.3.1 Samenhang

Definitie 2.3.1 Een niet-lege ruimte (X, τ) heet **samenhangend** als voor elk paar niet-lege, open $U, V \in \tau$ met $U \cup V = X$ geldt: $U \cap V \neq \emptyset$.

Opmerking 2.3.2 We zien dat een ruimte (X, τ) samenhangend is $\Leftrightarrow$ voor elk paar niet-lege, gesloten $C, D \in \tau$ met $C \cup D = X$ geldt: $C \cap D \neq \emptyset$.

Propositie 2.3.3 *Zij $\{Y_i\}_{i \in I}$ een familie van samenhangende deelverzamelingen van (X, τ) met $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$. Dan is $Y \coloneqq \bigcup_{i \in I} Y_i$ samenhangend.*

Bewijs: Zij $y \in \bigcap_{i \in I} Y_i$ en U, V disjuncte, open deelverzamelingen van Y zijn, zodanig dat $U \cup V = Y$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $y \in U$ is. Uit de samenhang van Y_i volgt dat $Y_i \cap U = \emptyset$ of $Y_i \cap V = \emptyset$ voor elke $i \in I$. We weten echter dat $y \in Y_i \cap U$ is voor iedere i en dus moet elke $Y_i \cap V$ leeg zijn. We zien dat $V = \emptyset$ en dus is Y samenhangend. $\square$

Gevolg 2.3.4 *Zij $Y \subset X$ samenhangend. Dan is $\overline{Y}$ ook samenhangend.*

Bewijs: Stel dat $C, D \subset \overline{Y}$ gesloten zijn zodanig dat $C \cap D = \emptyset$. Dan zijn C, D ook gesloten in X (want $\overline{Y}$ is gesloten) en $Y \subset C \cup D$, waaruit volgt dat $Y \subset C$ of $Y \subset D$. Maar dan is $\overline{Y}$ ook bevat in C ofwel D, waaruit volgt dat een van de twee leeg moet zijn. $\square$

Definitie 2.3.5 Voor een $x \in Y \subset X$ is $C_Y(x) \coloneqq \bigcup\{Z \subset Y \mid Z \text{ samenhangend en } x \in Z\}$ de **samenhangscomponent** van x in Y. Als $Y = X$ schrijven we $C(x)$ in plaats van $C_X(x)$.

Propositie 2.3.6 *Twee samenhangscomponenten zijn gelijk of disjunct.*

Bewijs: Zij $x, y \in X$ en stel $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$. Dan is $C(x) \cup C(y)$ samenhangend volgens Propositie 2.3.3, dus is $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$ en $C(x) \cup C(y) \subset C(y)$, waaruit volgt dat $C(x) = C(y)$. $\square$

Propositie 2.3.7 *Samenhangscomponenten zijn samenhangend en gesloten.*

Bewijs: Zij $x \in X$ willekeurig. Uit Propositie 2.3.3 volgt direct dat $C(x)$ samenhangend is. Met Gevolg 2.3.4 is dus ook $\overline{C(x)}$ samenhangend, waarmee we zien dat $\overline{C(x)} \subset C(x)$ is en dus is $C(x)$ gesloten. $\square$

Gevolg 2.3.8 *X is samenhangend $\Leftrightarrow$ $C(x) = X$ voor alle $x \in X$.*

Bewijs: ($\Rightarrow$) Zij $x \in X$ willekeurig. Dan is $X \subset C(x)$ per definitie, dus $C(x) = X$.
($\Leftarrow$) Zij $x \in X$. Met Propositie 2.3.7 is $X = C(x)$ samenhangend. $\square$

Propositie 2.3.9 *Zij X samenhangend en $f : X \to Y$ continu. Dan is $f(X) \subset Y$ samenhangend.*

Bewijs: Zij $U \subset f(X)$ clopen en niet-leeg. Dan is $f^{-1}(U) \subset X$ clopen vanwege de continuïteit van f en niet-leeg en dus is $f^{-1}(U) = X$, vanwege de samenhang van X. Maar dan is $U = f(X)$, waaruit volgt dat $f(X)$ samenhangend is. $\square$

Propositie 2.3.10 *Zij (X, τ) een samenhangende topologische ruimte en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan is $X/\sim$ samenhangend.*

Bewijs: De projectieafbeelding $p : X \to X/\sim$ is continu en surjectief. Uit Propositie 2.3.9 volgt dat $X/\sim$ samenhangend is. $\square$

Propositie 2.3.11 *Zij $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topologische ruimtes en $A \subset X$, $B \subset Y$ samenhangend. Dan is $A \times B \subset X \times Y$ samenhangend.*

Bewijs: Voor elke $a \in A$ is $\{a\} \times B \cong B$ en dus samenhangend. Op dezelfde manier is $A \times \{b\}$ samenhangend voor elke $b \in B$. Zij $Y_a := (\{a\} \times B) \cup (A \times \{b\})$. Uit Propositie 2.3.3 volgt dat Y_a samenhangWe zullen met name kijken welke van deze vormen behouden blijven onder verschillende operaties, zoals het nemen van (open/gesloten) deelverzamelingen, productenend is voor elke a. Omdat $Y_a \cap Y_{a'} \neq \emptyset$, zien we dat ook $\bigcup_{a \in A} Y_a = A \times B$ samenhangt. □

2.3.2 Lokale samenhang

Definitie 2.3.12 Een niet-lege ruimte (X,τ) heet **lokaal samenhangend** als elke $x \in X$ een samenhangende omgevingsbasis heeft, oftewel: voor elke $x \in X$ en elke omgeving N van x is er een samenhangende $U \in \tau$ zodanig dat $x \in U \subset N$.

Propositie 2.3.13 *Zij X lokaal samenhangend en $U \subset X$ open. Dan is U lokaal samenhangend.*

Bewijs: Zij $x \in U$ willekeurig en V een open omgeving van x in U. Dan is V ook open in X en dus is er een samenhangende, open $W \subset V$ die x bevat. W is samenhangend en dus volgt dat U lokaal samenhangend is. □

Propositie 2.3.14 *Zij (X,τ) lokaal samenhangend. Dan is $C(x)$ is open voor elke $x \in X$.*

Bewijs: Zij $y \in C(x)$. Omdat X lokaal samenhangend is, bestaat er een samenhangende open omgeving U van y en er geldt $U \subset C(y) = C(x)$ (Propositie 2.3.6). Omdat dit kan voor elke $y \in C(x)$, volgt dat $C(x)$ open is. □

Gevolg 2.3.15 *Zij X lokaal samenhangend en compact. Dan heeft X eindig veel samenhangscomponenten.*

Bewijs: De samenhangscomponenten $\{C(x)\}_{x \in X}$ vormen een open overdekking van X wegens Propositie 2.3.14. Omdat X compact is, heeft deze een eindige deeloverdekking en dus volgt uit Propositie 2.3.6 dat het aantal samenhangscomponenten eindig moet zijn. □

Propositie 2.3.16 *Zij X lokaal samenhangend en separabel. Dan heeft X aftelbaar veel samenhangscomponenten.*

Bewijs: Zij $Y \subset X$ aftelbaar zodanig dat $\overline{Y} = X$. Voor elke $x \in X$ is $C(x) \cap Y \neq \emptyset$ vanwege Lemma 2.1.9. Zij $y \in C(x) \cap Y$. Dan is volgens Propositie 2.3.6 $C(x) = C(y)$ en dus is $\bigcup_{y \in Y} C(y) = X$, waaruit volgt dat het aantal samenhangscomponenten van X aftelbaar is. □

Lemma 2.3.17 *Zij X lokaal samenhangend en lokaal compact. Dan heeft elke $x \in X$ een samenhangende open omgeving U_x zodanig dat $\overline{U_x}$ compact is.*

Bewijs: Zij K een compacte omgeving van x. Omdat X lokaal samenhangend is, bestaat er een samenhangende open omgeving U_x van x. Aangezien $\overline{U_x} \subset K$ gesloten is, volgt met Propositie 2.2.4 dat $\overline{U_x}$ compact is. □

Propositie 2.3.18 *Zij X, Y topologische ruimtes, X lokaal samenhangend en $f : X \to Y$ continu en open. Dan is $f(X)$ lokaal samenhangend.*

Bewijs: Zij $y \in f(X)$, N een omgeving van y en zij $x \in X$ zodanig dat $f(x) = y$. Dan is $f^{-1}(N)$ een omgeving van x en dus is er een samenhangende, open $U \subset X$ die x bevat. Omdat f open en continu is, is $f(U)$ open en samenhangend en er geldt $y \in f(U) \subset N$. Hieruit volgt dat $f(X)$ lokaal samenhangend is. □

Propositie 2.3.19 *Zij X, Y topologische ruimtes, X lokaal samenhangend en $f : X \to Y$ continu en gesloten. Dan is $f(X)$ lokaal samenhangend.*

Bewijs: Zij $y \in f(X)$ willekeurig en U een open omgeving van y. Schrijf $V := f^{-1}(U)$ en definieer:

$$W = \bigcup_{x \in V} \{C_V(x) \mid C_V(x) \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\}$$

Nu is $f^{-1}(\{y\}) \subset W$ per constructie en vanwege Propositie 2.3.14 is W open. Verder is $f(W)$ samenhangend, want $f(W)$ is een vereniging van samenhangende verzameling die allen y bevatten. Er geldt:

$$y \in f(X) \setminus f(X \setminus W) \subset f(W) \subset C_U(y) \subset U$$

en $f(X) \setminus f(X \setminus W)$ is open, aangezien W open is en f gesloten. Hieruit volgt dat $y \in C_U(y)^\circ$. Uit Propositie 2.3.6 volgt dat dit geldt voor elke $w \in C_U(y)$ en dus is deze open (in U, maar ook in $f(X)$). Omdat dit opgaat voor elke samenhangscomponent, volgt met Propositie 2.3.14 dat $f(X)$ lokaal samenhangend is. $\square$

Gevolg 2.3.20 *Zij $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topologische ruimtes, X compact, Hausdorff en lokaal samenhangend en $f : X \to Y$ continu. Dan is $f(X)$ lokaal samenhangend.*

Bewijs: Omdat X compact is en f continu, volgt met Gevolg 2.2.9 dat f gesloten is. Met de bovenstaande propositie zien we dat $f(X)$ lokaal samenhangend is. $\square$

Propositie 2.3.21 *Zij $(X, \tau), (Y, \sigma)$ lokaal samenhangende ruimtes. Dan is $X \times Y$ ook lokaal samenhangend.*

Bewijs: Zij N een omgeving van een punt $(x, y) \in X \times Y$. Dan bestaan er $A \in \tau$, $B \in \sigma$ zodanig dat $(x, y) \in A \times B \subset N$. Vanwege de lokale samenhang van X en Y bestaan er vervolgens een samenhangende $U \in \tau$ en $V \in \sigma$ zodanig dat $x \in U \subset A$, $y \in V \subset B$. Uit Propositie 2.3.11 volgt dat $U \times V \subset N$ een samenhangende open omgeving van (x, y) is. $\square$

2.3.3 Padsamenhang

Definitie 2.3.22 Voor $x, y \in X$ is een **pad van x naar y** een continue functie $p : [0, 1] \to X$, zodanig dat $p(0) = x$ en $p(1) = y$. We noemen X **padsamenhangend** als er voor elk paar $x, y \in X$ een pad van x naar y bestaat.

Opmerking 2.3.23 De keuze voor $[0, 1]$ is geheel willekeurig. Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$ is $[a, b] \cong [0, 1]$, dus zien we dat er een pad van x naar y bestaat $\Leftrightarrow$ er een continue functie $p : [a, b] \to X$ bestaat met $p(a) = x$ en $p(b) = y$.

Voorbeeld 2.3.24 Beschouw de rechthoek $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit

$$\mathcal{E} := ([0, 6] \times \{0\}) \cup (\{6\} \times [0, 1]) \cup ([0, 6] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]).$$

Dan is $\mathcal{E}$ padsamenhangend (en dus samenhangend) en lokaal samenhangend, maar de open bol $B((3, 0), 2) = ((1, 5) \times \{0\}) \cup (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}) \times \{1\})$ is niet eens samenhangend. Samenhang en padsamenhang gedragen zich dus belabberd ten opzichte van het nemen van (open- en gesloten) deelverzamelingen.

Propositie 2.3.25 *Zij X padsamenhangend en $f : X \to Y$ continu. Dan is $f(X) \subset Y$ padsamenhangend.*

Bewijs: Zij $x, y \in f(X)$ willekeurig en $u, v \in X$ zodanig dat $f(u) = x$ en $f(v) = y$. Omdat X padsamenhangend is, bestaat er een pad p van u naar v. Nu is $f \circ p : [0, 1] \to Y$ een pad van x naar y, aangezien $(f \circ p)(0) = f(u) = x$ en $(f \circ p)(1) = f(v) = y$. Dus $f(X)$ is padsamenhangend. $\square$

Lemma 2.3.26 *Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ en $f : [a, b] \to X$ en $g : [b, c] \to X$ continu, zodanig dat $f(b) = g(b)$. Dan is de functie $h : [a, c] \to X$ gedefinieerd door:*

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{als } x \in (b, c] \end{cases}$$

continu (en dus een pad van a naar c).

Bewijs: Continuïteit van h in punten van $[a, b)$ en $(b, c]$ wordt gegeven door de continuïteit van f respectievelijk g. Verder is h links- en rechtscontinu in b en dus volgt uit $f(b) = g(b)$ dat h continu is te b. $\square$

Gevolg 2.3.27 *Zij (X, τ) een topologische ruimte. Dan is de relatie $\sim_p$ gedefiniëerd door $x \sim_p y \Leftrightarrow$ er bestaat een pad van x naar y, een equivalentierelatie.*

Bewijs: Het constante pad $p(t) = x$ voor alle t is een pad van x naar zichzelf. Als p een pad van x naar y is, dan is $1 - p$ een pad van y naar x. Transitiviteit van $\sim_p$ volgt uit Propositie 2.3.26. $\square$

Propositie 2.3.28 *Elke padsamenhangende ruimte X is samenhangend.*

Bewijs: Stel X is padsamenhangend en laat $U, V \subset X$ niet-lege open deelverzamelingen van X zijn zodat $U \cup V = X$. Kies $x \in U$ en $y \in V$ en bepaal een pad p van x naar y. Dan zijn $p^{-1}(U), p^{-1}(V) \subset [0,1]$ open en niet leeg. Bovendien is $p^{-1}(U) \cup p^{-1}(V) = p^{-1}(U \cup V) = p^{-1}(X) = [0,1]$, dus volgt uit de samenhang van $[0,1]$ dat $p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) \neq \emptyset$. Maar dan is ook $U \cap V \supset p(p^{-1}(U \cap V)) = p(p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)) \neq \emptyset$. Hieruit volgt dat X samenhangt. $\square$

Opmerking 2.3.29 We zullen zien (zie Propositie 2.3.37) dat de omkering niet waar is.

Definitie 2.3.30 Zij (X, τ) een topologische ruimte en $x \in X$. De **padcomponent** van x is $P(x) \coloneqq \{y \in X \mid \text{er is een pad van } x \text{ naar } y\}$.

Opmerking 2.3.31 Uit Gevolg 2.3.27 volgt dat de padcomponenten een partitie van X vormen.

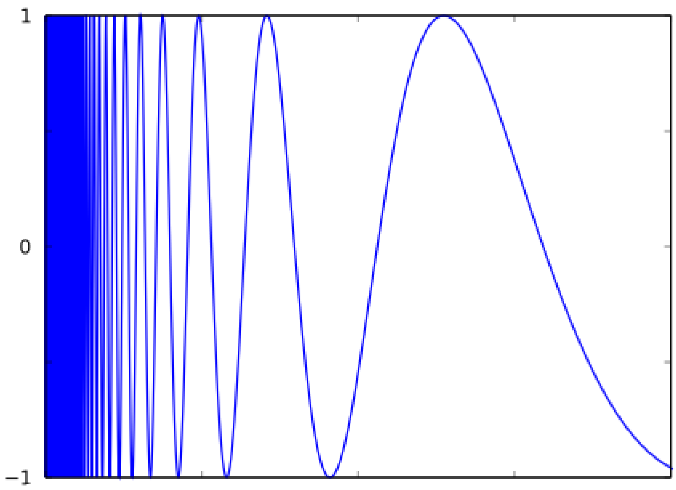
Propositie 2.3.32 *Voor elke $x \in X$ is $P(x)$ padsamenhangend.*

Bewijs: Zij $y, z \in P(x)$. Dan is er een pad p_1 van x naar y en een pad p_2 van x naar z. Met het oog op de bovenstaande opmerking is er ook een pad $\hat{p_1}$ van y naar x, waaruit met Lemma 2.3.26 volgt dat er een pad van y naar z bestaat. $\square$

Gevolg 2.3.33 *Voor elke $x \in X$ geldt: $P(x) \subset C(x)$.*

Bewijs: Zij $x \in X$ willekeurig. Dan is $P(x)$ padsamenhangend en dus samenhangend (Propositie 2.3.28). Per definitie van $C(x)$ volgt dat $P(x) \subset C(x)$. $\square$

Voorbeeld 2.3.34 (Closed topologist's sine curve) Zij $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ de continue functie gedefinieerd door $f(x) \coloneqq \sin(\frac{1}{x})$ en $\mathcal{T} \coloneqq \{(x, f(x)) \mid x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ de grafiek van f (voorzien van de geïnduceerde topologie). Omdat $(0,1]$ padsamenhangend is en f continu, volgt uit Propositie 2.3.25 dat $\mathcal{T}$ padsamenhangend en dus (Propositie 2.3.28) samenhangend is. Met Propositie 2.3.4 volgt dat ook $\overline{\mathcal{T}}$ samenhangt. We zullen zien dat $\overline{\mathcal{T}}$ niet padsamenhangend is.



Figuur 2.1: $\overline{\mathcal{T}}$

Lemma 2.3.35 *Definieer $L_y \coloneqq \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dan is $S_y \coloneqq L_y \cap \mathcal{T}$ oneindig voor elke $y \in [-1,1]$ en bovendien is $\overline{S_y} = S_y \cup (0,y)$.*

Bewijs: Zij $y \in [-1,1]$. Bepaal een $x_1 > 1$ zodat $\sin(x_1) = y$. Dan is $(\frac{1}{x_1}, y) \in S_y$, dus is $S_y \neq \emptyset$. Neem nu $x_n \coloneqq \frac{x_1}{1+2\pi n x_1}$ voor elke $n > 1$. Dan is

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{1+2\pi n x_1}{x_1}\right) = \sin\left(\frac{1}{x_1} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = y,$$

dus $\{(x_n, y) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset S_y$, waaruit volgt dat S_y oneindig is. We zien bovendien dat $(0, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y) \in \overline{S_y}$ en dus is $S_y \cup (0, y) \subset \overline{S_y}$. Zij nu $(x, y) \in \overline{S_y}$. Dan moet $x \in [0, 1]$ zijn, aangezien $S_y \subset \mathcal{T} \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Hieruit volgt dat $(x, y) \in S_y \cup (0, y)$. □

Gevolg 2.3.36 *Er geldt:* $\mathcal{T} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) = \overline{\mathcal{T}}$

Bewijs: ($\subset$): $\mathcal{T} = \bigcup_{y\in[-1,1]} S_y$ per constructie, dus volgt uit Lemma 2.1.14 en Lemma 2.3.35 dat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) &= \bigcup_{y\in[-1,1]} (S_y \cup (0, y)) \\
&= \bigcup_{y\in[-1,1]} \overline{S_y} \\
&\subset \overline{\bigcup_{y\in[-1,1]} S_y} = \overline{\mathcal{T}}
\end{aligned}$$

($\supset$): Zij $(x, y) \in \overline{\mathcal{T}}$. Het is gezien het bereik van de sinusfunctie dat $y \in [-1, 1]$ ligt. Stel $x > 0$. Dan is $\mathcal{T}_{\frac{x}{2}} := \{(z, w) \in \mathcal{T} \mid z \geq \frac{x}{2}\}$ gewoon de gesloten kromme $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in [\frac{x}{2}, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$. Verder is het vanwege Lemma 2.1.9 duidelijk dat $(x, y) \in \overline{\mathcal{T}_{\frac{x}{2}}}$ en dus is $(x, y) \in \mathcal{T}_{\frac{x}{2}} \subset \mathcal{T}$. □

Propositie 2.3.37 $\overline{\mathcal{T}}$ *is niet padsamenhangend.*

Bewijs: Zij $Y := \{0\} \times [-1, 1]$. We hebben gezien dat $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup Y$. Het is duidelijk dat Y en $\mathcal{T}$ beide padsamenhangend zijn. Zij $x \in \mathcal{T}$ en $y \in Y$ en veronderstel dat p een pad van x naar y is, zodanig dat $p(t) \in \overline{\mathcal{T}}$ voor elke $t \in [0, 1]$. Schrijf $p(t) = (p_1(t), p_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. Dan is $p_1(0) > 0$ en $p_1(1) = 0$; zij $s := \inf\{t \in [0, 1] \mid p_1(t) = 0\}$. Omdat p continu is volgt dat $s > 0$ en dat $p_1(s) = 0$ en $p_1(t) > 0$ voor alle $t \in [0, s)$. Verder is $\lim_{t\uparrow s} p_1(t) = 0$. Maar $\lim_{t\uparrow s} p_2(t) = \lim_{t\uparrow s} \sin(\frac{1}{p_1(t)})$ bestaat niet, wat in tegenspraak is met de continuïteit van p. Dus kan zo'n pad niet bestaan, waaruit volgt dat $\overline{\mathcal{T}}$ niet padsamenhangend is. □

2.3.4 Lokale padsamenhang

Definitie 2.3.38 Een niet-lege ruimte (X, τ) heet **lokaal padsamenhangend** als elke $x \in X$ een padsamenhangende omgevingsbasis heeft, oftewel: voor elke $x \in X$ en elke omgeving N van x is er een padsamenhangende $U \in \tau$ zodanig dat $x \in U \subset N$.

Gevolg 2.3.39 *Elke lokaal padsamenhangende ruimte X is lokaal samenhangend.*

Bewijs: Elke $x \in X$ heeft een omgevingsbasis $\{U_i\}_{i\in I}$ bestaande uit padsamenhangende open verzamelingen. Vanwege Propositie 2.3.28, is elke U_i samenhangend en dus zien we dat $\{U_i\}_{i\in I}$ ook een samenhangende omgevingsbasis van x is. Hiermee is X lokaal samenhangend. □

Propositie 2.3.40 *Zij X lokaal padsamenhangend. Dan is $P(x) = C(x)$ voor elke x.*

Bewijs: Zij $x \in X$ willekeurig en $P(x)$ de padcomponent van x. We laten zien dat $P(x)$ clopen is:
- ◦ Zij $y \in P(x)$ willekeurig. Dan heeft y een padsamenhangende open omgeving U_y. Omdat er voor elke $z \in U_y$ een pad van y naar z bestaat, is $U_y \subset P(y) = P(x)$, waaruit volgt dat $P(x)$ open is.
- Merk op dat:

$$P(x) = X \setminus \bigcup_{y\in X\setminus\{x\}} P(y).$$

$\bigcup_{y\in X\setminus\{x\}} P(y)$ is open volgens het bovenstaande, waaruit volgt dat $P(x)$ gesloten is.

Nu is $P(x) \subset C(x)$ clopen en niet leeg en dus volgt uit Propositie 2.3.7 dat $P(x) = C(x)$. □

Gevolg 2.3.41 *Zij X samenhangend en lokaal padsamenhangend. Dan is X padsamenhangend.*

Bewijs: Zij $x \in X$ willekeurig. Dan is $P(x) = C(x) = X$, waaruit volgt dat X padsamenhangend is. □

Gevolg 2.3.42 *$\overline{\mathcal{T}}$ uit Voorbeeld 2.3.34 is niet lokaal padsamenhangend.*

Bewijs: Stel dat $\overline{\mathcal{T}}$ lokaal padsamenhangend is. Dan volgt uit de vorige propositie dat $\overline{\mathcal{T}}$ padsamenhangend is, maar dit is in tegenspraak met Propositie 2.3.37. $\square$

2.3.5 Paracompactheid

Definitie 2.3.43 Zij (X, d) een metrische ruimte. Een familie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ van deelverzamelingen van X heet **lokaal eindig** als er voor elke $x \in X$ een open omgeving V van x bestaat, zodanig dat $\{U \in \mathcal{U} \mid V \cap U \neq \emptyset\}$ eindig is.

Propositie 2.3.44 *Zij $\{U_i\}_{i \in I}$ een lokaal eindige familie van deelverzamelingen van X. Dan is:*
(i) $\{\overline{U_i}\}_{i \in I}$ lokaal eindig
(ii) $\bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$ gesloten

Bewijs:
(i) Zij $x \in X$ willekeurig. Dan is er een open omgeving V van x die slechts eindig veel U_i's snijdt. Laat $U_1, ..., U_n$ de elementen uit $\{U_i\}_{i \in I}$ zijn die niet-lege doorsnede met V hebben. Met Gevolg 2.1.10 is $V \cap \overline{U_j} = \emptyset$ voor elke $j \in I \setminus \{1, ..., n\}$, waaruit volgt dat $\{\overline{U_i}\}_{i \in I}$ lokaal eindig is.
(ii) Zij $U := \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$ en $x \in X \setminus U$. Dan is er een open omgeving V van x die slechts eindig veel $\overline{U_i}$ snijdt. Laat $\overline{U_1}, ..., \overline{U_n}$ de elementen uit $\{\overline{U_i}\}_{i \in I}$ zijn die niet-lege doorsnede met V hebben. Dan is $V \setminus U = V \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ open en $x \in V \setminus U \subset X \setminus U$. Omdat $x \in X \setminus U$ willekeurig was, volgt hieruit dat $X \setminus U$ open is en dus is U gesloten. $\square$

Lemma 2.3.45 *Zij $\mathcal{U}$ een lokaal eindige open overdekking van X en $K \subset X$ compact. Dan is $\{U \in \mathcal{U} \mid K \cap U \neq \emptyset\}$ eindig.*

Bewijs: Voor elke $x \in K$ is er een open V_x zodanig dat $\{U \in \mathcal{U} \mid V_x \cap U \neq \emptyset\}$ eindig is. $\{V_x\}_{x \in X}$ is een open overdekking van K en heeft dus een eindige deeloverdekking $\{V_{x_i}\}_{i=1}^{n}$. Omdat $\{U \in \mathcal{U} \mid \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \cap U\}$ eindig is, volgt dat ook K slechts eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ snijdt. $\square$

Definitie 2.3.46 Zij X een metrische ruimte en $\mathcal{U}$ een (open) overdekking van X. Een overdekking $\mathcal{V}$ van X heet een (**open**) **verfijning** van $\mathcal{U}$ als er voor elke $V \in \mathcal{V}$ een $U \in \mathcal{U}$ bestaat zodanig dat $U \subset V$.

Definitie 2.3.47 Een ruimte X heet **paracompact** als elke open overdekking van X een lokaal eindige verfijning heeft.

Propositie 2.3.48 *Elke metrische ruimte is paracompact.*

Lemma 2.3.49 *Zij X een lokaal compacte paracompacte ruimte. Dan heeft X een lokaal eindige open overdekking $\mathcal{V}$ zodanig dat $\overline{V}$ compact is voor elke $V \in \mathcal{V}$.*

Bewijs: Bepaal met Gevolg 2.2.24 voor elke $x \in X$ een open omgeving U_x van x zodanig dat $\overline{U_x}$ compact is. $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ is een open overdekking van X en dus heeft deze een lokaal eindige verfijning $\mathcal{V}$. Voor elke $V \in \mathcal{V}$ geldt nu: $\overline{V} \subset \overline{U}$ voor een zekere $U \in \mathcal{U}$ en dus is elke $\overline{V}$ compact. $\square$

De volgende stelling wordt later belangrijk wanneer we gegeneraliseerde Peanocontinua bekijken (zie hoofdstuk 4). Het onderstaande bewijs is afkomstig uit [5].

Stelling 2.3.50 *Elke samenhangende, lokaal compacte metrische ruimte is σ-compact.*

Bewijs: Zij $\mathcal{V}$ een lokaal eindige open overdekking van X zodanig dat $\overline{V}$ compact is voor elke $V \in \mathcal{V}$. Zij $V_1 \in \mathcal{V}$ niet leeg. Dan zijn er volgens Lemma 2.3.45 slechts eindig veel $V_2, ..., V_{n_1} \in \mathcal{V}$ die $\overline{V_1}$ snijden. Aangezien $\bigcup_{i=1}^{n_1} \overline{V_i}$ weer compact is (Propositie 2.2.3), volgt op dezelfde manier dat er slechts eindig veel $V_{n_1+1}, ..., V_{n_2} \in \mathcal{V}$ zijn die $\bigcup_{i=1}^{n_1} \overline{V_i}$ snijden, enzovoorts. Verder is:

$$V := \overline{V_1} \cup ... \cup \overline{V_{n_1}} \cup ... \cup \overline{V_{n_2}} \cup ... = V_1 \cup ... \cup V_{n_1} \cup ... \cup V_{n_2} \cup ...,$$

omdat $\mathcal{V}$ een open overdekking van X is. Hieruit volgt dat V open is. Maar V is ook gesloten, vanwege Propositie 2.3.44. Omdat V niet leeg is (want $V_1 \neq \emptyset$), volgt uit de samenhang van X dat $V = X$ en dus is X σ-compact. $\square$

2.4 Perfecte en propere afbeeldingen

We zullen nu perfecte afbeeldingen onderzoeken, die centraal zullen staan in de generalisatie van de stelling van Hahn en Mazurkiewicz die we later zullen behandelen. We zullen zien dat perfecte afbeeldingen belangrijke eigenschappen overdragen, die niet behouden blijven onder willekeurige continue functies.

Definitie 2.4.1 Zij $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topologische ruimtes. Een afbeelding $f : X \to Y$ heet **perfect** als f continu en gesloten is en bovendien geldt: $f^{-1}(y) \subset X$ is compact voor elke $y \in Y$.

Propositie 2.4.2 *Zij (X, τ) Hausdorff en $f : X \to Y$ perfect. Dan is $f(X) \subset Y$ Hausdorff.*

Bewijs: Zij $x, y \in Y$ zodanig dat $x \neq y$. Dan zijn $K := f^{-1}(x), L := f^{-1}(y) \subset X$ disjunct en compact. Met Propositie 2.2.15 bestaan er dan disjuncte open $U, V \subset X$ zodanig dat $K \subset U$ en $L \subset V$. Omdat $X \setminus U$ en $X \setminus V$ gesloten zijn, zijn $f(X \setminus U), f(X \setminus V)$ gesloten in Y en dus zijn $f(X) \setminus f(X \setminus U), f(X) \setminus f(X \setminus V)$ open. Aangezien $f^{-1}(x) \subset U$, is $x \notin f(X \setminus U)$, dus $x \in f(X) \setminus f(X \setminus U)$. Op dezelfde manier is $y \in f(X) \setminus f(X \setminus V)$. We laten zien dat $f(X) \setminus f(X \setminus U)$ en $f(X) \setminus f(X \setminus V)$ disjunct zijn. Stel $z \in f(X) \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V))$. Dan is $z \notin f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V) = f(X \setminus (U \cap V)) = f(X \setminus \emptyset) = f(X)$. Dit is een tegenspraak, dus zo'n z kan niet bestaan. $\square$

Propositie 2.4.3 *Zij X lokaal compact en $f : X \to Y$ perfect. Dan is $f(X) \subset Y$ lokaal compact.*

Bewijs: Zij $y \in f(X)$ willekeurig. Dan is $f^{-1}(y) \subset X$ compact en dus bestaan er met Propositie 2.2.23 $U, K \subset X$, zodanig dat U open is, K compact en $f^{-1}(y) \subset U \subset K$. Met Lemma 2.1.8 is er een open omgeving V van y zodanig dat $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U \subset K$. Maar dan is $y \in V \subset f(K)$ met $f(K)$ compact vanwege de continuïteit van f en dus is $f(K)$ een compacte omgeving van y. Hieruit volgt dat $f(X)$ lokaal compact is. $\square$

Propositie 2.4.4 *Zij (X, τ) een topologische ruimte met de tweede aftelbaarheidseigenschap. Als $f : X \to Y$ een perfecte afbeelding is, dan heeft $f(X)$ de tweede aftelbaarheidseigenschap.*

Bewijs: Zij $\mathcal{B}$ een aftelbare basis voor τ. We definiëren een familie $\mathcal{B}' := \{f(X) \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i) \mid B_i \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$. Dan is $\mathcal{B}'$ aftelbaar en elk element van B' is open (omdat f gesloten is). Zij $y \in f(X)$ en U een open omgeving van y. We laten zien dat er een $B \in \mathcal{B}'$ bestaat zodanig dat $y \in B \subset U$. Voor elke $x \in f^{-1}(y)$ is er een $B_x \in \mathcal{B}$ zodanig dat $x \in B_x \subset f^{-1}(U)$. Omdat $f^{-1}(y)$ compact is, bestaan er $x_1, ..., x_n \in f^{-1}(y)$ zodanig dat $f^{-1}(y) \subset B := \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i} \subset f^{-1}(U)$. Nu is

$$\begin{aligned} y &\in f(X) \setminus f(X \setminus B) \\ &\subset f(X) \setminus f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right) \\ &\subset f(X) \setminus \left(f(X) \setminus f\left(f^{-1}(U)\right)\right) \\ &= f(X) \setminus (f(X) \setminus U), \end{aligned}$$

omdat f surjectief is. Omdat $f(X) \setminus f(X \setminus B_{x_i}) \in \mathcal{B}'$ is, zijn we klaar. $\square$

Definitie 2.4.5 Zij $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topologische ruimtes. Een afbeelding $f : X \to Y$ heet **proper** als f continu is en $f^{-1}(K) \subset X$ compact is voor elke compacte $K \subset Y$.

Propositie 2.4.6 *Zij $f : X \to Y$ perfect. Dan is f ook proper.*

Bewijs: Zij $K \subset Y$ compact en $\{U_i\}_{i \in I}$ een willekeurige open overdekking van $f^{-1}(K)$. Voor elke $y \in K$ is $f^{-1}(y)$ compact, dus bestaat er voor iedere y een eindige $J_y \subset I$ zodanig dat $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in J_y} U_i$. Zij $C_y := X \setminus \bigcup_{i \in J_y} U_i$. Dan is elke C_y gesloten en dus (aangezien f gesloten is), is $V_y := Y \setminus f(C_y)$ open in Y voor elke y. Bovendien is $y \in V_y$ voor iedere y, aangezien $f^{-1}(y) \cap C_y = \emptyset$. Hieruit volgt dat $\{V_y\}_{y \in K}$ een open overdekking van K is en dus zijn er

$y_1, ..., y_n$ zodanig dat $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Definieer $J = \bigcup_{i=1}^n J_{y_i}$. Dan is $J \subset I$ eindig en:

$$\begin{aligned} f^{-1}(K) &\subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{y_i}) \\ &= \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(Y \setminus f(C_{y_i})) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \left(f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(f(C_{y_i}))\right) \\ &= f^{-1}(Y) \setminus \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(f(C_{y_i})) \\ &\subset X \setminus \bigcap_{i=1}^n C_{y_i} \\ &= X \setminus \bigcap_{i=1}^n \left(X \setminus \bigcup_{j \in J_{y_i}} U_j \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j \in J_y} U_j = \bigcup_{j \in J} U_j, \end{aligned}$$

dus $f^{-1}(K)$ is compact. □

De omkering geldt alleen wanneer Y lokaal compact is.

Propositie 2.4.7 *Zij X, Y metrische ruimtes, Y lokaal compact en $f : X \to Y$ proper. Dan is f perfect.*

Bewijs: We hoeven alleen te laten zien dat f gesloten is: zij $C \subset X$ gesloten en $y \in \overline{f(C)}$. Zij $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ compacte omgevingen van y zodanig dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \{y\}$ (zie Gevolg 2.2.40). Er geldt: $K_n \cap f(C) \neq \emptyset$ voor elke n, vanwege Lemma 2.1.9 en dus is $f^{-1}(K_n) \cap C \neq \emptyset$ voor elke n. Immers, als $z \in K_n \cap f(C)$ en $w \in C$ zodanig dat $f(w) = z$, dan is $w \in f^{-1}(K_n)$. Omdat f proper is, is $f^{-1}(K_n)$ compact voor elke n en dus is met Propositie 2.2.7 $f^{-1}(K_n) \cap C$ compact voor elke n. Met Cantor's stelling zien we dat:

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(f^{-1}(K_n) \cap C\right) = C \cap f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) = C \cap f^{-1}(y),$$

waaruit volgt dat $y \in f(C)$. □

Propositie 2.4.8 *Zij X, Y topologische ruimtes, X compact en Y Hausdorff. Dan is elke continue afbeelding $f : X \to Y$ perfect.*

Bewijs: Met propositie 2.2.9 zien we dat f gesloten is. Omdat Y Hausdorff en dus T_1 is, is elke eenpuntsruimte $\{y\}$ gesloten. Uit de continuïteit van f volgt dat $f^{-1}(y) \subset X$ gesloten is en dus compact. Hiermee zien we dat f perfect is. □

3 De stelling van Hahn en Mazurkiewicz

3.1 De stelling van Mazurkiewicz en Moore

We hebben gezien dat een samenhangende ruimte niet altijd padsamenhangend hoeft te zijn. In deze sectie bewijzen we de stelling van Mazurkiewicz en Moore, die voldoende voorwaarden geeft om padsamenhang van een samenhangende ruimte veilig te stellen. Voor het bewijs van deze stelling hebben we het begrip 'simpele keten' en een serie lemma's nodig. De opzet van deze paragraaf is gebaseerd op het bewijs van de gelijknamige stelling in [3].

Definitie 3.1.1 Een **gebied** is een open en samenhangende deelruimte $U \subset X$.

Definitie 3.1.2 Zij $U \subset X$ een gebied. Voor $x, y \in U$ is een **keten tussen x en y** een rijtje $V_1, ..., V_n \subset U$ van gebieden met $x \in V_1$, $y \in V_n$ en $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$. Zo'n keten noemen we **simpel** als bovendien geldt: $x \notin \bigcup_{i=2}^{n} V_i$, $y \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$ en $V_i \cap V_j \neq \emptyset \Longleftrightarrow |i-j| \leq 1$. Een **deelketen** van $V_1, ..., V_n$ is een rij $V_{i_1}, ..., V_{i_k}$ met $j \longmapsto i_j \in \{1, ..., n\}$ strikt stijgend, zodat $V_{i_1}, ..., V_{i_k}$ nog steeds een keten tussen x en y is.

Lemma 3.1.3 *Zij $U \subset X$ een gebied, $x, y \in U$ en $V_1, ..., V_n$ een keten tussen x en y. Dan heeft $V_1, ..., V_n$ een simpele deelketen.*

Bewijs: Zij $p := \max_{i=1,...,n}\{i \mid x \in V_i\}$ en $q := \min_{i=1,...,n}\{i \mid y \in V_i\}$. Dan is $V_p, ..., V_q$ nog steeds een keten tussen x en y, maar nu is $x \notin \bigcup_{i=p+1}^{q} V_i$ en $y \notin \bigcup_{i=p}^{q-1} V_i$. Stel dat er $i < j-1$ bestaan zodat $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Zij i_0 het kleinste element waarvoor zo'n j bestaat. Zij j_0 het grootste element zodat $V_{i_0} \cap V_{j_0} \neq \emptyset$. Dan kunnen we $V_{i_0+1}, ..., V_{j_0-1}$ weglaten en houden we toch nog een keten tussen x en y over, met bovendien $V_{i_0} \cap V_j \neq \emptyset \Longleftrightarrow |i_0 - j| \leq 1$. Zij nu i_1 het kleinste element $\geq j_0$ zodat $V_{i_1} \cap V_j \neq \emptyset$ voor een zekere $j > i_0 + 1$ enz.. $\square$

Lemma 3.1.4 *Zij X lokaal samenhangend en $\mathcal{W}$ een open overdekking van X. Zij $U \subset X$ een gebied en $x, y \in U$. Dan bestaat er een simpele keten $V_1, ..., V_n$ tussen x en y zodat voor elke i: $\overline{V_i} \subset W_i$ voor een zekere $W_i \in \mathcal{W}$.*

Bewijs: Zij $Z := \{z \in U \mid \text{er bestaat een keten } V_1, ..., V_n \text{ tussen } x \text{ en } z \text{ met } \overline{V_i} \subset W_i \in \mathcal{W}\}$. We laten zien dat Z clopen is in U:

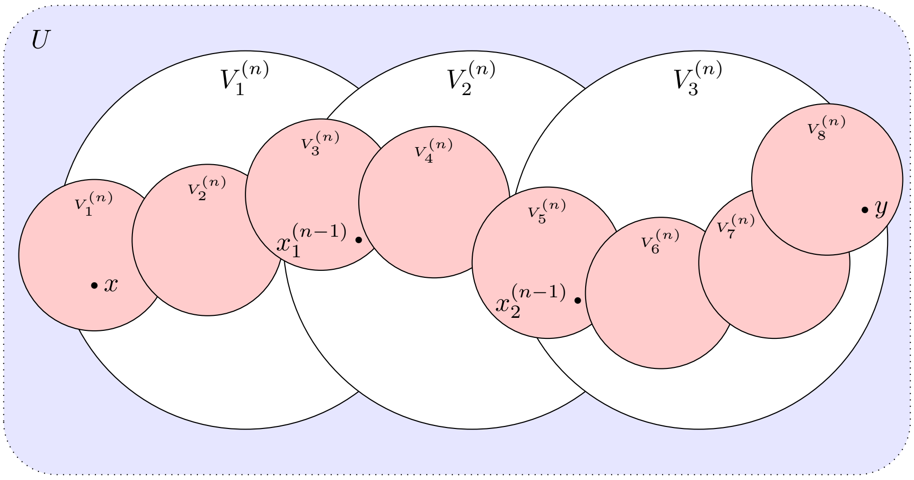
- ◦ Zij $z \in Z$ willekeurig en $V_1, ..., V_n$ een keten tussen x en z met $\overline{V_i} \subset W_i \in \mathcal{W}$. V_n is open en dus is er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat $B(z, \varepsilon) \subset V_n$. Voor alle $w \in B(z, \varepsilon)$ is $V_1, ..., V_n$ een keten tussen x en w, waaruit volgt dat $B(z, \varepsilon) \subset Z$ is. Dit kan voor alle $w \in Z$ en dus is Z open (in X en in U).
- Zij $z \in \overline{Z} \cap U$ en $W \in \mathcal{W}$ zodanig dat $z \in W$. Bepaal met Lemma 2.1.24 een open V zodat $x \in V \subset \overline{V} \subset W$. Omdat X lokaal samenhangend is, bestaat er een gebied $U \subset V$ dat z bevat. Er geldt: (Lemma 2.1.9) $U \cap Z \neq \emptyset$. Zij $u \in U \cap Z$ en $V_1, ..., V_n$ een keten tussen x en u zodanig dat $\overline{V_i} \subset W_i \in \mathcal{W}$ voor elke i. Omdat U een keten tussen u en z is, is $V_1, ..., V_n, U$ een keten tussen x en z met $\overline{V_i} \subset W_i$ voor elke i en $\overline{U} \subset \overline{V} \subset W$. Hieruit volgt dat $z \in Z$ en dus is $\mathrm{Cl}_U(Z) \subset \overline{Z} \cap U \subset Z$, met andere woorden Z gesloten in U.

Omdat Z clopen is en U samenhangend, volgt dat $Z = U$. Er is dus een keten tussen x en y die aan de voorwaarden voldoet. Met Lemma 3.1.3 kunnen we hier een simpele deelketen uit destilleren. $\square$

Lemma 3.1.5 *Zij X lokaal samenhangend, $U \subset X$ een gebied en $x, y \in U$. Dan bestaat er een rij simpele ketens $V_1^{(n)}, ..., V_{m_n}^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) tussen x en y zodanig dat:*

- $\bigcup_{i=1}^{m_{n+1}} \overline{V_i^{(n+1)}} \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} V_i^{(n)}$ *voor alle $n \in \mathbb{N}$,*
- $\mathrm{diam}(V_i^{(n)}) < 2^{-n}$ *voor elke $i \in \{1, ..., m_n\}$ en alle $n \in \mathbb{N}$,*
- *Voor elke $n \geq 2$ en elke $i \in \{1, ..., m_{n-1}-1\}$ bestaat er een $j_i \in \{1, ..., m_n\}$, zodanig dat $V_{j_i}^{(n)} \cap V_i^{(n-1)} \cap V_{i+1}^{(n-1)} \neq \emptyset$.*

Bewijs: We maken de ketens inductief. Zij $\mathcal{W}_1$ de open overdekking van U door bollen met straal $\frac{1}{2}$ en bepaal met Lemma 3.1.4 een simpele keten $V_1^{(1)}, ..., V_{m_1}^{(1)}$ zodanig dat voor elke i geldt: $\overline{V_i^{(1)}} \subset W_i$ voor een zekere $W_i \in \mathcal{W}_1$. Dan is $\operatorname{diam}(V_i^{(1)}) < 1$ voor elke i. Veronderstel nu dat we voor een $n > 1$ een keten $V_1^{(n-1)}, ..., V_{m_{n-1}}^{(n-1)}$ gemaakt hebben die aan de voorwaarden voldoet. Kies een rij $x_0^{(n-1)}, ..., x_{m_{n-1}}^{(n-1)}$ door $x_0^{(n-1)} = x$, $x_{m_{n-1}}^{(n-1)} = y$ en $x_i^{(n-1)} \in V_i^{(n-1)} \cap V_{i+1}^{(n-1)}$ voor $i = 1, ..., m_{n-1} - 1$. Pas nu Lemma 3.1.4 toe op $U = V_i^{(n-1)}$, $x = x_i^{(n-1)}$, $y = x_{i+1}^{(n-1)}$ en de open overdekking door bollen met straal 2^{-n}. Dit geeft m_{n-1} simpele ketens die samen een keten van x naar y vormen met schakels met diameter $< 2^{-n}$, zie figuur 3.1. Met Lemma 3.1.3 kunnen bestaat er dus ook een simpele deelketen. We kiezen voor j_i de eerste schakel die $x_i^{(n-1)}$ bevat. $\square$



Figuur 3.1: De constructie van de keten $V_1^{(n)}, ..., V_{m_n}^{(n)}$.

Stelling 3.1.6 (Mazurkiewicz-Moore) *Zij (X, d) een lokaal samenhangende volledige metrische ruimte en $U \subset X$ een gebied. Dan bestaat er voor elk paar $x, y \in U$, met $x \neq y$ een injectief pad p van x naar y.*

Bewijs: Bepaal bij x en y simpele ketens $V_1^{(n)}, ..., V_{m_n}^{(n)}$ zoals in Lemma 3.1.5. Kies punten $x_1^{(1)}, ..., x_{m_1-1}^{(1)}$ zodanig dat $x_i^{(1)} \in V_i^{(1)} \cap V_{i+1}^{(1)}$. Bepaal nu $0 = t_0^{(1)} < t_1^{(1)} < ... < t_{m_1}^{(1)} = 1 \in [0,1]$ zodanig dat $t_{i+1}^{(1)} - t_i^{(1)} = \frac{1}{m_1+1}$ voor elke $i \in \{1, ..., m_1\}$. Zij $T_1 \coloneqq \{t_0^{(1)}, ..., t_{m_n}^{(1)}\}$ en definieer $f_1 : T_1 \to X$ door :

$$f_1(t) \coloneqq \begin{cases} x & \text{als } t = t_0^{(1)} \\ x_i^{(1)} & \text{als } t = t_i^{(1)} \text{ met } i \in \{1, ..., m_1 - 1\} \\ y & \text{als } t = t_{m_1}^{(1)} \end{cases}$$

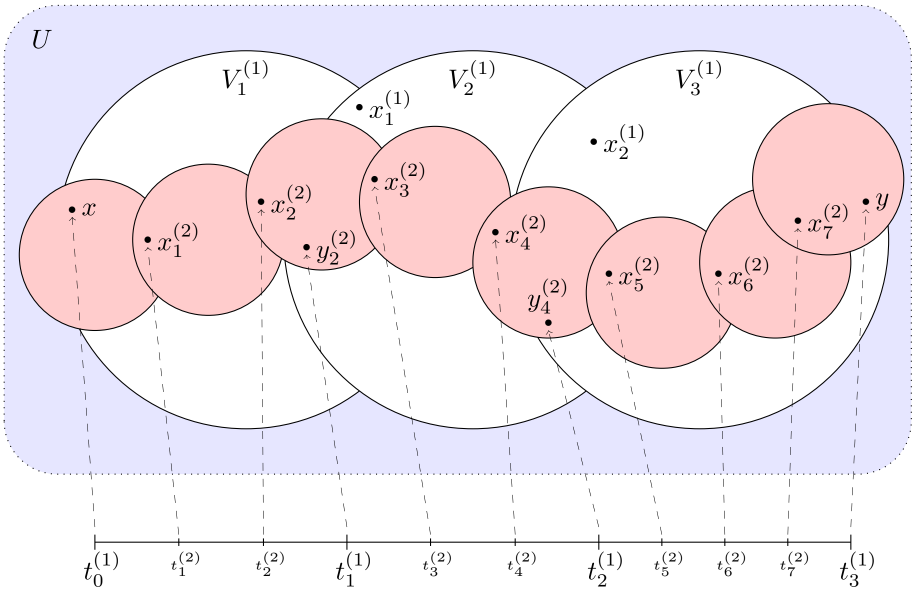
Kies nu punten $x_1^{(2)}, ..., x_{m_2-1}^{(2)}$ zodanig dat $x_i^{(2)} \in V_i^{(2)} \cap V_{i+1}^{(2)}$ voor elke i en punten $y_{j_i} \in V_{j_i}^{(2)} \cap V_i^{(1)} \cap V_{i+1}^{(1)}$ (voor $i = 1, ..., m_1 - 1$). Vervolgens kiezen we in $[0,1]$ punten $0 < t_1^{(2)} < ... < t_{m_2}^{(2)} < 1$ zodanig dat:

- $t_1^{(2)}, ..., t_{j_1}^{(2)} \in (t_0^{(1)}, t_1^{(1)})$,
- $t_{j_{i-1}+1}^{(2)}, ..., t_{j_i-1}^{(2)} \in (t_{i-1}^{(1)}, t_i^{(1)})$, voor $i \in \{2, ..., m_1 - 2\}$,
- $t_{j_{m_1}-1}^{(2)}, ..., t_{m_2}^{(2)} \in (t_{m_1-1}^{(1)}, t_{m_1}^{(1)})$,

en bovendien alle individuele intervallen $[t_i^{(1)}, t_{i+1}^{(1)}]$ worden verdeeld in gelijke stukken. Zij $T_2 \coloneqq T_1 \cup \{t_1^{(2)}, ..., t_{m_2}^{(2)}\}$ en definieer $f_2 : T_2 \to X$ door:

$$f_2(t) \coloneqq \begin{cases} x & \text{als } t = t_0^{(1)} \\ y_i^{(2)} & \text{als } t = t_i^{(1)} \text{ met } i \in \{1, ..., m_1 - 1\} \\ x_i^{(2)} & \text{als } t = t_i^{(2)} \text{ met } i \in \{1, ..., m_2 - 1\} \\ y & \text{als } t = t_{m_1}^{(1)} \end{cases}$$

Wanneer we dit proces itereren krijgen we een rij $T_1 \subset T_2 \subset ... \subset [0,1]$ en een rij functies $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ met $f_n : T_n \to X$. Zij $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. We laten eerst zien dat T dicht is in $[0,1]$. Zij $\alpha_n \coloneqq \max\{|t - s| \mid t, s \in T_n\}$ de lengte van het grootste interval voortgebracht door de elementen in T_n. Het voldoet om te laten zien dat $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Aangezien $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ een van onderen (door 0) begrensde, dalende rij is, is deze zeker convergent. Zij daarom $\alpha \coloneqq \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ en veronderstel dat $\alpha > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat een zeker interval $t_i^{(N)}, t_{i+1}^{(N)}$ na stap N niet meer



Figuur 3.2: De punten $x_i^{(2)}$, $y_{j_i}^{(2)}$ en t_i en de bijbehorende afbeelding f_2.

onderverdeeld wordt. Dit kan echter alleen wanneer $d(f_N(t_i^{(N)}), f_N(t_{i+1}^{(N)})) = 0$, oftewel $f_N(t_i^{(N)}) = f_N(t_{i+1}^{(N)})$. Maar dan is $V_i^{(N)} \cap V_{i+2}^{(N)} \neq \emptyset$ en dat kan niet voor een simpele keten, dus zien we dat α gelijk aan 0 moet zijn. We construeren nu het pad p van x naar y. Zij $t \in [0,1]$ willekeurig. We onderscheiden twee gevallen:

(i) Als $t \in T_N$ voor een zekere $N \in \mathbb{N}$, dan is $t \in T_n$ voor alle $n \geq N$. Merk op dat in dit geval geldt dat $d(f_n(t), f_{n+1}(t)) < 2^{-(n-1)}$, aangezien $f_n(t)$ en $f_{n+1}(t)$ beiden in een $V_i^{(n)}$ met diameter $< 2^{-(n-1)}$ liggen en dus is $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchyrij. Uit de volledigheid van X volgt dat $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ bestaat en dus definiëren we:

$$p(t) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

(ii) Als $t \notin T_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, is er een rij $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, met $t_n \in T_n$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Dan is $d(f_n(t_n), f_{n+1}(t_{n+1})) < 2^{-(n-1)}$ en dus is $\{f_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchyrij. Omdat X volledig is, zien we dat $\lim_{n\to\infty} f_n(t_n)$ bestaat en dus definiëren we in dit geval:

$$p(t) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(t_n).$$

Hiermee hebben we een afbeelding $p : [0,1] \to U$ zodanig dat $p(0) = x$ en $p(1) = y$, dus we hoeven alleen nog aan te tonen dat p continu is. Zij $t \in (0,1)$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig. Bepaal een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $2^{-N} < \varepsilon$. Dan bestaat er een $i \in \{1, ..., m_n - 1\}$ zodanig dat $t_i^{(n)} < t < t_{i+1}^{(n)}$ voor een zekere $n \geq N$. Kies $\delta = \min\{t - t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)} - t\}$. Dan is $d(p(s), p(t)) < 2^{-n} < 2^{-N} < \varepsilon$ voor elke $s \in (t - \delta, t + \delta)$ en dus zien we dat p continu is. Continuïteit in 0 en 1 gaat op eenzelfde wijze. Ten slotte de injectiviteit van f: Zij $t, s \in [0,1]$, $t < s$ en veronderstel dat $f(t) = f(s)$. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $t < t_{i-1}^{(n)} < t_i^{(n)} < s$. Dan is $f(t) \in V_{i-1}^{(n)}$ en $f(s) \in V_{i+1}^{(n)}$. Maar dat betekent dat $V_{i-1}^{(n)} \cap V_{i+1}^{(n)} \neq \emptyset$ en dat is in tegenspraak met de aanname dat $V_1^{(n)}, ..., v_{m_n}^{(n)}$ een simpele keten is. Dus f moet injectief zijn. $\square$

Gevolg 3.1.7 *Elke volledige, lokaal samenhangende metrische ruimte X is lokaal padsamenhangend.*

Bewijs: Zij $x \in X$ willekeurig en N een omgeving van x. Omdat X lokaal samenhangend is, bestaat er een samenhangende $U \subset N$ die x bevat. Met Stelling 3.1.6 is U padsamenhangend en dus zien we dat X lokaal padsamenhangend is. $\square$

Gevolg 3.1.8 *Elke volledige, samenhangende, lokaal samenhangende metrische ruimte X is padsamenhangend.*

Bewijs: Met Gevolg 3.1.7 is X lokaal padsamenhangend en dus volgt uit Gevolg 2.3.41 dat X padsamenhangend is. $\square$

Gevolg 3.1.9 $\overline{\mathcal{T}}$ *uit Voorbeeld 2.3.34 is niet lokaal samenhangend.*

Bewijs: Veronderstel dat $\overline{\mathcal{T}}$ lokaal samenhangend is. Uit Stelling 2.2.46 volgt dat $\overline{\mathcal{T}}$ compact is en dus volledig. Omdat $\overline{\mathcal{T}}$ samenhangend is, volgt met het bovenstaande dat deze ook padsamenhangend is, maar dat is in tegenspraak met Propositie 2.3.37. $\square$

Opmerking 3.1.10 In feite is $\overline{\mathcal{T}}$ niet lokaal samenhangend in precies de punten van $Y = \overline{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}$. Elke open omgeving van een punt in Y bevat immers oneindig veel disjuncte lijnstukjes van de sinusfunctie.

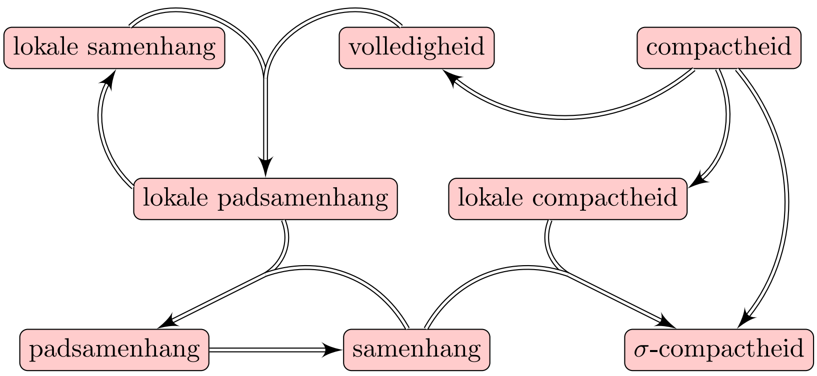
3.2 Peanocontinua

Peanocontinua spelen een centrale rol in de stelling van Hahn en Mazurkiewicz. In deze sectie bekijken we een aantal eigenschappen van dit soort ruimtes, alsmede een aantal voorbeelden.

Definitie 3.2.1 Een **Peanocontinuüm** is een compacte, lokaal samenhangende en samenhangende metrische ruimte (X, d).

Voorbeeld 3.2.2 Alle gesloten intervallen zijn Peanocontinua. Echter, $\mathbb{R}$ is geen Peanocontinuüm (niet compact) en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ook niet (niet samenhangend). De closed topologist's sine curve $\overline{\mathcal{T}}$ uit Voorbeeld 2.3.34 is samenhangend en compact, maar niet lokaal samenhangend en dus geen Peanocontinuüm.

Opmerking 3.2.3 Al met al hebben we de volgende implicaties bewezen:



Figuur 3.3: Implicaties in metrische ruimtes

We zien dat Peanocontinua alle eigenschappen uit figuur 3.3 hebben.

Propositie 3.2.4 *Zij X een Peanocontinuüm en $f : X \to Y$ continu. Dan is $f(X)$ een Peanocontinuüm.*

Bewijs: Met Propositie 2.4.8 zien we dat f perfect is. Aangezien X de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft, volgt met Propositie 2.4.4 dat $f(X)$ deze ook heeft. Verder is $f(X)$ compact (Propositie 2.2.8) en Hausdorff (Propositie 2.4.2) en dus metriseerbaar (Stelling 2.1.28). Samenhang van $f(X)$ volgt uit Propositie 2.3.9 en lokale samenhang ten slotte uit Propositie 2.3.20. $\square$

3.3 De Cantorverzameling

We zullen nu twee equivalente definities van de Cantorverzameling bekijken. De Cantorverzameling is met name belangrijk vanwege de stelling van Hausdorff en later ook in de generalisatie van de stelling van Hahn en Mazurkiewicz.

3.3.1 De Cantorverzameling

Definitie 3.3.1 De **Cantorverzameling** definiëren we door $\mathcal{C} \coloneqq \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, het aftelbare product van discrete ruimtes $\{0,1\}$ voorzien van de producttopologie.

Een meer gebruikelijke manier om de Cantorverzameling te definiëren gaat via de volgende constructie: zij $C_0 \coloneqq [0,1]$ en $U_0 \coloneqq (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. We definiëren $C_1 \coloneqq C_0 \setminus U_0 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ en vervolgens $U_1 \coloneqq (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, $C_2 \coloneqq C_1 \setminus U_1$. Dit iteratieve proces, waarbij we steeds 2^n open intervallen van lengte $3^{-(n+1)}$ weglaten uit het midden van de intervallen waaruit C_n is opgebouwd, geeft de volgende ruimte: $\mathcal{D} \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = [0,1] \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n)$. We zullen zien dat $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

Propositie 3.3.2 *Zij $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) \coloneqq \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$. Dan is:*
(i) $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} < \frac{1}{3_m}$ voor elke $m \in \mathbb{N}$,
(ii) $\varphi(\mathcal{C}) \subset [0,1]$,
(iii) φ injectief,
(iv) φ continu,
(v) $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

Bewijs:
(i) Er geldt:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n 3^m}{3^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^{(n-m)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 - \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} < 1.$$

(ii) Zij $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$ willekeurig. Omdat $x_n \geq 0$ is voor alle n, is $\frac{x_n}{3^n} \geq 0$, dus is $\varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \geq 0$. Verder zien we dat

$$\varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \leq \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1.$$

(iii) Zij $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$ en stel dat $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Zij $m \geq 0$ het kleinste getal waarvoor $x_m \neq y_m$. Dan is:

$$\begin{aligned}
\varphi(\{y_n\}_{n=0}^{\infty}) - \varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) &= \frac{2}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} - \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \right) \\
&\geq \frac{2}{3} \left(\frac{y_m}{3^m} - \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3^m} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

waaruit de injectiviteit van φ volgt.

(iv) Zij $\{\{x_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$ een rij in $\mathcal{C}$ die convergeert naar $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$. We laten zien dat $\{\varphi(\{x_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty})\}_{k=1}^{\infty}$ naar $\varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty})$ convergeert. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig en bepaal een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\frac{2}{3} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Dan bestaat er een $K \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $k > K$ geldt: $x_0^{(k)} = x_0, ..., x_{N-1}^{(k)} = x_{N-1}$. We zien dat voor alle $k \geq K$ geldt:

$$\begin{aligned}
|\varphi(\{x_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}) - \varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty})| &= \Big| \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n^{(k)}}{3^n} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \Big| \\
&\leq \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n^{(k)} - x_n|}{3^n} \\
&= \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|x_n^{(k)} - x_n|}{3^n} + \frac{2}{3} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|x_n^{(k)} - x_n|}{3^n} \\
&\leq \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{0}{3^n} + \frac{2}{3} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

dus $\lim_{k\to\infty} \varphi(\{x_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}) = \varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty})$, waaruit volgt dat φ continu is.

(v) ($\subset$) Zij $x \in \varphi(\mathcal{C})$. Dan is $x = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$ voor een rij $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$. We weten vanwege (ii) dat $x \in [0,1]$. Als $x_0 = 0$, dan is volgens (i) $x < \frac{1}{3}$ en als $x_0 = 1$, dan is $x > \frac{2}{3}$, dus $x \in C_1$. Vervolgens, als $x_0 = x_1 = 0$, dan (weer met (i)) $x \in [0, \frac{1}{9}]$, als $x_0 = 0$ en $x_1 = 1$, dan $x \in [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, als $x_0 = 1$ en $x_1 = 0$, dan $x \in [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ en als $x_0 = x_1 = 1$, dan $x \in [\frac{8}{9}, 1]$, met andere woorden: $x \in C_2$. Dit gaat zo door voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $x \in \mathcal{D}$.
($\supset$) Zij $y \in \mathcal{D}$. De constructie hierboven werkt ook omgekeerd: als $y \in [0, \frac{1}{3}]$ nemen we $x_0 = 0$, als $y \in [\frac{2}{3}, 1]$ nemen we $x_0 = 1$, enzovoort. Dan is $\left|y - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{x_n}{3^n}\right| < 3^{-(N+1)}$ voor alle N, dus $y = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{3^n} \in \varphi(\mathcal{C})$. □

Gevolg 3.3.3 $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$

Bewijs: $\varphi : \mathcal{C} \to \varphi(\mathcal{C})$ is een continue bijectie volgens Propositie 3.3.2. Omdat $\mathcal{C}$ compact is (Stelling 2.2.12), volgt met Gevolg 2.2.10 dat φ een homeomorfisme is. We zien dat $\mathcal{C} \cong \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$. □

Opmerking 3.3.4 Vanwege Gevolg 3.3.3 zullen we vanaf nu beide karakteriseringen van de Cantorverzameling door elkaar gebruiken en aanduiden met $\mathcal{C}$.

Definitie 3.3.5 Een ruimte X heet **nuldimensionaal** als elke $x \in X$ een omgevingsbasis van clopen deelverzamelingen heeft.

Propositie 3.3.6 *De Cantorverzameling is nuldimensionaal.*

Bewijs: Zij $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$. Dan is

$$\{\{x_0\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

een clopen omgevingsbasis van $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. □

Opmerking 3.3.7 Uit Propositie 3.3.6 volgt dat elke niet-lege open $U \subset \mathcal{C}$ oneindig is. U bevat namelijk altijd een clopen basiselement dat oneindig is.

3.3.2 De stelling van Hausdorff

Lemma 3.3.8 *Zij $K \subset \mathcal{C}$ clopen en niet leeg en zij $k \in \mathbb{N}$. Dan bestaan er niet-lege, disjuncte, clopen $K_1, ..., K_k$ zodanig dat $K = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$.*

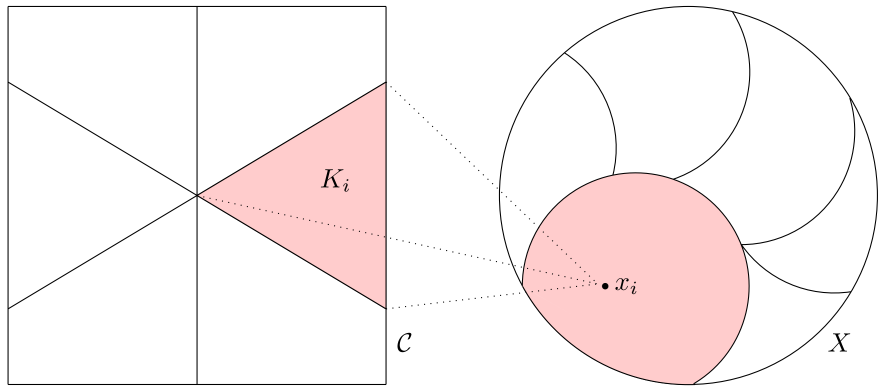
Bewijs: Zij $x_1, ..., x_{k-1} \in K$ verschillend (zie Opmerking 3.3.7) en $s := \min\{|x_i - x_j| \mid i \neq j\}$. Dan zijn de bollen $B(x_i, \frac{s}{2})$ paarsgewijs disjunct. Vanwege Propositie 3.3.6 kunnen we voor elke i een clopen $V_i \subset \mathcal{C}$ vinden zodanig dat $x_i \in V_i \subsetneq B(x_i, \frac{s}{2})$. Definieer $K_i := V_i \cap U$ voor $i = 1, ..., k-1$ en $K_k := K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} K_i\right)$. De K_i's voldoen per constructie aan de voorwaarden. □

Lemma 3.3.9 *Zij X compact en $U \subset X$ open. Dan zijn er voor elke $n \in \mathbb{N}$ rijen $U_1, ..., U_{k_n} \subset U$ en $x_1, ..., x_{k_n} \in U$ zodanig dat voor elke $i \in \{1, ..., k_n\}$ geldt:*
(i) $x_i \in U_i$,
(ii) U_i *is open,*
(iii) $\operatorname{diam}(U_i) < 2^{-n}$,
(iv) $\bigcup_{i=1}^{k_n} U_i = U$.

Bewijs: De open overdekkking $\{B(y, 2^{-(n+1)})\}_{y \in X}$ van X heeft een eindige deeloverdekking, dus bestaan er $y_1, ..., y_k \in X$ zodat $X = \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, 2^{-(n+1)})$ voor een zekere $k \in \mathbb{N}$. Zij $U_i := B(y_i, 2^{-(n+1)}) \cap U$. Omdat U niet leeg is, is ten minste een $U_i \neq \emptyset$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $U_1, ..., U_{k_n}$ niet leeg zijn, terwijl $U_{k_n+1} = ... = U_k = \emptyset$. Kies nu $x_1, ..., x_{k_n}$ in respectievelijk $U_1, ..., U_{k_n}$. □

Stelling 3.3.10 (Hausdorff) *Zij X een compacte metrische ruimte. Dan bestaat er een continue surjectie $f : \mathcal{C} \to X$.*

Bewijs: Pas Lemma 3.3.9 toe op $U = X$ en $n = 1$. Dit geeft een rij open $U_1, ..., U_{k_1}$ met $\operatorname{diam}(U_i) < \frac{1}{2}$ en een rij $x_1, ..., x_{k_1}$ zodanig dat $x_i \in U_i$ voor elke i en $\bigcup_{i=1}^{k_1} U_i = X$. Met Lemma 3.3.8 toegepast op $k = k_1$ vinden we een rij niet-lege, disjuncte, clopen $K_1, ..., K_{k_1} \subset \mathcal{C}$ met $\bigcup_{i=1}^{k_1} K_i = \mathcal{C}$. Definieer $f_1 : \mathcal{C} \to X$ door $f_1 | K_i \equiv x_i$. Dan is f_1 continu, aangezien $f_1^{-1}(U)$ een vereniging van K_i's en dus open is voor elke open $U \subset X$. Pas nu Lemma 3.3.9 toe op elke U_i en $n = 2$. Dan krijgen we rijtjes open $U_{i_1}, ..., U_{i_{k_{1,i}}} \subset U_i$ met $\text{diam}(U_{i_j}) < \frac{1}{4}$ en $x_{i_1}, ..., x_{i_{k_{1,i}}}$ in respectievelijk $U_{i_1}, ..., U_{i_{k_{1,i}}}$. zodanig dat $\bigcup_{j=i_1}^{i_{k_{1,i}}} U_{i_j} = U_i$. Bij elke $k_{1,i}$ vinden we met Lemma 3.3.8 weer een rij disjuncte, niet-lege, clopen $K_{i_1}, ..., K_{i_{k_{1,i}}}$'s met $\bigcup_{j=1}^{k_{1,i}} K_{i_j} = K_i$. Definieer $f_2 : \mathcal{C} \to X$ door $f_2|K_{i,j} \equiv x_{i,j}$. Dan is $f_2 \in C_b(\mathcal{C}, X)$ en bovendien geldt (per constructie) dat $d(f_1(t), f_2(t)) < \frac{1}{2}$ voor alle t.



Door dit proces te itereren krijgen we een rij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_b(\mathcal{C}, X)$, die voldoet aan: $d(f_n(t), f_{n+m}(t)) < 2^{-n}$ voor elke $t \in \mathcal{C}$ en elke $n, m \in \mathbb{N}$. We zien dat $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchyrij is, die volgens Stelling 2.2.49 dus convergeert naar een continue functie $f \in C_b(\mathcal{C}, X)$. We laten zien dat f surjectief is:

Zij $x \in X$ willekeurig. We hebben gezien de bovenstaande constructie een geneste rij open $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset ...$ in X (met $\text{diam}(U_n) < 2^{-n}$) die alle x bevatten en een rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ met $x_n \in U_n$. Nu is $f_1^{-1}(U_1) \supset f_2^{-1}(U_2) \supset f_3^{-1}(U_3) \supset ...$ een geneste rij in $\mathcal{C}$ met $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(U_n) \neq \emptyset$ vanwege Stelling 2.2.39. Kies een $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(U_n)$, dan zien we dat:

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} x_n = x,$$

waaruit de surjectiviteit van f volgt. □

3.4 De stelling van Hahn en Mazurkiewicz

We kunnen nu de stelling van Hahn en Mazurkiewicz bewijzen. Het bewijs combineert de stelling van Hausdorff en de stelling van Mazurkiewicz en Moore.

Gevolg 3.4.1 *Zij X een lokaal samenhangende compacte ruimte. Dan is er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat voor elk paar $x, y \in X$ met $d(x, y) < \delta$ geldt: er is een pad p van x naar y, met* $\text{diam}(p) < \varepsilon$.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Voor elke $x \in X$ bestaat er een samenhangende open omgeving U_x met $\text{diam}(U_x) < \varepsilon$. Zij $\lambda > 0$ het Lebesguegetal van $\{U_x\}_{x \in X}$ (zie Stelling 2.2.44). Laat nu $y, z \in X$ zijn zodat $d(y, z) < \delta := \lambda$. Dan is er een $x \in X$ zodanig dat $Y := \{y, z\} \subset U_x$ en dus bestaat er een pad p van y naar z in U_x. Omdat $p(u) \in U_x$ voor elke $u \in [0, 1]$, zijn we klaar. □

Stelling 3.4.2 (Hahn-Mazurkiewicz) *X is een Peanocontinuüm $\Leftrightarrow$ er bestaat een continue surjectie $f : [0, 1] \to X$.*

Bewijs: ($\Leftarrow$) Zie propositie 3.2.4.
($\Rightarrow$) Zij $f : \mathcal{C} \to X$ de continue surjectie zoals geconstrueerd in Stelling 3.3.10. We willen f uitbreiden naar een continue functie $\overline{f} : [0, 1] \to X$. Schrijf $\mathcal{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, waarbij $U_n = (a_n, b_n)$ en $|U_1| \geq |U_2| \geq ...$ (met $|U_n| = b_n - a_n \to 0$ voor $n \to \infty$). Laat $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ een dalende rij in $(0, \infty)$ zijn met $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Volgens Gevolg 3.4.1 bestaat er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $\eta_n > 0$ zodanig dat:

$$x, y \in X, \; d(x, y) < \eta_n \;\Rightarrow\; \text{er is een pad } p \text{ van } x \text{ naar } y \text{ met } \text{diam}(p) < \varepsilon_n.$$

We mogen hierbij aannemen dat $\eta_n < \eta_{n-1}$ en $\eta_n < \varepsilon_n$ voor elke n. Omdat f uniform continu is op $\mathcal{C}$ (Propositie 2.2.50) kunnen we vervolgens voor elke η_n een $\delta_n > 0$ vinden, zodat voor iedere $n \in \mathbb{N}$:

$$u, v \in \mathcal{C}, \; |u - v| < \delta_n \;\Rightarrow\; d(f(u), f(v)) < \eta_n,$$

waarbij we mogen aannemen dat $\delta_n < \eta_n$ voor elke n. Omdat $|U_m| \to \infty$ voor $m \to \infty$, bestaan er $N_1 < N_2 < ... \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor elke $m > N_n$: $|U_m| = b_m - a_m < \delta_n$. Volgens het bovenstaande (en Opmerking 2.3.23) bestaan er dan dus voor iedere $m > N_n$ continue $p_m : [a_m, b_m] \to X$ zodanig dat $p(a_m) = f(a_m),\ p(b_m) = f(b_m)$ en $\mathrm{diam}(p) < \varepsilon_n$. Verder kunnen we met Stelling 3.1.6 ook paden $p_1, ..., p_{N_1-1}$, definieren zodat $p_m : [a_m, b_m] \to X$, $p_m(a_m) = f(a_m)$ en $p_m(b_m) = f(b_m)$, maar over de diameter van deze paden kunnen we niets zeggen. We maken de beloofde uitbreiding $\overline{f}$ van f nu als volgt:

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in \mathcal{C} \\ p_m(x) & \text{als } x \in U_m \end{cases}$$

Dat $\overline{f}$ surjectief is, zien we direct uit de surjectiviteit van f. We laten zien dat f ook continu is:

Zij $u \in [0, 1]$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig. Als $u \in U_m$, dan volgt de continuïteit van $\overline{f}$ te u meteen uit de continuïteit van p_m op U_m. Veronderstel daarom dat $u \in \mathcal{C}$. Bepaal een $n \in \mathbb{N}$ zodat $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$ en zij $v \in (u - \delta_n, u + \delta_n)$ willekeurig. Als $v \in \mathcal{C}$, zien we dat $|u - v| < \delta_n$, dus is

$$d(\overline{f}(u), \overline{f}(v)) = d(f(u), f(v)) < \eta_n < \varepsilon_n < \varepsilon$$

Veronderstel $v \notin \mathcal{C}$. Dan is $v \in U_m = (a_m, b_m)$ voor een zekere $m > N_n$. Als $u \leq a_m < v$, dan is

$$\begin{aligned} d(\overline{f}(u), \overline{f}(v)) &\leq d(\overline{f}(u), \overline{f}(a_m)) + d(\overline{f}(a_m), \overline{f}(v)) \\ &= d(f(u), f(a_m) + d(p_m(a_m), p_m(v)) \\ &< \eta_n + \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Als $v < b_m \leq u$, dan volgt op dezelfde manier dat $d\overline{f}(u), \overline{f}(v)) < \varepsilon$. We zien dat $\overline{f}$ continu is in x en dus op heel $[0, 1]$. $\square$

4 Een generalisatie

4.1 Gegeneraliseerde Peanocontinua

Voor de generalisatie van de stelling van Hahn en Mazurkiewicz voeren we het begrip gegeneraliseerd Peanocontinuüm in. We zullen zien dat deze ruimtes een groot aantal eigenschappen van Peanocontinua hebben. Naast een aantal voorbeelden van gegeneraliseerde Peanocontinua zullen we ook kijken naar de relatie met continue en perfecte functies.

Definitie 4.1.1 Een **gegeneraliseerd Peanocontinuüm** is een lokaal compacte, samenhangende, lokaal samenhangende metrische ruimte (X, d).

Opmerking 4.1.2 We zullen vanaf nu aannemen dat gegeneraliseerde Peanocontinua niet compact zijn. Een compact gegeneraliseerd Peanocontinuüm is immers gewoon een Peanocontinuüm en daarvoor hebben we al een karakterisering.

Propositie 4.1.3 *Zij (X, d) een gegeneraliseerd Peanocontinuüm. Dan is X:*
(i) σ-compact,
(ii) separabel,
(iii) lokaal padsamenhangend,
(iv) padsamenhangend.

Bewijs: Uit Stelling 2.3.50 volgt σ-compactheid en dus zien we met Propositie 2.2.35 dat X ook separabel is. Wegens Stelling 2.2.56 is X volledig metriseerbaar en dus bestaat er een metriek d' op X die equivalent is aan d, zodat (X, d') volledig is. Met Gevolg 3.1.7 zien we dat (X, d') lokaal padsamenhangend en dus ook padsamenhangend is. Omdat d equivalent is aan d', volgt dat (X, d) deze eigenschappen ook heeft. □

Gevolg 4.1.4 *Het product van twee gegeneraliseerde Peanocontinua X, Y is een gegeneraliseerd Peanocontinuüm.*

Bewijs: Uit Propositie 4.1.3 volgt dat X en Y separabel zijn en dus beide de tweede aftelbaarheidseigenschap hebben. Met Propositie 2.1.58 zien we dat $X \times Y$ metriseerbaar is. Verder zien we dat $X \times Y$ samenhangend (Propositie 2.3.11), lokaal samenhangend (2.3.21) en lokaal compact (2.2.28) is. □

Lemma 4.1.5 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm en $Y \subset X$ compact. Dan is er een continue functie $f : [0, 1] \to X$ zodanig dat $Y \subset f(X)$.*

Bewijs: Zij $f : \mathcal{C} \to Y$ de continue surjectie uit Stelling 3.3.10. Gebruik de padsamenhang van X om (op dezelfde manier als in het bewijs van de stelling van Hahn en Mazurkiewicz) de gaten in $\mathcal{C}$ op te vullen. □

Opmerking 4.1.6 De geconstrueerde paden in het bovenstaande bewijs hoeven niet in Y te blijven, vandaar dat we niet kunnen eisen dat $f(X) = Y$.

Stelling 4.1.7 (Mazurkiewicz) *Elk gegeneraliseerd Peanocontinuüm is het beeld van een continue functie op $[0, \infty)$.*

Bewijs: Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm. Dan is X σ-compact en dus te schrijven als $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ voor compacte K_n. Maak voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ (aan de hand van Lemma 4.1.5) een continue $f_{2n} : [2n, 2n+1] \to X$, zodat $K_n \subset f_{2n}([2n, 2n+1])$ voor elke n. Gebruik nu de padsamenhang van X om continue $f_{2n+1} : [2n+1, 2(n+1)] \to X$ te maken die voldoen aan:

$$f_{2n+1}(2n+1) = f_{2n}(2n+1),$$
$$f_{2n+1}(2(n+1)) = f_{2(n+1)}(2(n+1)).$$

Definieer $f : [0,\infty) \to X$ door de bovenstaande functies allemaal achter elkaar te plakken. Uit herhaaldelijk toepassen van Lemma 2.3.26 volgt dat f continu is en verder geldt:

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f_{2n}([2n, 2n+1]) \subset f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [2n, 2n+1]\right) \subset f([0,\infty)),$$

waaruit volgt dat f surjectief is. $\square$

Voorbeeld 4.1.8 (Warsawcirkel) Zij $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door:

$$f(t) := \begin{cases} (0, 1-9t) & \text{als } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ (3t-1, -2) & \text{als } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (1, 3t(2+s) - (6+2s)) & \text{als } t \in [\frac{2}{3}, 1] \\ \left(\frac{1}{t}, \sin(t)\right) & \text{als } t \in [1,\infty), \end{cases}$$

waarbij $s := \sin(1)$. Dan is f continu en $\mathcal{W} := f([0,\infty)) = \overline{\mathcal{T}} \cup S$, waarbij $S := (\{0\} \times (-2,-1) \cup [0,1] \times \{-2\} \cup \{1\} \times (-2, s))$ en $\overline{\mathcal{T}} \cap S = \emptyset$. Bij Gevolg 3.1.9 hadden we gezien dat $\overline{\mathcal{T}}$ niet lokaal samenhangend was in $(0,0)$. Aangezien $\mathrm{dist}((0,0), S) = 1$, volgt dat $\mathcal{W}$ ook niet lokaal samenhangend is in $(0,0)$. $\mathcal{W}$ is dus wel het beeld van een continue functie op $[0.\infty)$, maar geen gegeneraliseerd Peanocontinuüm. We zien dat de omkering van Stelling 4.1.7 niet geldt.

Propositie 4.1.9 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm en $f : X \to Y$ perfect. Dan is $f(X) \subset Y$ een gegeneraliseerd Peanocontinuüm.*

Bewijs: Uit Propositie 2.4.2 volgt dat $f(X)$ Hausdorff is. Met Propositie 2.4.3 is $f(X)$ lokaal compact en dus regulier (2.2.25). Omdat X de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft (Propositie 4.1.3) heeft $f(X)$ deze ook (Propositie 2.4.4) en dus is $f(X)$ metriseerbaar met de stelling van Urysohn. Verder is $f(X)$ samenhangend met Propositie 2.3.9 en lokaal samenhangend volgens Propositie 2.3.19. Hiermee zien we dat $f(X)$ inderdaad een gegeneraliseerd Peanocontinuüm is. $\square$

Opmerking 4.1.10 Later zullen we zien dat niet elk gegeneraliseerd Peanocontinuüm het beeld is van een perfecte functie op $[0,\infty)$ (zie Gevolg 4.2.22).

4.2 De Freudenthalcompactificatie

De Freudenthalcompactificatie is een vernuftige manier om onder andere gegeneraliseerde Peanocontinua in te bedden in een compacte ruimte. Met behulp van deze compactificatie kunnen we onder andere aantonen dat er gegeneraliseerde Peanocontinua bestaan die niet het beeld zijn van een perfecte functie op $[0,\infty)$.

Definitie 4.2.1 Een topologische ruimte heet **hemicompact** als er een rij $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ van compacte deelverzamelingen bestaat zodanig dat er voor elke compacte $K \subset X$ een $n \in \mathbb{N}$ bestaat met $K \subset K_n$. Een dergelijke rij $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ noemen we een **hemicopter**.

Propositie 4.2.2 *Zij (X, τ) een topologische ruimte en $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij compacte deelverzamelingen zodanig dat $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ en $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ voor elke n. Dan is $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een hemicopter.*

Bewijs: Zij $K \subset X$ willekeurig. Dan is K_n° een open overdekking van K en dus bestaan er $n_1, ..., n_m$ zodanig dat $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_{n_i}^{\circ} \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_{n_i}$. Nu is $K \subset K_N$ voor $N = \max\{n_i \mid i = 1, ..., m\}$. $\square$

Propositie 4.2.3 *Elke lokaal compacte, σ-compacte ruimte X is hemicompact.*

Bewijs: Wegens de σ-compactheid is X te schrijven als $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, waarbij K_n compact is voor elke $n \in \mathbb{N}$. Zij $K_n' := \bigcup_{i=1}^{n} K_n$. Dan is elke K_n' nog steeds compact wegens Propositie 2.2.3 en er geldt $K_n' \subset K_{n+1}'$ voor iedere n. Neem nu $K_1'' := K_1'$ en bepaal met Lemma 2.2.26 een compacte L_1 zodanig dat $K_1' \subset L_1^{\circ}$. Definieer $K_2'' := K_1'' \cup L_1$. Voor K_2'' bestaat er een L_2 zodat $K_2'' \subset L_2^{\circ}$. Definieer $K_3 := K_2'' \cup L_2$. Wanneer we dit proces voortzetten krijgen we een rij $\{K_n''\}_{n=1}^{\infty}$ van compacte verzamelingen waarvoor geldt $K_n'' \subset (K_{n+1}'')^{\circ}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Met de vorige propositie is dit een hemicopter en dus is X hemicompact. $\square$

Definitie 4.2.4 Een **uitputtingsrij** in een ruimte X is een familie $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ van compacte, samenhangende deelverzamelingen van X zodanig dat:

- $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$,
- $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$,
- De samenhangscomponenten van $X \setminus K_n$ zijn onbegrensd voor elke n.

Lemma 4.2.5 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm, $K \subset X$ compact en $U \subset X$ open zodanig dat $K \subset U$ en $\overline{U}$ compact is. Zij $\{C_i\}_{i \in I}$ de componenten in $X \setminus K$. Dan is de verzameling $I_U \coloneqq \{i \in I \mid C_i \not\subset U\}$ eindig.*

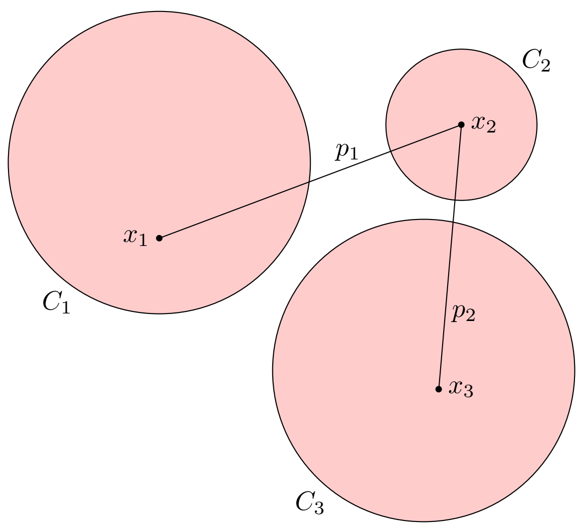
Bewijs: Zij $L \subset X$ compact zodanig dat $K \subset L^{\circ}$ (zie Lemma 2.2.26). Het is duidelijk voldoende om te laten zien dat $I_{U \cap L^{\circ}}$ eindig is. Omdat X lokaal compact is, is elke C_i open in X (Propositie 2.3.14) en dus ook in $X \setminus K_n$. Bovendien is elke C_i gesloten in $X \setminus K$, maar niet in X (want X is samenhangend). Daarom is $\mathrm{Cl}_X(C_i) \cap K \neq \emptyset$ en dus $C_i \cap U \neq \emptyset$. Voor elke $i \in I_U$ is bovendien $C_i \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, waaruit volgt dat $C_i \cap \partial U \neq \emptyset$. Bovendien is $\partial Y \subset X \setminus K_n$ en dus is $\{C_i\}_{i \in I}$ een open overdekking van ∂U. Omdat $\overline{U}$ compact is, is ∂U compact (want ∂U is gesloten) en dus bestaan er $C_1, ..., C_m$ zodanig dat $\partial U \subset \bigcup_{j=1}^{m} C_j$. Uit Propositie 2.3.6 volgt dat elke C_i met $i \in I_U$ een van de C_j's moet zijn en dus is I_U eindig. $\square$

Gevolg 4.2.6 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm en $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een uitputtingsrij in X. Dan is het aantal samenhangscomponenten in $X \setminus K_n$ eindig voor elke $n \in \mathbb{N}$.*

Bewijs: Zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en schrijf $X \setminus K_n = \bigcup_{i \in I} C_i$, waarbij C_i een component van $X \setminus K_n$ is. Met Lemma 4.2.5 is $I_{K_{n+1}^{\circ}} = \{i \in I \mid C_i \not\subset K_{n+1}^{\circ}\}$ een eindige verzameling. Voor elke $i \in I \setminus I_{K_{n+1}^{\circ}}$ is $C_i \subset K_{n+1}^{\circ} \subset K_{n+1}$. Omdat K_{n+1} compact is, heeft deze maar eindig veel samenhangscomponenten (Propositie 2.3.15 en dus zien we dat $I \setminus I_{K_{n+1}^{\circ}}$ ook eindig is. $\square$

Propositie 4.2.7 *Elk gegeneraliseerd continuüm X heeft een uitputtingsrij.*

Bewijs: Uit Propositie 2.3.50 volgt dat X σ-compact is en dus bestaat er volgens Lemma 4.2.3 een rij $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ van compacte deelverzamelingen van X zodat $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ en $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ voor elke n. Veronderstel dat K_m niet samenhangt. Zij $C_1, ..., C_k$ de verschillende samenhangscomponenten van K_m (dit zijn er eindig veel vanwege de compactheid van K_m). Kies een punt $x_i \in C_i$ voor elke i. Omdat X padsamenhangend is, bestaan er $p_1, ..., p_{k-1}$ zodanig dat elke p_i een injectief pad van x_i naar x_{i+1} is. Definieer $K_m' \coloneqq K_m \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} p_i([0,1])\right)$.



Figuur 4.1: Constructie van K_m'

Dan is K_m' een eindige vereniging van compacte verzamelingen en dus compact. Verder is K_m' duidelijk padsamenhangend en dus in het bijzonder samenhangend. Omdat de rij $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een hemicopter is, bestaat er een $N > m$ zodanig dat $K_m' \subset K_{N-1} \subset K_N^{\circ}$. Vervang K_m in de oorspronkelijke rij door K_m' en laat $K_{m+1}, ..., K_{N-1}$ weg. Deze procedure laat zien dat we de K_m'en allen samenhangend kunnen kiezen. Veronderstel nu dat $\{C_i\}_{i \in I}$ begrensde samenhangscomponenten in $X \setminus K_m$ zijn voor een zekere $m \in \mathbb{N}$. Met Lemma 4.2.5 bestaat er een eindige $I_0 \subset I$ zodanig dat $C_i \subset K_{m+1}^{\circ}$ voor alle $i \in I \setminus I_0$. Elke C_i met $i \in I_0$ is gesloten in K_{m+1} en dus compact, dus $C \coloneqq \bigcup_{i \in I_0} C_i$ is compact. Voeg C toe aan K_m volgens de padconstructie van zojuist. Merk op dat de familie $\{C_i\}_{i \in I_0}$ lokaal eindig is. Immers, elke C_i is open en dus bestaat er voor iedere $x \in C_i$ een open omgeving die alleen C_i snijdt. Met Propositie 2.3.44 volgt dat $D \coloneqq \bigcup_{i \in I_0} C_i$ gesloten is in K_m en dus compact. Voeg ook D deze toe aan K_m door een injectief pad. Dit levert een compacte K'_m op, die bevat is in een $K_{N-1} \subset K_N^\circ$ met $N > m$. Door K_m te vervangen door K'_m en $K_{m+1}, ..., K_{N-1}$ weg te laten uit de oorspronkelijke rij zien we dat we elke K_m inderdaad zo kunnen kiezen dat de samenhangscomponenten in $X \setminus K_m$ allen onbegrensd zijn. Hieruit volgt dat er een uitputtingsrij in X bestaat. $\square$

Propositie 4.2.8 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm met uitputtingsrij $\{K_n\}_{n=1}^\infty$. Voor elke samenhangscomponent C_{n+1} in $X \setminus K_{n+1}$ is er een unieke component C_n in $X \setminus K_n$ zodanig dat $C_{n+1} \subset C_n$.*

Bewijs: Omdat C_{n+1} samenhangend is en $C_{n+1} \subset X \setminus K_{n+1} \subset X \setminus K_n$ volgt dit direct uit de definitie van samenhangscomponenten. $\square$

Definitie 4.2.9 Zij $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ een uitputtingsrij in een ruimte X. Een rij $\varepsilon = C_1 \supset C_2 \supset ...$, waar C_n een samenhangscomponent is in $X \setminus K_n$ heet een **Freudenthaleinde** van X. De verzameling van alle Freudenthaleindes van X noteren we met $\mathcal{F}(X)$.

Gevolg 4.2.10 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm met uitputtingsrij $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ Dan is $\#(\mathcal{F}(X)) \geq 1$, maar $\mathcal{F}(X)$ is (hooguit) aftelbaar.*

Bewijs: Omdat K_n compact is voor elke n en X niet, is $X \setminus K_n \neq \emptyset$. Voor elke n is er dus ten minste een samenhangscomponent C_n in $X \setminus K_n$. Uit Propositie 4.2.8 volgt nu dat er zeker een Freudenthaleinde bestaat. De aftelbaarheid volgt meteen uit Proposities en 4.2.6 en 4.2.8. $\square$

Definitie 4.2.11 Zij (X, τ) een topologische ruimte. Een **compactificatie** van X is een topologische ruimte $(\hat{X}, \hat{\tau})$ met een afbeelding $\iota : X \to \hat{X}$ zodanig dat:
- $(\hat{X}, \hat{\tau})$ is compact,
- $\iota(X) \subset \hat{X}$ is dicht,
- $\iota(X) \cong X$ (ι is een inbedding).

Stelling 4.2.12 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm met uitputtingsrij $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{F}(X)$ bijbehorende verzameling van Freudenthaleindes. Dan bestaat er een topologie $\hat{\tau}$ op $\hat{X} \coloneqq X \oplus \mathcal{F}(X)$ die niet afhangt van de keuze van $\{K_n\}_{n=1}^\infty$, zodanig dat $(\hat{X}, \hat{\tau})$ een compactificatie van X is.*

Bewijs: Definieer $\mathcal{B} \coloneqq \tau \cup \{\hat{C}_n\}$, waarbij $\hat{C}_n \coloneqq C_n \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_n \in \varepsilon\}$. Het is duidelijk dat $\bigcup \mathcal{B} = \hat{X}$. Zij $U, V \in \mathcal{B}$. We onderscheiden drie gevallen:
- Als $U, V \in \tau$, dan is $U \cap V \in \tau \subset \mathcal{B}$.
- Als $U = \hat{C}_n$ en $V \in \tau$, dan is $U = C_n \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_n \in \varepsilon\}$ voor een zekere C_n. Omdat C_n open is vanwege Propositie 2.3.14, zien we dat:

$$U \cap V = (C_n \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_n \in \varepsilon\}) \cap (V \oplus \emptyset) = V \cap C_n \in \tau \subset \mathcal{B}.$$

- Als $U = \hat{C}_n, V = \hat{D}_n$, dan is:

$$U \cap V = (C_n \cap D_n) \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_n \in \varepsilon \text{ en } D_n \in \varepsilon\}.$$

  Als $C_n \subset D_n$ of $D_n \subset C_n$, dan is $U \cap V = (C_n \cap D_n) \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_n \cap D_n \in \varepsilon\} \in \mathcal{B}$. Wanneer $C_n \not\subset D_n$ en $D_n \not\subset C_n$, is $U \cap V = C_n \cap D_n \oplus \emptyset \in \tau \subset \mathcal{B}$.

Uit Propositie 2.1.31 volgt dat $\mathcal{B}$ een basis is voor een topologie op $\hat{X}$. Om te laten zien dat $(\hat{X}, \hat{\tau})$ compact is gebruiken we universele netten[1]. Zij $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ een universeel net in $\hat{X} = X \oplus \mathcal{F}(X)$. We laten zien dat $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ convergeert in $\hat{X}$.
- Stel $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ is uiteindelijk in X. Als $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in K_n is voor een $n \in \mathbb{N}$ dan volgt met Gevolg 4.2.6 dat $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ convergeert, dus veronderstel dat $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in $X \setminus K_n$ is voor elke $n \in \mathbb{N}$. Voor iedere n is het aantal componenten in $X \setminus K_n$ eindig en dus is er een Freudenthaleinde $\varepsilon = \{C_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(X)$ zodanig dat $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in C_n voor iedere n. Maar dan is $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in elke open omgeving van ε, waaruit volgt dat $x_\iota \to \varepsilon$.
- Stel $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ is uiteindelijk in $\mathcal{F}(X)$. Wederom vanwege het feit dat het aantal componenten van $X \setminus K_n$ eindig is, volgt dat $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in $C_n \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_n \in \varepsilon\}$ is en dus convergeert $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ naar $\varepsilon = \{C_n\}_{n=1}^\infty$.

Hiermee zien we dat $\hat{X}$ compact is. Verder is de afbeelding $\iota : X \to \hat{X}$ gedefinieerd door $\iota(x) = x$ voor alle $x \in X$ duidelijk een homeomorfisme (en dus een inbedding), aangezien $\hat{\tau} \restriction X = \tau$. Rest ons nog te bewijzen dat X dicht is in $\hat{X}$. Zij $\varepsilon = \{C_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(X)$. Kies voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $x_n \in C_n$. Dan is $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ een net in X dat uiteindelijk in elke open omgeving van ε belandt en dus zien we dat $x_n \to \varepsilon$, waaruit volgt dat X inderdaad dicht is in $\hat{X}$. $\square$

[1]Dit bewijs is afkomstig uit [4].

Definitie 4.2.13 $\hat{X}$ is de **Freudenthalcompactificatie** van X.

Propositie 4.2.14 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm. Dan geldt:*
(i) $\hat{X}$ is Hausdorff.
(ii) $\hat{X}$ heeft de tweede aftelbaarheidseigenschap.
(iii) $\hat{X}$ is metriseerbaar.

Bewijs:
(i) Voor elk paar $x, y \in X$, $x \neq y$ zijn er zeker disjuncte $U, V \in \tau$ zodanig dat $x \in U$, $y \in V$, want X is een metrische ruimte en dus Hausdorff. Laat $x \in X$ en $\varepsilon = \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(X)$ zijn. Aangezien $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ voor alle n en $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x \in K_N^{\circ}$, oftewel $x \notin \overline{C_N}$. Nu is $x \in K_N^{\circ}$, $\varepsilon \in C_N$ en er geldt $K_N^{\circ} \cap C_N = \emptyset$. Ten slotte: zij $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}, \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(X)$, zodanig dat $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Met het oog op Propositie 2.3.6 bestaat er dan een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $C_N \cap D_N = \emptyset$. Omdat $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_N \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_N \in \varepsilon\}$ en $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_N \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_N \in \varepsilon\}$, zijn we klaar.
(ii) Wegens Opmerking 4.1.3 heeft X de tweede aftelbaarheidseigenschap, zij $\mathcal{B}_{\tau}$ een aftelbare basis voor τ. Vanwege Gevolg 4.2.10 is $\mathcal{B}_{\hat{\tau}} \coloneqq \mathcal{B}_{\tau} \cup \{\hat{C}_n\}$ een aftelbare basis voor $\hat{\tau}$.
(iii) Omdat X compact en Hausdorff is en de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft, volgt uit Stelling 2.2.17 dat X metriseerbaar is.

□

Voorbeeld 4.2.15 Zij $X = (0,1)$. Neem de uitputtingsrij $K_n \coloneqq \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$. We zien dat X twee Freudenthaleindes heeft, namelijk $\varepsilon_0 = \{\left(0, \frac{1}{n}\right)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\varepsilon_1 = \{\left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definieer een bijectie $f : [0,1] \to \hat{X}$ door:

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x & \text{als } x \in X \\ \varepsilon_0 & \text{als } x = 0 \\ \varepsilon_1 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

We laten zien dat f continu is. Zij $U \in \mathcal{B}$ willekeurig. Als $U \in \tau$, dan is $f^{-1}(U)$ open in $[0,1]$, dus veronderstel dat $U \in \{C_n\}$. Dan is $U = \left(0, \frac{1}{n}\right) \oplus \varepsilon_0$ of $U = \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right) \oplus \varepsilon_1$. Veronderstel het eerste (het tweede geval gaat analoog). Dan is:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(\left(0, \frac{1}{n}\right) \oplus \varepsilon_0\right) \\ &= f^{-1}\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) \cup f^{-1}(\varepsilon_0) \\ &= \left(0, \frac{1}{n}\right) \cup \{0\} = \left[0, \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

en deze is open in $[0,1]$. We zien dat f continu is en dus volgens Propositie 2.2.10 een homeomorfisme, met andere woorden $\hat{X} \cong [0,1]$.

Lemma 4.2.16 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm en $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een uitputtings rij in X. Dan is $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{F}(X)$ clopen voor elke component C in $X \setminus K_n$ ($n \in \mathbb{N}$).*

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}$.
- Omdat $C \oplus \mathcal{F}(C) = C \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C \in \varepsilon\}$ open is in $\hat{X}$. is $\mathcal{F}(C)$ open in $\mathcal{F}(X)$.
- Voor elke component D in $X \setminus K_n$ met $C \neq D$ is $\mathcal{F}(C) \neq \mathcal{F}(D)$. Bovendien is $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{D \subset X \setminus K_n} \mathcal{F}(D)$. De claim volgt nu uit het feit dat elke $\mathcal{F}(D)$ open is in $\mathcal{F}(X)$. □

Propositie 4.2.17 *Voor elk gegeneraliseerd Peanocontinuüm is $\mathcal{F}(X)$ nuldimensionaal.*

Bewijs: Zij $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(X)$ en U een open omgeving van $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dan is er een basiselement $B \coloneqq \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X) \mid C_m \in \varepsilon\} \subset U$. Merk op $B = \mathcal{F}(C_m)$ clopen is. Hieruit volgt dat $\mathcal{F}(X)$ inderdaad nuldimensionaal is. □

Lemma 4.2.18 *Zij X, Y gegeneraliseerde Peanocontinua en $f : X \to Y$ perfect. Dan bestaat er voor elke $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(X)$ een $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(Y)$ en een strikt stijgende functie $n \to n_k$ zodanig dat $f(C_{n_k}) \subset D_k$ voor alle k.*

Bewijs: Zij $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een uitputtingsrij in X en $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ een uitputtingsrij in Y. Omdat f perfect en dus proper is, is $f^{-1}(L_1) \subset X$ compact. Dan bestaat er een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $f^{-1}(L_1) \subset K_{n_1}$, aangezien $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een hemicopter is. Nu is $f(K_{n_1}) \supset L_1$ en dus is $f(C_{n_1}) \subset Y \setminus L_1$. Omdat $f(C_{n_1})$ samenhangend is, is $f(C_{n_1}) \subset D_1$ voor een samenhangscomponent D_1 in $X \setminus L_1$. Bepaal nu een $n_2 > n_1$ zodanig dat $f^{-1}(L_2) \subset K_{n_2}$. Dan is $f(C_{n_2}) \subset Y \setminus L_2$ en dus is er een samenhangscomponent $D_2 \subset Y \setminus L_2$ met $f(C_{n_2}) \subset D_2$. Omdat $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, is $D_2 \subset D_1$ met Propositie 4.2.8. Dit proces kunnen we voortzetten en dit levert de gevraagde rij $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$. □

Propositie 4.2.19 *Zij X, Y gegeneraliseerde Peanocontinua en $f : X \to Y$ perfect. Dan bestaat er een continue uitbreiding $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ met een continue restrictie $f_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$.*

Bewijs: Voor een $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(X)$ definiëren we $\hat{f}(\{C_n\}_{n=1}^{\infty}) \coloneqq \{D_k\}_{k=1}^{\infty}$, met $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ zoals in Lemma 4.2.18. We mogen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $f(C_1) \subset D_1$. Immers, we kunnen altijd het eerste element van de uitputtingsrij in Y vervangen door $\emptyset$ en dit verandert niets aan $\mathcal{F}(Y)$. Zij $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ een convergent net in $\hat{X}$ en zij $x \in \hat{X}$ zodanig dat $x_\iota \to x$. Als $x \in X$, dan is $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in X en dus convergeert $\{\hat{f}(x_\iota)\}_{\iota \in I}$ naar $\hat{f}(x) = f(x)$ vanwege de continuïteit van f. Veronderstel dat $x \in \mathcal{F}(X)$. Dan is $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ uiteindelijk in $\mathcal{F}(x)$, dus er bestaat een $\iota_0 \in I$ zodanig dat $x_\iota \in \mathcal{F}(x)$ voor alle $\iota \geq \iota_0$. Zij $x_\iota = \{C_n^{(\iota)}\}_{n=1}^{\infty}$ voor elke $\iota \geq \iota_0$ (met $f(x_\iota) = \{D_k^{(\iota)}\}_{k=1}^{\infty}$) en $x = \{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ (met $f(x) = \{D_k\}_{k=1}^{\infty}$). Zij $m \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan is er een $n_m \in \mathbb{N}$ zodanig dat $f(C_{n_m}) \subset D_m$. Vervolgens bestaat er vanwege $x_\iota \to x$ een $\iota_m \in I$ zodanig dat voor elke $\iota \geq \iota_m$ geldt: $C_{n_m} \in \{C_n^{(\iota)}\}_{n=1}^{\infty}$, zij $C_{i_m}^{(\iota)} = C_{n_m}$. Bepaal een $j_m \geq i_m$ zodanig dat $f(C_{j_m}^{(\iota)}) \subset D_m^{(\iota)}$. Nu is:

$$D_m \supset f(C_{n_m}) = f(C_{i_m}^{(\iota)}) \supset f(C_{j_m}^{(\iota)}) \subset D_m^{(\iota)}$$

en dus is $D_m \cap D_m^{(\iota)} \neq \emptyset$, waaruit volgt dat $D_m = D_m^{(\iota)}$. Maar dan is $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \in D_m \oplus \{\varepsilon \in \mathcal{F}(Y) \mid D_m \in \varepsilon\}$ voor alle $\iota \geq \iota_m$ en dus is $f(x_\iota) \to f(x)$. Met Propositie 2.1.42 volgt dat f continu is. □

Lemma 4.2.20 *Zij X, Y gegeneraliseerde Peanocontinua en $f : X \to Y$ een perfecte surjectie. Dan zijn de in Propositie 4.2.19 geconstrueerde functies $f_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ en $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ surjectief.*

Bewijs: Omdat $\hat{X}$ compact is, $\hat{Y}$ metriseerbaar en $\hat{f}$ continu, volgt met Propositie 2.2.9 dat $\hat{f}$ gesloten is. Met Lemma 2.1.12 zien we dat $\hat{f}$ surjectief is. Omdat $\hat{f} = f \oplus f_*$, volgt dat ook f_* surjectief is. □

Gevolg 4.2.21 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm en $f : [0, \infty) \to X$ een perfecte surjectie. Dan is $\#(\mathcal{F}(X)) = 1$.*

Bewijs: Aangezien $[0, n]$ een uitputtingsrij van $[0, \infty)$ is, zien we dat $\mathcal{F}([0, \infty))$ uit slechts een element bestaat. Als $f : [0, \infty) \to X$ een perfecte surjectie is, zien we met Lemma 4.2.20 dat $f_* : \mathcal{F}([0, \infty)) \to F(X)$ surjectief is en dus is $\#(\mathcal{F}(X)) = 1$. □

Gevolg 4.2.22 *Er bestaat geen perfecte surjectie $f : [0, \infty) \to (0, 1)$.*

Bewijs: Stel dat $f : [0, \infty) \to (0, 1)$ een perfecte surjectie is. Dan volgt uit Gevolg 4.2.21 dat $\#(\mathcal{F}((0, 1))) = 1$. In Voorbeeld 4.2.15 hebben we echter gezien dat $\mathcal{F}((0, 1))$ uit twee elementen bestaat en dus kan zo'n perfecte surjectie niet bestaan. □

Opmerking 4.2.23 Zij X, Y, Z gegeneraliseerde Peanocontinua en $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ perfect. Als $h = g \circ f$, dan kunnen we $h_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Z)$ gelijk aan $g_* \circ f_*$ nemen. Als f, g surjectief zijn, dan volgt met Lemma 4.2.20 dat h_* ook surjectief is.

4.3 Grafen

Omdat $[0, \infty)$ niet functioneert zoals gewenst, zullen we nu kijken naar topologische bomen, die een generalisatie van de halfrechte zullen blijken te zijn. Hiervoor zullen we eerst kort het begrip samentrekbaarheid herhalen. Vervolgens zullen we zien dat elke boom gegeneraliseerde Peanocontinuüm is. Daarom kunnen we de eerder besproken Freudenthalcompactificatie van een zo'n boom bekijken, die een belangrijke schakel zal zijn in de uiteindelijke stelling.

4.3.1 Homotopie van functies

Definitie 4.3.1 Zij X, Y topologische ruimtes en $f, g \in C(X, Y)$. Een **homotopie** van f naar g is een continue afbeelding $h : X \times [0, 1] \to Y$, $(x, t) \to h_t(x)$ zodanig dat $h_0 \equiv f$ en $h_1 \equiv g$. Wanneer er zo'n homotopie h bestaat, noemen we f en g **homotoop** en schrijven we $f \sim g$.

Lemma 4.3.2 *Homotopie van functies is een equivalentierelatie op $C(X, Y)$.*

Definitie 4.3.3 Een afbeelding $f \in C(X, Y)$ is een **homotopie-equivalentie** als er een $g \in C(Y, X)$ bestaat zodanig dat $g \circ f \in C(X)$ homotoop is aan id_X en $f \circ g \in C(Y)$ homotoop is aan id_Y. Wanneer er zo'n homotopie-equivalentie $f \in C(X, Y)$ bestaat, noemen we X en Y **homotopie-equivalent** en schrijven we $X \sim Y$.

Definitie 4.3.4 Een topologische ruimte (X, τ) noemen we **samentrekbaar** als deze homotopie-equivalent is aan een eenpuntsruimte $\{x\}$.

Propositie 4.3.5 *Een ruimte X is samentrekbaar $\Leftrightarrow$ id_X is homotoop aan een constante afbeelding.*

Bewijs: ($\Rightarrow$) Zij $f \in C(X, \{x\})$ een homotopie-equivalentie. Dan bestaat er een $g \in C(\{x\}, X)$ zodanig dat $g \circ f \sim id_X$ en $f \circ g \sim id_{\{x\}}$. Echter, $g \circ f$ is constant, aangezien f constant moet zijn.
($\Leftarrow$) Zij $x \in X$ e

Bewijs: Een eindige boom is □

n $f : X \to \{x\}$ zodanig dat $f \sim id_X$. Dan is $f \circ id_{\{x\}} = id_{\{x\}}$ en $g \circ f = f \sim id_X$. Dus is X samentrekbaar. □

Definitie 4.3.6 Een $X \subset \mathbb{R}^n$ heet **stervormig** als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat voor elke $x \in X$ en $t \in [0, 1]$ geldt dat $tx + (1 - t)x_0 \in X$.

Voorbeeld 4.3.7 Voor iedere n is $\mathbb{R}^n$ is stervormig, evenals de eenheidsbal $\mathbb{D}_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. De cirkel $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ echter niet.

Propositie 4.3.8 *Elk stervormig gebied $X \subset \mathbb{R}^n$ is samentrekbaar.*

Bewijs: Definieer $h : [0, 1] \times X \to X$ door $h_t(x) = (1 - t)x + tx_0$. Dan is h continu en bovendien geldt: $h_0(x) = x$ en $h_1(x) = x_0$. Hieruit volgt dat id_X en de constante afbeelding $x \mapsto x_0$ homotoop zijn en dus is X samentrekbaar volgens Propositie 4.3.5. □

Propositie 4.3.9 *Elke samentrekbare ruimte X is padsamenhangend.*

Bewijs: Zij $y \in X$ zodanig dat id_X homotoop is aan de constante afbeelding $f_y : x \mapsto y$ voor alle $x \in X$. We laten zien dat er voor een willekeurige $x \in X$ een pad van x naar y bestaat (dat is voldoende voor padsamenhang, wegens Gevolg 2.3.27). Zij $h : [0, 1] \times X \to X$ een homotopie van id_X naar f_y. Dan is $h_t(x) : [0, 1] \to X$ het gezochte pad, aangezien $h_0(x) = id_X(x) = x$ en $h_1(x) = f_y(x) = y$. □

Voorbeeld 4.3.10 S^1 is niet samentrekbaar.

4.3.2 Topologische grafen

Definitie 4.3.11 Een **topologische graaf** $G = (E, \sim)$ is een quotiëntenruimte $G = ([0, 1] \times (E, \tau_{disc}))/\sim$, waarbij E een verzameling is met daarop een equivalentierelatie $\sim$ die voldoet aan:
- $(x, e) \sim (y, f) \Rightarrow x, y \in \{0, 1\}$ voor $e, f \in E$,
- $(e, 0) \not\sim (e, 1)$ voor elke $e \in E$,
- $\#\{(x, y) \in \{0, 1\}^2 \mid (x, e) \sim (y, f)\} \leq 1$ voor elk tweetal $e, f \in E$, $e \neq f$.

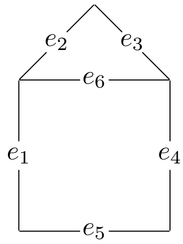
De elementen van E noemen we de **lijnen** van G.

Opmerking 4.3.12
- De tweede en derde eis op de equivalentierelatie voorkomen dat er lijnen van een punt naar zichzelf in G voorkomen alsmede meerdere lijnen tussen twee punten.
- De keuze voor $[0, 1]$ volstrekt willekeurig. Elk gesloten en begrensd interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ voldoet (zie ook Opmerking 2.3.23).

Voorbeeld 4.3.13 Zij $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ en $\sim$ de equivalentierelatie gedefinieerd door:

- $(1, e_1) \sim (0, e_2)$,
- $(1, e_1) \sim (0, e_6)$,
- $(1, e_2) \sim (0, e_3)$,
- $(1, e_3) \sim (0, e_4)$,
- $(1, e_4) \sim (0, e_5)$,
- $(1, e_5) \sim (0, e_1)$,
- $(1, e_6) \sim (1, e_3)$.

Dan komt de bijbehorende topologische graaf G overeen met het rechts getekende huisje.



Figuur 4.2: G

Definitie 4.3.14 Voor een topologische graaf $G = (E, \sim)$ definiëren we $V := \{[(x, e)] \mid x \in \{0, 1\}, e \in E\}$ de verzameling van **punten** van G. Twee punten $v, w \in V$ zijn **buren** als er een $e \in E$ bestaat zodanig dat $v = [(x, e)]$ en $w = [(y, e)]$ voor $x \neq y \in \{0, 1\}$.

Opmerking 4.3.15 Zij V een verzameling en E een collectie van paren (v, w) uit V, $v \neq w$, zodanig dat elke v uit V voorkomt in een ten minste een paar uit E. Dan kunnen we hier een topologische graaf van maken door een geschikte equivalentierelatie op E te definiëren.

Definitie 4.3.16 Zij $G = (E, \sim)$ een topologische graaf met puntenverzameling V en zij $W \subset V$. Dan is $G_W := (E_W, \sim_W)$, waarbij $E_W := \{e \in E \mid [(0, e)], [(1, e)] \in W\}$ en $\sim_W$ de restrictie van $\sim$ tot E_W, de **deelgraaf voortgebracht door** W.

Voorbeeld 4.3.17 Beschouw de huisjesgraaf uit Voorbeeld 4.3.13 en zij $W := \{[(1, e_1)], [(1, e_2)], [(1, e_3)]\}$. Dan is G_W het dak van het huis.

Definitie 4.3.18 Zij $G = (E, \sim)$ een topologische graaf en $v = [(x, e)] \in V$ (met $x \in \{0, 1\}$). De **graad** van v is $d_v := \#[(x, e)]$.

Definitie 4.3.19 Een graaf $G = (E, \sim)$ heet **lokaal eindig** als elke $v \in V$ eindige graad heeft.

Voorbeeld 4.3.20 Zij $E_{\mathbb{N}} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\sim$ de equivalentierelatie op $[0, 1] \times E_{\mathbb{N}}$ gedefinieerd door $(1, e_n) \sim (0, e_{n+1})$ voor elke n. Dan is de bijbehorende graaf $G = (E, \sim)$ lokaal eindig en samentrekbaar.

4.3.3 Bomen

Definitie 4.3.21 Een **boom** is drietal $T = (E, \sim, v_0)$, waarbij $(E, \sim)$ een lokaal eindige, samentrekbare topologische graaf is en v_0 een punt is zodanig dat voor elke $v \neq v_0$ geldt: $d_v \geq 2$. Het punt v_0 noemen we de **stam** van T.

Voorbeeld 4.3.22 De halfrechte $[0, \infty)$ is een boom, waarbij $v_0 = 0$ en $V = \mathbb{N}_0$.

Propositie 4.3.23 *Voor elke boom $T = (E, \sim, v_0)$ is zowel de puntenverzameling V als de lijnenverzameling E aftelbaar.*

Bewijs: We kunnen V aftellen op de volgende manier. De buren van v_0 noemen we $v_1, ..., v_{n_1}$ (dit zijn er eindig veel aangezien T lokaal eindig is). Vervolgens nummeren we de buren van v_1 door $v_{n_1+1}, ..., v_{n_2}$, de buren van v_2 door $v_{n_2+1}, ..., v_{n_3}$ enzovoort. Het is duidelijk dat we op deze manier alle punten in T krijgen en dus is V aftelbaar. Nu volgt uit het feit dat T lokaal eindig is dat ook E aftelbaar is. $\square$

Propositie 4.3.24 *Zij $T = (E, \sim, v_0)$ een boom. Dan is de quotiënt-afbeelding $q : [0, 1] \times (E, \tau_{disc}) \to T$ perfect.*

Bewijs: Allereerst merken we op dat $[\{x, e\}] \subset T$ gesloten is voor elke $x \in [0, 1]$ en elke $e \in E$. Voor $x \in (0, 1)$ volgt dit meteen, aangezien $[0, 1] \times E$ de T_1-eigenschap heeft. Als $x \in \{0, 1\}$, dan is $[(x, e)]$ eindig en dus is $q^{-1}([(x, e)])$ een eindige vereniging van losse punten en dus gesloten. We zien dat $q^{-1}([x, e])$ compact is (want een gesloten $C \subset [0, 1] \times (E, \tau_{disc})$ is compact $\Leftrightarrow$ $p_2(C)$ is eindig). Zij nu $C \subset [0, 1] \times E$ gesloten. Er geldt: $q(C) \subset T$ gesloten $\Leftrightarrow$ $q^{-1}(q(C)) \subset [0, 1] \times E$ gesloten $\Leftrightarrow$ $p_2(q^{-1}(q(C))) \subset [0, 1]$ gesloten. Als $C = D \times F$ voor een gesloten $D \subset [0, 1]$ en een $F \subset E$, dan is $p_2(q^{-1}(q(D \times F))) = p_2(D \times [F]) = D$, waarbij $[F] = \{e' \in E \mid e' \in [x, e]$ voor zekere $x \in D, e \in F\}$.

Met het oog op Opmerking 2.1.54 zien we dat $q(C) \subset T$ inderdaad gesloten is voor elke gesloten $C \subset [0,1] \times E$ en dus is q perfect. $\square$

Stelling 4.3.25 *Elke boom T is een gegeneraliseerd Peanocontinuüm.*

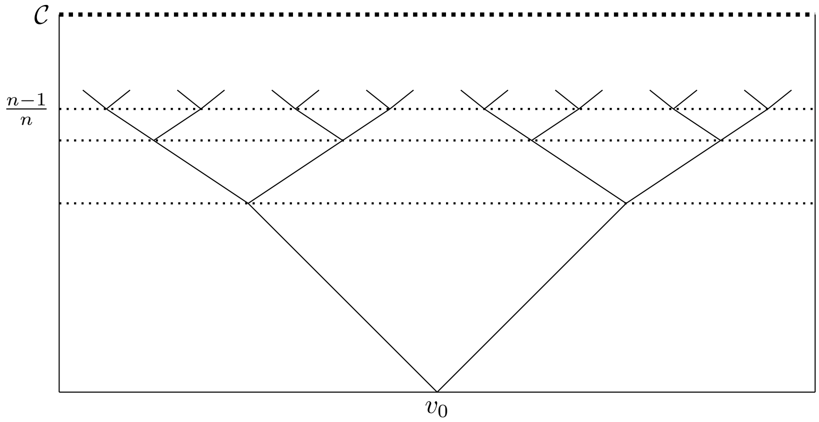
Bewijs: Omdat E en $[0,1]$ beide de tweede aftelbaarheidseigenschap hebben (E is aftelbaar), heeft $E \times [0,1]$ deze ook (2.1.56). De quotiëntafbeelding $q : [0,1] \times E \to T$ is perfect met Propositie 4.3.24 en dus volgt uit Propositie 2.4.4 dat T de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft. Omdat $[0,1]$ en E beiden lokaal compact en regulier zijn, is $[0,1] \times E$ lokaal compact en regulier (propsities 2.2.28 en 2.1.57) en dus Hausdorff. Uit Proposities 2.4.3 en 2.4.2 volgt dat T lokaal compact en Hausdorff is en dus regulier (Propositie 2.2.25). Met de stelling van Urysohn zien we dat T metriseerbaar is. Uit de samentrekbaarheid van T volgt samenhang en omdat $[0,1]$ en E beiden lokaal samenhangend zijn, volgt uit Propositie 2.3.21 en Propositie 2.3.19 dat T ook lokaal samenhangend is. $\square$

Definitie 4.3.26 Een **eindige boom** is een samentrekbare eindige graaf $S = (E, \sim)$.

Propositie 4.3.27 *Elke eindige boom is homeomorf aan een gesloten deelverzameling van* $[0,1] \times [0,1]$.

Propositie 4.3.28 *Elke eindige boom is een Peanocontinuüm.*

Voorbeeld 4.3.29 (Binaire Cantorboom)



Figuur 4.3: De binaire Cantorboom ingebed in $[0,1] \times [0,1]$.

Definitie 4.3.30 Zij (X, τ) een topologische ruimte en $x, y \in X$, $x \neq y$. Een pad p van x naar y heet **direct** als p injectief is. We noemen zo'n direct pad **semi-uniek** als voor elk ander direct pad q van x naar y geldt: $q([0,1]) = p([0,1])$.

Opmerking 4.3.31 Twee directe paden met hetzelfde beeld kunnen hun routes met verschillende snelheden doorlopen, en hoeven dus niet gelijk te zijn.

Lemma 4.3.32 *Zij (X, τ) een topologische ruimte en $x, y \in X$, $x \neq y$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*
(i) Er bestaat een pad van x naar y.
(ii) Er bestaat een direct pad van x naar y.

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii) Zij p een pad van x naar y. Dan is $p([0,1]) \subset X$ een Peanocontinuüm vanwege Stelling 3.4.2 en dus bestaat er met Stelling 3.1.6 een injectief pad van x naar y.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Elk direct pad is in het bijzonder een pad. $\square$

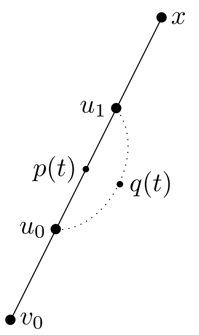
Stelling 4.3.33 *Zij $T = (E, \sim, v_0)$ een lokaal eindige graaf met $v_0 \in V$ zodanig dat $d_v \geq 2$ voor alle $v \neq v_0$. Dan zijn equivalent:*
(i) T is een boom.
(ii) Elke samenhangende deelruimte S van T is samentrekbaar.
(iii) Voor elke $x \in T$ is er een semi-uniek direct pad van v_0 naar x.

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii)
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zij $h : T \times [0,1] \to T$ continu zodanig dat $h_0(x) = x$ en $h_1(x) = v_0$ voor alle $x \in T$. Dan is voor elke vaste x de afbeelding $p : [0,1] \to T$ gedefinieerd door:

$$p(t) \coloneqq h_{1-t}(x)$$

een pad van v_0 naar x. Veronderstel dat ook q een direct pad van v_0 naar x is en dat $p \neq q$. Zij $t \in (0,1)$ zodanig dat $p(t) \neq q(t)$. We mogen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $p(t), q(t) \notin V$. Definieer:

- $u_0 \coloneqq \sup\{s < t \mid p(s) = q(s)\}$,
- $u_1 \coloneqq \inf\{s > t \mid p(s) = q(s)\}$.



Dan zien we achtereenvolgens:
- $u_0 < u_1$,
- $p(u_0) = q(u_0) \neq q(u_1) = p(u_1)$,
- $p((u_0,u_1)) \cap q((u_0,u_1)) = \emptyset$.
- $p([u_0,u_1]) \cong [0,1] \cong q([u_0,u_1])$,
- $p([u_0,u_1]) \cup q([u_0,u_1]) \cong S^1$.

Maar dan is heeft T een niet samentrekbare deelgraaf gezien Voorbeeld 4.3.10.
Een dergelijk direct pad q kan dus niet bestaan.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Zij p_x het semi-unieke directe pad van v_0 naar x voor iedere $x \in X$. Definieer $h : T \times [0,1] \to T$ door:

$$h_t(x) = p_x(t) \text{ voor elke } x \in T.$$

Dan is $h_0(x) = p_x(0) = v_0$ en $h_1(x) = p_x(1) = x$ voor elke $x \in T$. We zien dat h_0 de constante afbeelding $T \to \{v_0\}$ is en $h_1 = id_T$. Continuïteit van h volgt uit de continuïteit van de paden p_x en dus is T samentrekbaar. $\square$

Notatie 4.3.34 Voor elke $v \in V$ noteren we p_v voor het semi-unieke pad van v_0 naar v (met dus $p_v(0) = v_0$ en $p_v(1) = v$). Verder schrijven we $w \leq v$ als er een $t \in [0,1]$ bestaat zodanig dat $p_v(t) = w$ (en $w < v$ als $w \leq v$, maar $w \neq v$).

Gevolg 4.3.35 *Zij T een boom en $v, w \in V \setminus \{v_0\}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*
(i) Er bestaat een direct pad p van v naar w zodat $p(t) \neq v_0$ voor alle $t \in [0,1]$.
(ii) $v \leq w$ of $w \leq v$.

Bewijs: (i) $\Rightarrow$ (ii) Stel $v \not\leq w$. Definieer het pad q door p_w aan p te plakken. Dan is q een direct pad van v_0 naar v aangezien $v \notin p_w([0,1])$. Uit Stelling 4.3.33 volgt dat $q = p_v$ en dus is $w \in p_v([0,1])$, oftewel $w \leq v$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Stel dat $w \leq v$ (de andere variant gaat net zo). Dan is $p_v(t) = w$ voor een zekere $t_0 \in (0,1]$. Definieer $p : [t_0,1] \to T$ door $p(t) \coloneqq p_v(t)$. Dan is p een direct pad van v naar w en $v_0 \notin p([t_0,1])$. $\square$

4.3.4 De Freudenthalcompactificatie voor bomen

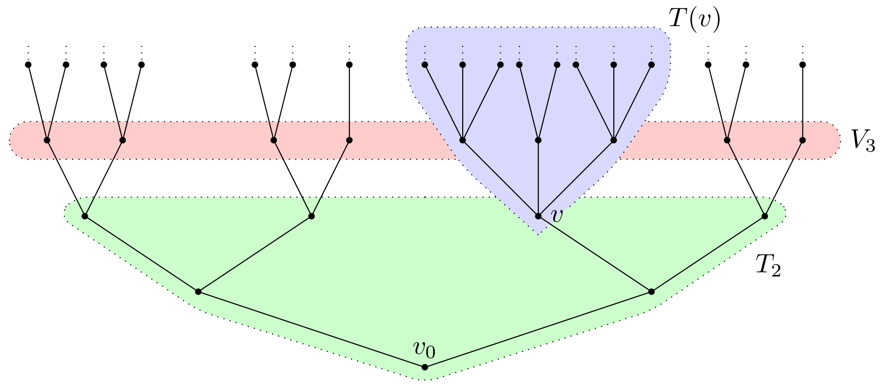
Definitie 4.3.36 Zij $T = (E, \sim, v_0)$ een boom en $v \in V$. Dan definiëren we:
- de **hoogte** van v als $|v| \coloneqq \#\{w \in V \setminus \{v_0\} \mid w \leq v\}$,
- het **n-de niveau** van V door $V_n \coloneqq \{v \in V \mid |v| = n\}$,
- $T_n \coloneqq T_{V_0 \cup \ldots \cup V_n}$ de deelgraaf voortgebracht door alle punten v met hoogte $\leq n$,
- $T(v) \coloneqq T_W$, waarbij $W \coloneqq \{w \in V \mid v \leq w\}$.

Propositie 4.3.37 *Voor elke boom T is $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ een uitputtingsrij in T.*

Bewijs: Elke T_n is een Peanocontinuüm en dus samenhangend en compact. Verder is het duidelijk dat $T_{n-1} \subset T_n^\circ$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Opmerking 4.3.38 Vanaf nu nemen we voor elke boom T als standaarduitputtings rij de bovenstaande rij $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$

Propositie 4.3.39 *Zij $T_{\mathcal{C}}$ de binaire Cantorboom. Dan is $\mathcal{F}(T_{\mathcal{C}}) \cong \mathcal{C}$.*



Figuur 4.4: De verschillende onderdelen van Definitie 4.3.36

Bewijs: Voor elke n heeft $T_{\mathcal{C}} \setminus T_n$ twee samenhangscomponenten $C_n^{(0)}$, $C_n^{(1)}$. Definieer een afbeelding $f : \mathcal{C} \to \mathcal{F}(T_{\mathcal{C}})$ door:

$$f(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) \coloneqq \{C_n^{(x)}\}_{n=0}^{\infty}.$$

Dit is duidelijk een bijectie. Zij $U = \{\varepsilon \in \mathcal{F}(T_{\mathcal{C}}) \mid C_m^{(x_m)} \in \varepsilon\}$ met $m \in \mathbb{N}$ en $x_m \in \{0, 1\}$. Dan liggen de elementen $C_0^{(x_0)}, ..., C_{m-1}^{(x_{m-1})}$ van elke $\varepsilon \in U$ vast en dus is

$$f^{-1}(U) = \{\{x_0\} \times ... \times \{x_m\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times ...\},$$

die open is in $\mathcal{C}$. Hieruit volgt dat f continu is en dus is f een homeomorfisme volgens Gevolg 2.2.10. $\square$

Opmerking 4.3.40 Vanaf nu zullen we elementen van $\mathcal{F}(T)$ schrijven als $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ in plaats van $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Definitie 4.3.41 Zij T een boom en $v \in V$. Dan definiëren we $\mathcal{F}_v(T) \subset \mathcal{F}(T)$ door $\mathcal{F}_v(T) \coloneqq \{\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(T) \mid v \in C_{|v|}\}$.

Propositie 4.3.42 *Zij T een boom en $v, w \in V$. Dan is:*
(i) $\mathcal{F}_v(T) = \{\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(T) \mid T(v) \subset C_{|v|}\}$.
(ii) $w \leq v \Rightarrow \mathcal{F}_v(T) \subset \mathcal{F}_w(T)$.
(iii) $\mathcal{F}_w(T) \subsetneq \mathcal{F}_v(T) \Rightarrow w < v$.
(iv) $\mathcal{F}_v(T) \cap \mathcal{F}_w(T) = \emptyset$ *als* $|v| = |w|$ *en* $v \neq w$.
(v) $\mathcal{F}(T) = \bigcup_{v \in V_n} \mathcal{F}_v(T)$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs:
(i) ($\subset$) Zij $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}_v(T)$. Dan is $v \in C_{|v|}$. Omdat $C_{|v|}$ een samenhangscomponent in $X \setminus T_{|v|-1}$ is en $T(V) \subset X \setminus T_{|v|-1}$ samenhangend is, moet $T(v) \subset C_{|v|}$ zijn.
($\supset$) Dit volgt direct uit $v \in T(v)$.
(ii) Als $w \leq v$, dan is $v \in T(w)$ en dus volgt uit (i) dat $v \in C_{|w|}$ voor elke $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}_w(T)$. Maar dan is $\mathcal{F}_v(T) \subset \mathcal{F}_w(T)$.
(iii) Aangezien $\mathcal{F}_v(T) \not\subset \mathcal{F}_w(T)$, is $v \not\leq w$. Het is dus voldoende om te laten zien dat $w \leq v$. Omdat $\mathcal{F}_v(T) \subset \mathcal{F}_w(T)$, is $v \in C_{|w|}$ en dus bestaat er een (direct) pad van v naar w. Uit het feit dat $v_0 \notin C_{|w|}$, volgt met Gevolg 4.3.35 dat $w \leq v$.
(iv) Stel $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}_v(T) \cap \mathcal{F}_w(T)$. Dan is $v \in C_{|v|}$ en $w \in C_{|v|}$, maar $v_0 \notin C_{|v|}$ en dus bestaat er een pad p van v naar w zodanig dat $v_0 \notin p([0, 1])$. Uit Gevolg 4.3.35 volgt dan dat $v \leq w$ of $w \leq v$, wat in tegenspraak is met de aannames.
(v) Zij $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(T)$. Dan is $C_n \subset X \setminus T_{n-1}$ en dus $C_n \cap V_n \neq \emptyset$. Als $v \in C_n \cap V_n$, dan is $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}_v(T)$. $\square$

Gevolg 4.3.43 *Zij T een boom en $v \in V$ met $|v| = n$. Dan is $\mathcal{F}_v(T) \subset \mathcal{F}(T)$ clopen.*

Bewijs: Dit volgt direct uit de vorige propositie en Lemma 4.2.16. $\square$

4.4 Een generalisatie van de stelling van Hahn en Mazurkiewicz

We kunnen nu de beloofde generalisatie van de stelling van Hahn en Mazurkiewicz bewijzen. We geven drie equivalente beweringen van de uitspraak "X is een gegeneraliseerd Peanocontinuüm".

Stelling 4.4.1 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm, $T = (E, \sim, v_0)$ een boom en $g : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(T)$ een continue afbeelding. Dan bestaat er een perfecte afbeelding $f : X \to T$ zodanig dat $g_* = f$. Als g surjectief is, dan is f dat ook.*

Bewijs: Zij $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ een uitputtingsrij in X. Voor elke $i \in \mathbb{N}$ is $G_i := \{g^{-1}(\mathcal{F}_v(T)) \mid v \in V_i\}$ een clopen overdekking van $\mathcal{F}(X)$ wegens Gevolg 4.3.43. Uit Propositie 4.2.17 volgt dat er een verfijning $\{\mathcal{F}(C)\}$ met C een component in $X \setminus K_{n_i}$ bestaat voor een zekere $n_i \in \mathbb{N}$. We mogen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ een stijgende rij is. Definieer voor elke $m_i := n_i + 1$ en alle componenten $C \subset X \setminus K_{n_i}$ een verzameling $A_C^{(i)} := \partial K_{m_i} \cap C$. Dan is $A_C^{(i)} \subset K_{n_i}$ gesloten en dus compact en bovendien is $A_C^{(i)} \neq \emptyset$, aangezien $K_{n_i} \subset K_{m_i}^{\circ}$. Voor elke i is er een unieke $v_C^{(i)} \in V_i$ zodanig dat $g(\mathcal{F}(C)) \subset \mathcal{F}_{v_C^{(i)}}(T)$. Daarom definiëren we $f|A_C^{(i)} \equiv v_C^{(i)}$ voor elke i en elke C. Merk op dat voor een component D in $X \setminus K_{n_{i+1}}$ geldt:

$$\begin{aligned} D \subset C &\Rightarrow g(\mathcal{F}(D)) \subset g(\mathcal{F}(C)) \\ &\Rightarrow \mathcal{F}_{v_D^{(i+1)}}(T) \subset \mathcal{F}_{v_C^{(i)}}(T) \\ &\Rightarrow v_C^{(i)} \leq v_D^{(i+1)}. \end{aligned}$$

Bekijk nu voor elke component C van $X \setminus K_{n_{i-1}}$ de eindige boom $T_C^{(i-1)}$ voortgebracht door de punten $v_C^{(i-1)}$ en alle punten v_D^i met $D \subset C$. Met de bovenstaande berekening zien we dat dit precies de punten $w \in V$ zijn met $v \leq w$ en $|w| - |v| = 1$. Zij $B_C^{(i-1)} := C \cap \overline{K_{m_i} \setminus K_{m_{i-1}}}$. Dan is $A_C^{(i-1)} \subset B_C^{(i-1)}$. Gebruik de Tietze-uitbreidingsstelling om

$$f : A_C^{(i-1)} \cup \{A_D^{(i)} \mid D \subset C\} \to T_C^{(i-1)}$$

uit te breiden naar een continue functie

$$f_C^{(i-1)} : B_C^{(i-1)} \to T_C^{(i-1)}.$$

Dit geeft voor elke $i \geq 2$ een continue afbeelding

$$f^{(i-1)} : \overline{K_{m_i} \setminus K_{m_{i-1}}} \to \overline{T_i \setminus T_{i-1}}.$$

Definieer ook nog een afbeelding $f^{(0)} : K_{m_1} \to T_1$ door

$$f^{(0)}(x) := \begin{cases} f^{(1)}(x) & \text{als } x \in \partial K_{m_1} \\ v_0 & \text{als } x \in K_{m_1}^{\circ}. \end{cases}$$

Zij $f := \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{(i-1)}$. Dan is $f : X \to T$ continu. Als $K \subset T$ compact is, dan is $K \subset T_i$ voor een zekere i en dus is $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(T_i)$. Omdat $f^{-1}(K)$ gesloten is en

$$\begin{aligned} f^{-1}(T_i) &= f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{i} \overline{T_i \setminus T_{i-1}}\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{i} f^{-1}\left(\overline{T_j \setminus T_{j-1}}\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{i} \overline{K_{m_j} \setminus K_{m_{j-1}}} = K_{m_i} \end{aligned}$$

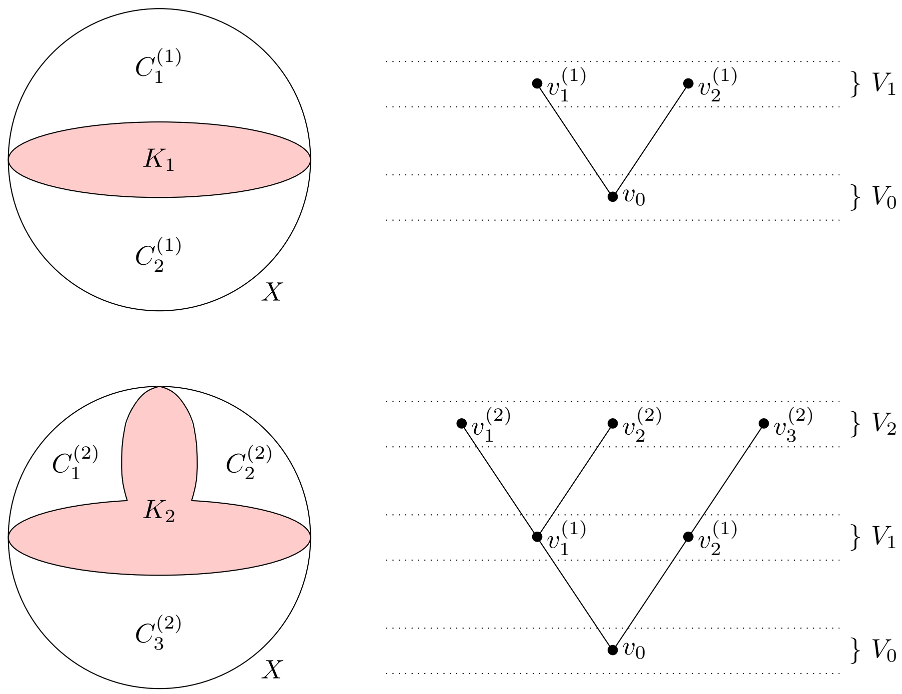
compact is, volgt dat $f^{-1}(K)$ compact is en dus is f perfect. Omdat X samenhangend is, zien we dat $f(X)$ samenhangend is en dus is de boom voortgebracht door v_0 en alle punten $v_C^{(i)}$ bevat in $f(X)$. Als g surjectief is, dan is $V = \{v_0\} \cup \{v_C^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ en dus zien we dat de geconstrueerde f in dat geval ook surjectief is. $\square$

Gevolg 4.4.2 *Zij X een gegeneraliseerd Peanocontinuüm zodanig dat $\mathcal{F}(X) = \mathcal{C}$, de Cantorverzameling. Dan bestaat er voor elke boom $T = (E, \sim, v_0)$ een perfecte surjectie $g : X \to T$.*

Bewijs: Omdat $\mathcal{F}(T)$ compact is, zien we met Stelling 3.3.10 dat er een continue afbeelding $f : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(T)$ bestaat. De claim volgt nu uit Stelling 4.4.1. $\square$

Stelling 4.4.3 (Ayala-Chávez-Quintero) *Voor een topologische ruimte (X, τ) zijn de volgende uitspraken equivalent:*
(i) X is een gegeneraliseerd Peanocontinuüm.
(ii) Er bestaat een boom T en een perfecte surjectie $g : T \to X$ zodanig dat $g_* : \mathcal{F}(T) \to \mathcal{F}(X)$ een homeomorfisme is.
(iii) Er bestaat een perfecte surjectie $f : T_\mathcal{C} \to X$.
(iv) Er bestaat een rij Peanocontinua $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ zodanig dat $X_n \subset X_{n+1}^\circ \subset X$ voor elke n en $\bigcup_{n=1}^\infty X_n = X$.

Bewijs: Zij $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ een uitputtingsrij in X.
(i) $\Rightarrow$ (ii) We bouwen eerst de boom T op. Begin met $V_0 = \{v_0\}$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $V_n = \{v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, ...\}$, waarbij elke $v_i^{(n)}$ correspondeert met precies één samenhangscomponent $C_i^{(n)}$ in $X \setminus K_n$ die uitmaakt van een Freudenthaleinde. We verbinden elk punt uit V_1 met v_0 en verder elk tweetal punten $v_i^{(n)}, v_j^{(n+1)}$ waarvoor geldt dat $C_j^{(n+1)} \subset C_i^{(n)}$, zie figuur 4.5.



Figuur 4.5: Constructie van de boom T.

We laten eerst zien dat dit altijd een boom geeft. Elke $v_i^{(n)} \neq v_0$ heeft graad ≥ 2, aangezien de bijbehorende component $C_i^{(n)}$ deel uitmaakt van een Freudenthaleinde. Met Gevolg 4.2.6 zien we dat deze graad echter niet oneindig groot wordt, dus is T lokaal eindig. We laten nog zien dat T samentrekbaar is. Zij $v \in V \setminus \{v_0\}$ willekeurig en $n := |v|$. Dan correspondeert v met een samenhangscomponent C_n in $X \setminus K_n$ en per constructie is C_n onderdeel van een Freudenthaleinde $\{C_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(X)$. Veronderstel dat er ook een $\{D_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(X)$ bestaat met $D_n = C_n$. Dan is $D_m = C_m$ voor alle $m < n$ vanwege Propositie 2.3.6. Hieruit volgt dat er een semi-uniek direct pad van v_0 naar v bestaat en dus is T samentrekbaar.

We maken nu de perfecte surjectie $g : T \to X$ als volgt:
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zij T de gegeven boom en $g : T \to X$ een perfecte surjectie. Met Propositie 4.3.39 is $\mathcal{F}(T_\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Uit Gevolg 4.4.2 volgt dat er een perfecte surjectie $h : T_\mathcal{C} \to T$ bestaat en dus is $f : T_\mathcal{C} \to X$ gedefinieerd door $f := g \circ h$ een perfecte surjectie.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Zij $T_n \subset T_\mathcal{C}$ als in Definitie 4.3.36 en $Y_n := f(T_n)$. Dan is T_n een Peanocontinuüm voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en dus volgt uit Stelling 3.4.2 dat elke $Y_n \subset X$ een Peanocontinuüm is. Uit Propositie 2.4.3 volgt dat X lokaal samenhangend is en dus is er volgens Lemma 2.2.26 voor elke n een open U_n zodanig dat $\overline{U_n}$ compact is en $Y_n \subset U_n$. Omdat f perfect is, is $f^{-1}(\overline{U_n}) \subset T_\mathcal{C}$ compact en dus bestaat er wegens Propositie 4.2.2 een $k_n > n$ zodanig dat:

$$T_n \subset f^{-1}(U_n) \subset f^{-1}(\overline{U_n}) \subset T_{k_n}.$$

Nu is $Y_n \subset U_n \subset Y_{k_n}$ en dus is $Y_n \subset Y^\circ_{k_n}$ voor elke n. Wanneer we nu inductief de rij $X_1 := Y_1$, $X_2 := Y_{k_1}$, $X_3 := Y_{k_{k_1}}, \ldots$ definiëren, dan volgt uit de surjectiviteit van f dat $\bigcup_{n=1}^\infty X_n = X$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) We laten zien dat X is:

- (Normaal) Zij $C, D \subset X$ disjunct en gesloten. Dan zijn $C \cap X^\circ_n, D \cap X^\circ_n$ gesloten in X°_n. Omdat X°_n metriseerbaar en dus normaal is, bestaan er disjuncte open U_n, V_n voor elke n zodanig dat $C \cap X^\circ_n \subset U_n$ en $D \cap X^\circ_n \subset V_n$. Omdat $X^\circ_n \subset X^\circ_{n+1}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, kunnen we de U_n-en en V_n-en bovendien zo kiezen dat $U_n \subset U_{n+1}$ en $V_n \subset V_{n+1}$ voor elke n. Zij $U := \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ en $V := \bigcup_{n=1}^\infty V_n$. Dan is $C \subset U$, $D \subset V$ en $U \cap V = \emptyset$ en dus zien we dat X normaal is.
- (Metriseerbaar) Met het oog op Stelling 2.1.28 is het voldoende om te laten zien dat X de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft. Zij $\mathcal{B}_n$ een aftelbare basis voor elke τ_n. Dan is $\mathcal{B} := \{B_i^{(n)} \in \mathcal{B}_n\}_{n=1}^\infty$ aftelbaar. Zij $U \in \tau$ willekeurig. Dan is $U = \bigcup_{n=1}^\infty U \cap X_n$, waarbij $U \cap X_n \in \tau_n$ voor elke n. Omdat $U \cap X_n = \bigcup_i B_i^{(n)}$ voor zekere basiselementen, zien we dat $U = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_i B_i^{(n)}$, waaruit volgt dat $\mathcal{B}$ een basis is voor τ.
- (Samenhangend) Zie Propositie 2.3.3.
- (Lokaal samenhangend) Zij $x \in X$ en N een omgeving van x. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x \in X^\circ_n$. Deze is lokaal samenhangend volgens Propositie 2.3.13 en dus bestaat er een samenhangende open $U \subset X^\circ_n$ zodanig dat $x \in U \subset N \cap X^\circ_n \subset N$ en dus is X lokaal samenhangend.
- (Lokaal compact) Zij $x \in X$ en N een omgeving van x. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x \in X^\circ_n$. Deze is lokaal compact volgens Propositie 2.2.20 en dus bestaat er een compacte omgeving $K \subset X^\circ_n$ zodanig dat $x \in K \subset N \cap X^\circ_n \subset N$ en dus zien we dat X lokaal compact is. $\square$

Gevolg 4.4.4 *Zij X, Y gegeneraliseerde Peanocontinua en $g : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ continu. Dan bestaat er een perfecte afbeelding $f : X \to Y$ zodanig dat $f_* = g$. Als g bovendien surjectief is, dan is f dat ook.*

Bewijs: Volgens Stelling 4.4.3 bestaat er een boom T en een perfecte surjectie $h : T \to Y$ zodanig dat $h_* : \mathcal{F}(T) \to \mathcal{F}(Y)$ een homeomorfisme is. Dan is de afbeelding $k : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\mathcal{T})$ gedefinieerd door $k = h_*^{-1} \circ g$ continu en dus bestaat er met Stelling 4.4.1 een perfecte afbeelding $l : X \to T$ zodanig dat $l_* = k$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & T \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "k = l_*"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathcal{F}(T) \arrow[r, shift left, "h_*"] & \mathcal{F}(Y) \arrow[l, shift left, "h_*^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Nu is $f = h \circ l : X \to Y$ perfect en $f_* = (h \circ l)_* = h_* \circ l_* = h_* \circ k = g$. Als g surjectief is, dan kunnen we l surjectief kiezen volgens Stelling 4.4.1 en dus is f surjectief. $\square$

Bibliografie

[1] M. Mueger: *Introduction to Topology (mostly general).* http://www.math.ru.nl/∼mueger/topology2014.pdf

[2] R. Ayala, M.J. Chávez, A. Quintero: *A Hahn-Mazurkiewicz Theorem for generalized Peano continua.* Birkhäuser Verlag, Basel, (1998)

[3] R. Engelking, K. Siekluchi: *Topology. A Geometric Approach.* Heldermann Verlag, (1992)

[4] S. Eilers: *Notes on end theory.* Preprint, (1995)

[5] M. Spivak: *A comprehensive introduction to differential geometry.* Volume One, Publish or Perish Inc., (1999)

[6] J. J. Charatonik: *History of Continuum Theory*, Kluwer Academic Publishers, (1998)

[7] T. Tao: *Analysis I*, Hindustan Book Agency, (2006)

[8] S. Willard: *General Topology.* Addison-Wesley, (1970)